Acta Phys. Polon., 1968, T. 33, F. 1, p. 3-12

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3200

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Као Ти

К ТЕОРИИ ПОЛЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ МУЛЬТИПЛЕТОМ В СИММЕТРИИ SU(2,2)

1967.

P2 - 3200

Као Ти

К ТЕОРИИ ПОЛЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ МУЛЬТИПЛЕТОМ В СИММЕТРИИ SU(2,2)

Направлено в "Acta Physica Polonica".

1. В в е д е н и е

В последнее время в работах ряда авторов[1,2] было показано, что группа симметрии G для сильновзаимодействующих элементарных частиц имеет структуру $G = P.S$, где P -группа Пуанкаре, S -группа внутренней симметрии, а точка обозначает полупрямое произведение. Возможными группами симметрии S являются $SL(6,C)$ и $SU(6,6)$. Все унитарные представления группы бесконечномерны, так как она не компактна. Идея объединить бесконечный мультиплет в одном унитарном представлении была развита по-разному в работах[3,14]. Если оставим пока в стороне унитарную симметрию, тогда возможными группами внутренней симметрии являются $SL(2,C)$ и $SU(2,2)$. Такое рассмотрение имеет большое значение для построения квантовой теории поля, учитывающей внутренюю симметрию элементарных частиц. Группы $SL(2,C)$ как группа внутренней симметрии элементарных частиц была рассмотрена в работах[7-12]. Авторы работ[9,10] пришли к следующему выводу: внутренняя симметрия приводит к нелокальному взаимодействию элементарных частиц.

Целью предыдущих работ[13,14] и данной работы является построение теории поля с бесконечным мультиплетом на основе группы $SU(2,2)$ как группы внутренней симметрии. Группа $SU(2,2)$ позволяет естественным образом ввести четность частиц и для максимальной компактной подгруппы использовать технику обычной теории поля. В данной работе мы рассмотрим вершину взаимодействия бесконечного мультиплета с синглетным полем, дадим выражение для "общего пропагатора" бесконечного бозонного и фермионного мультиплетов и с помощью "общего пропагатора" покажем, что во многих случаях теория поля с бесконечным мультиплетом приводит к сходящимся диаграммам, в то время как в обычной теории поля такие диаграммы расходятся.

2. Вырожденные унитарные представления группы $SU(2,2)$

Разные серии представлений группы $SU(2,2)$, реализуемых в разных пространствах, были рассмотрены в работах [5,6,15-21].

В работе [13] мы реализуем вырожденные унитарные представления группы $SU(2,2)$ в пространстве функции $f(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2 i_3})$, которые являются однородными функциями переменных Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$, где $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ -миноры, образованные из k первых строк матрицы: $g = \xi_{ij}$ $(i,j = 1,2,3,4)$. Как известно, [7] такие однородные функции тесно связаны с обобщенными тензорами и очень удобны в приложении к теории симметрии элементарных частиц. При такой реализации представлений генераторы $\mathcal{L}_{ij}$ группы имеют следующий вид [7]:

$$\mathcal{L}_{ij} = \sum_{n=1}^{3} \xi_{ni} \frac{\partial}{\partial \xi_{nj}} .$$

В [13] был использован следующий базис в гильбертовом пространстве функций f:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = \eta_{j_1 j_2 \lambda} N_{j_1 m_1} N_{j_2 m_2} S^{N-j_1-j_2}(g) \mathcal{L}_{21}^{j_1-m_1} \mathcal{L}_{43}^{j_2-m_2} \xi_1^{a} \eta_2^{\beta} \xi_3^{c} \eta_4^{\delta} . \qquad (1)$$

Здесь $\xi_i = \xi_{1i}$, $\xi^i = \eta_i = \varepsilon^{ijkl} \xi_{1j} \xi_{2k} \xi_{3l}$; $S(g) = \xi^i (\gamma_0)_i^j \xi_j$

(мы взяли представление Паули для матриц γ) ; $\eta_{j_1 j_2 \lambda}$ -нормирующий множитель; a , β , c , δ - неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям $a+\beta = 2j_1$, $c+\delta = 2j_2$; $N_{jm} = [(j+m)!]^{\frac{1}{2}} [(2j)!(j-m)!]^{-\frac{1}{2}}$; λ — собственное значение генератора группы $U(1)$ ($\lambda = \frac{a+\delta-\beta-c}{4}$) .

Каждое представление характеризуется парой чисел (N, x), которые связаны со степенями однородности F и $\mathcal{F}$ функции f относительно Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} N + 2x &= F , \\ N - 2x &= \mathcal{F} ; \end{aligned}$$

Из условия унитарности представлений в [13] было найдено две серии представлений:

1) $N=-\frac{3}{2}+i\varrho$ (главная серия). Здесь ϱ -любое вещественное число.

2) $\mathrm{Im}\,N=0$ (дополнительная серия). В этом случае $2|x|$ должно быть целым числом и $-2<N<-1$.

В обеих сериях неприводимые представления реализуются при условии

$$j_1+j_2-2|x| = 0,1,2,\dots ,$$

где $4x$ -любое целое число.

В дальнейшем мы будем рассматривать только главную серию. В работе [14] мы представили матрицу $g=\xi_{ij}$ в виде

$$g=\zeta\delta z, \tag{2}$$

где ζ,δ,z - 4 x 4 матрицы; их клеточные формы были даны в работе [14]. Там было доказано, что найденная главная серия $N=-\frac{3}{2}+i\varrho$ принадлежит так называемой серии d_1, данной Граевым в работе [18]. Не все элементы матриц ζ,δ,z независимы друг от друга (подробно см. [14]), в частности, матрица z зависит лишь от пяти вещественных параметров x_1, x_2, x_3, x_4, и x_5 и имеет следующий вид (см. также [18]):

$$z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1+ix_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3+ix_4 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)+ix_5 & -x_1+ix_2 & x_3-ix_4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

При каноническом разложении (2) переменные ξ_i и ξ^i не зависят от ζ_{ij} и выражаются через элементы матриц δ и z следующим образом:

$$\xi_1 = \delta_{44}\left(-\frac{x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2}{2}+ix_5\right);$$

$$\xi_2 = \delta_{44}\left(-x_1+ix_2\right);$$

$$\xi_3 = \delta_{44}\left(x_3-ix_4\right);$$

$$\xi_4 = \delta_{44} \qquad (\delta_{44} \text{— вещественный параметр});$$

$$\xi_1^* = -\xi^1, \quad \xi_2^* = -\xi^2, \quad \xi_3^* = +\xi^3, \quad \xi_4^* = -\xi^4.$$

Инвариантная мера $d\mu(g)$ на группе равна $\delta_{44}^6\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5$. Однородные функции $f(\xi_i, \xi^i)$ образуют гильбертово пространство с нормой

$$\int ff^*\, \delta_{44}^6\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 . \tag{4}$$

3. Вершина взаимодействия бесконечного мультиплета с синглетным полем

Векторный базис (1) можно написать в следующем виде:

$$S(g)^{N-j_1-j_2} Z^{f_1 \dots f_\beta\, \hat{h}_1 \dots \hat{h}_\delta}_{e_1 \dots e_a\, \hat{g}_1 \dots \hat{g}_c}(g),$$

где Z –тензор, построенный из ξ_i и ξ^i с подходящими нормирующими множителями. Тензор Z –симметричен по индексам e_i, f_i, $\hat{g}_i$, $\hat{h}_i$ в отдельности и равен нулю при свертывании e с f или $\hat{g}$ с $\hat{h}$.
(a, β, c, δ — неотрицательные целые числа). Для редукции $SU(2,2) \supset \{su(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)\}_p$, где $\{su(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)\}_p$ определяется как результат применения лоренцевых преобразований L_p к максимальной компактной подгруппе $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ (p - 4 - импульс частиц), мы имеем:

$$D_p(N, x; g) = \sum_{j_1 j_2} \phi^{\mu_1 \dots \hat{\mu}_c}_{\nu_1 \dots \hat{\nu}_\delta}(p)\, S\left(\frac{p}{m}; g\right)^{N-j_1-j_2} Z^{\nu_1 \dots \hat{\nu}_\delta}_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_c}(p; g). \tag{5}$$

Здесь $S\left(\frac{p}{m}; g\right) = \xi^i \left(\frac{\gamma p}{m}\right)_i^j \xi_j$;

$$Z^{\nu_1 \dots \nu_\beta \hat{\nu}_1 \dots \hat{\nu}_\delta}_{\mu_1 \dots \mu_a \hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_c}(p; g) = u^{e_1}_{\mu_1}(p) \dots u^{\nu_\beta}_{f_\beta}(-p)\, Z^{f_1 \dots f_\beta\, \hat{h}_1 \dots \hat{h}_\delta}_{e_1 \dots e_a\, \hat{g}_1 \dots \hat{g}_c}(p; g)\, \bar{u}^{\hat{g}_1}_{\hat{\mu}_1}(p) \dots \bar{u}^{\hat{\nu}_\delta}_{\hat{h}_\delta}(-p) ;$$

$D(N, x; g)$ - некоторый элемент гильбертова пространства, реализующий представление (N, x); компоненты $\phi^{\mu_1 \dots \hat{\mu}_c}_{\nu_1 \dots \hat{\nu}_\delta}(p)$ описывают частицы с определенным импульсом и четностью (явное выражение некоторых компонент $\phi^{\mu_1 \dots \hat{\mu}_c}_{\nu_1 \dots \hat{\nu}_\beta}(p)$ было дано в работе [14]); $\bar{u}^{\hat{g}}_{\mu}(p)$, $u^{\nu}_{f}(-p)$, ... - дираковские спиноры, удовлетворяющие следующим уравнениям [22]:

$$(\gamma p+m)^{\mu'}_{\mu}\, \bar{u}^{\hat{g}}_{\mu'}(p) = 0 \quad , \tag{6}$$

$$u^{\nu'}_{f}(-p)\,(\gamma p - m)^{\nu}_{\nu'} = 0 \quad , \dots \tag{7}$$

Разложение (5) впервые было дано в работе [9] для случая $SL(2,C)$.

Рассмотрим теперь случай взаимодействия некоторого бесконечного мультиплета с синглетным полем A. Инвариантная вершинная функция имеет вид:

$$A(p'-p)\int D^{*}_{p'}(N,x;g)\, D_{p}(N,x;g)\, d\mu(g) \quad . \tag{8}$$

Подставив (5) в (8) в случае бозонного мультиплета, мы получим для компоненты $\phi(\beta=c=0)$ следующее выражение (здесь мы взяли для бозонного мультиплета представление с $2x=\rho=0$):

$$A(p'-p)\,\phi^{*}(p')\,\phi(p)\,F(k^2),$$

где

$$F(k^2) = \int S\left(\frac{p'}{m};g\right)^{-\frac{3}{2}} S\left(\frac{p}{m};g\right)^{-\frac{3}{2}} d\mu(g), \qquad k^2=(p'-p)^2 . \tag{9}$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение фактора $F(k^2)$ при $k^2 \to -\infty$. Так как (9) является инвариантной функцией относительно всех преобразований группы, в частности относительно лоренцевых преобразований, поэтому можно исследовать (9) в подходящей для нас системе координат. Выберем систему координат, в которой

$$p' = \{m,0,0,0\} \quad ,$$
$$p = \{p_0,p_1,0,0\} \quad .$$

В этой системе координат

$$S\left(\frac{p'}{m};g\right) = \delta_{44}^2\left[\frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)^2+\sum_{\alpha=1}^{5}x_\alpha^2+1\right],$$

$$S\left(\frac{p}{m};g\right) = \delta_{44}^2\frac{p_0}{m}\left\{\frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)^2+\sum_{\alpha=1}^{5}x_\alpha^2+1-\frac{p_1}{p_0}\left[\frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)^2+x_5^2-1+2x_1x_3+2x_2x_4\right]\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $S\left(\frac{p'}{m};g\right)>0,\ S\left(\frac{p}{m};g\right)>0.$ Неотрицательная функция $S\left(\frac{p'}{m};g\right)^{-3/2}S\left(\frac{p}{m};g\right)^{-3/2}$ непрерывна во всех областях изменений переменных x_α $(\alpha=1,2,3,4,5)$ и стремится, возрастая с возрастанием параметра $k^2= 2m^2-2m\sqrt{p_1^2+m^2}$, к пределу

$$\delta_{44}^{-6}\left(\frac{p_0}{m}\right)^{-3/2}\varphi(x_\alpha) = \delta_{44}^{-6}\left(\frac{p_0}{m}\right)^{-3/2}\left[\frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)^2+\sum_{\alpha=1}^{5}x_\alpha^2+1\right]^{-3/2}\left[\left(x_1-x_3\right)^2+\left(x_2-x_4\right)^2+2\right]^{-3/2},$$

который тоже непрерывен в указанных областях. Так как существует интеграл

$$\int \delta_{44}^{-6}\left(\frac{p_0}{m}\right)^{-3/2}\varphi(x_\alpha)\,d\mu(g) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{-3/2}\int\varphi(x_\alpha)\,dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5 ,$$

поэтому, как известно, из теории о равномерной сходимости интегралов мы имеем

$$\lim_{k^2\to-\infty}\int S\left(\frac{p'}{m};g\right)^{-3/2}S\left(\frac{p}{m};g\right)^{-3/2}d\mu(g) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{-3/2}\int\varphi(x_\alpha)\,dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5.$$

Таким образом, фактор $F(k^2)$ при $k^2\to-\infty$ ведет себя как $(-k^2)^{-3/2}$. В случае $SL(2,C)$ этот фактор вел бы себя как $(-k^2)^{-1}$ при $k^2\to-\infty$.

4. Общий пропагатор для бесконечного мультиплета

В теории симметрии, как было показано в работах /23,24,25/, появляется новое обстоятельство: пропагатор нескольких частиц, обладающих разными спинами, но принадлежащих к одному и тому же представлению (не унитарному), можно объединить в одном "общем пропагаторе".

Однако здесь мы имеем дело с унитарными представлениями, поэтому в каждом представлении имеется бесконечный мультиплет. Оказывается, что и в этом случае можно объединить пропагаторы бесконечного числа частиц, принадлежащих к одному и тому же унитарному представлению, в одном "общем пропагаторе".

Обозначим "общий пропагатор" бесконечного мультиплета через $\langle D_p(N,x;g_1), D_p^*(N,x;g_2)\rangle$. Согласно результатам работы [13], для бозонного мультиплета нужно взять представление с $2x = 0,1,2,\dots$ Возьмем представление с $2x=0$ и покажем, что "общий пропагатор" бозонного мультиплета имеет следующий вид (здесь контактные члены не учитываются, см. [25]):

$$\langle D_p(N,0;g_1), D_p^*(N,0;g_2)\rangle =$$

$$\frac{\sum\limits_{a+\beta+c+\delta=0} \frac{1}{a!\beta!c!\delta!} \mathcal{S}\, S(g_1)^{N-j_1-j_2} Z^{f_1\dots f_\beta \hat{h}_1\dots\hat{h}_\delta}_{e_1\dots e_a \hat{g}_1\dots\hat{g}_c}(g_1)\, S(g_2)^{N^*-j_1-j_2}\left[Z^{f_1\dots f_\beta \hat{h}_1\dots\hat{h}_\delta}_{e_1\dots e_a \hat{g}_1\dots\hat{g}_c}(g_2)\right]^+}{p^2-m^2}, \quad (10)$$

где $\mathcal{S}$ –оператор симметризации по $e, f, \hat{g}, \hat{h}$.

Вычет в полюсе $p^2=m^2$ дает "общий проекционный оператор" для бесконечного мультиплета. Пользуясь уравнениями (6) и (7), мы можем написать в точке $p^2=m^2$ следующие равенства:

$$2m\delta_e^{e'} = u_e^\nu(-p)(\gamma p+m)_\nu^\rho\, \bar{u}_\rho^{e'}(-p), \dots, 2m\delta_{\hat{h}'}^{\hat{h}} = u_{\hat{h}'}^\sigma(p)(\gamma p-m)_\sigma^\mu\, \bar{u}_\mu^{\hat{h}}(p) \quad . (11)$$

Матричный элемент M лоренцева преобразования L_p удовлетворяет следующему условию унитарности (см. [9]):

$$\sum_{a,\beta,c,\delta} M^{f_1\dots f_\beta \hat{h}_1\dots\hat{h}_\delta; m_1\dots m_\rho\, \hat{r}_1\dots\hat{r}_q}_{e_1\dots e_a \hat{g}_1\dots\hat{g}_c; n_1\dots n_\mu\, \hat{s}_1\dots\hat{s}_\nu}(p)\, M^{+e_1\dots e_a \hat{g}_1\dots\hat{g}_c\,; n'_1\dots n'_{\mu'}\, \hat{s}'_1\dots\hat{s}'_{\nu'}}_{f_1\dots f_\beta \hat{h}_1\dots\hat{h}_\delta; m'_1\dots m'_{\rho'}\, \hat{r}'_1\dots\hat{r}'_{q'}}(p) = \delta_{\rho\rho'}\delta_{\mu\mu'}\delta_{qq'}\delta_{\nu\nu'}\delta^{m_1}_{m'_1}\dots\delta^{n'_1}_{n_1}\dots\delta^{\hat{r}_1}_{\hat{r}'_1}\dots\delta^{\hat{s}'_1}_{\hat{s}_1}\dots \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в (10), мы получим:

$$(p^2-m^2)\langle D_p(N,0;g_1), D_p^*(N,0;g_2)\rangle\Big|_{p^2=m^2} =$$

$$\sum_{a+\beta+c+\delta=0} \frac{1}{a!\beta!c!\delta!} \mathcal{S}\, S\!\left(\tfrac{p}{m};g_1\right)^{N-j_1-j_2} Z^{\nu_1\dots\hat{\nu}_\delta}_{\mu_1\dots\hat{\mu}_c}(p;g_1)\, S\!\left(\tfrac{p}{m};g_2\right)^{N-j_1-j_2} \bar{Z}^{\sigma_1\dots\hat{\sigma}_c}_{\varrho_1\dots\hat{\varrho}_\delta}(p;g_2)\,(\gamma p-m)^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\sigma}_1}\dots(\gamma p-m)^{\hat{\varrho}_1}_{\hat{\nu}_1}\dots(\gamma p+m)^{\mu_1}_{\sigma_1}\dots(\gamma p+m)^{\varrho_1}_{\nu_1}\dots, \quad (13)$$

где $\mathcal{S}$ - оператор симметризации по индексам $\nu_i, \mu_i, \sigma_i, \varrho_i$;

$$\overline{Z}^{\,c_1\dots\hat{c}_c}_{g_1\dots\hat{g}_\delta}(p;g_2) = \overline{u}^{\,c_1}_{e_1}(p)\dots\overline{u}^{\,f_\beta}_{g_\beta}(-p)\left[Z^{f_1\dots f_\beta \hat{h}_1\dots\hat{h}_\delta}_{e_1\dots e_\alpha \hat{g}_1\dots\hat{g}_c}(p;g_2)\right]^{+} u^{\hat{c}_1}_{\hat{g}_1}(p)\dots u^{\hat{h}_\delta}_{\hat{g}_\delta}(-p) \; .$$

Напишем несколько первых членов разложения (5):

$$D_p(N,x;g) = \phi(p)S\left(\tfrac{p}{m};g\right)^N + \dots + \phi^{\hat{\mu}}_{\nu}(p)S\left(\tfrac{p}{m};g\right)^{N-1}Z^{\nu}_{\hat{\mu}}(p;g) + \dots$$
$$+\phi^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}_{\nu_1\nu_2}(g)S\left(\tfrac{p}{m};g\right)^{N-2}Z^{\nu_1\nu_2}_{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}(p;g) + \dots \qquad (14)$$

Теперь покажем, как можно из (13) получить, например, числитель пропагатора ~~для~~ для бозона со спином 2, содержащегося в компоненте $\phi^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}_{\nu_1\nu_2}(p)$ (см.(14)), которая имеет следующий вид (см.[25]):

$$\phi^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}_{\nu_1\nu_2}(p) = \left[(\gamma p+m)\gamma_\theta C\right]_{\nu_1\nu_2}\left\{\mathring{S}_{(\theta\delta)} + A_{[\theta\delta]} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(g_{\theta\delta} - \frac{p_\theta p_\delta}{m^2}\right)\phi\right\}\left[C^{-1}\gamma_\delta(\gamma p-m)\right]^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2} .$$

Здесь $\mathring{S}_{(\theta\delta)}$ –симметричный тензор, удовлетворяющий условию $g_{\theta\delta}\mathring{S}_{(\theta\delta)} = 0$ и описывающий бозон со спином 2. Сначала проектируем (14) на состояние $\phi^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}_{\nu_1\nu_2}(p)$, соответствующее вектору $S\left(\frac{p}{m};g\right)^{N-2}Z^{\nu_1\nu_2}_{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}(p;g)$, путем скалярного умножения (14) на этот вектор. Пользуясь соотношением ортогональности, мы получим

$$\int D_p(N,x;g)S\left(\tfrac{p}{m};g\right)^{N*2}\overline{Z}^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p;g)d\mu(g) = \phi^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p) \; .$$

Таким образом, левая часть равенства (13) дает:

$$(p^2-m^2)\left\langle \int D_p(N,x;g_1)S\left(\tfrac{p}{m};g_1\right)^{N*2}\overline{Z}^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p;g_1)d\mu(g_1), \int D^*_p(N,x;g_2)S\left(\tfrac{p}{m};g_2\right)^{N-2}\overline{Z}^{\lambda_1\lambda_2}_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}(p;g_2)d\mu(g_2)\right\rangle\Big|_{p^2=m^2}$$

$$= (p^2-m^2)\left\langle \phi^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p), \overline{\phi}^{\lambda_1\lambda_2}_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}(p)\right\rangle\Big|_{p^2=m^2} .$$

Аналогично для правой части равенства (13) имеем:

$$\iint \sum_{\alpha+\beta+\epsilon+\delta=0} \frac{1}{\alpha!\beta!\epsilon!\delta!} Sp\, S\left(\frac{p}{m};g_1\right)^{N-j_1-j_2} Z^{\nu_1\ldots\hat{\nu}_\delta}_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_\epsilon}(p;g_1)\, S\left(\frac{p}{m};g_1\right)^{N^*-2} \bar{Z}^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p;g_1)\, d\mu(g_1)\times$$

$$\times\; S\left(\frac{p}{m};g_2\right)^{N^*-j_1-j_2} \bar{Z}^{\sigma_1\ldots\hat{\sigma}_\epsilon}_{\varrho_1\ldots\hat{\varrho}_\delta}(p;g_2)\, S\left(\frac{p}{m};g_2\right)^{N-2} Z^{\lambda_1\lambda_2}_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}(p;g_2)\, d\mu(g_2)\times$$

$$\times\; (\gamma p-m)^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\sigma}_1}\cdots(\gamma p-m)^{\hat{\varrho}_\delta}_{\hat{\nu}_\delta}(\gamma p+m)^{\mu_1}_{\sigma_1}\cdots(\gamma p+m)^{\varrho_\beta}_{\nu_\beta}$$

$$= \frac{1}{4} Sp\,(\gamma p-m)^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\theta}_1}(\gamma p-m)^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\theta}_2}(\gamma p+m)^{\lambda_1}_{\gamma_1}(\gamma p+m)^{\lambda_2}_{\gamma_2} .$$

В результате мы придем к следующему равенству:

$$(p^2-m^2)\left\langle \Phi^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p), \overline{\Phi}^{\lambda_1\lambda_2}_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}(p)\right\rangle\Big|_{p^2=m^2} = \frac{1}{4} Sp\left(\gamma p-m\right)^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\theta}_1}\left(\gamma p-m\right)^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\theta}_2}\left(\gamma p+m\right)^{\lambda_1}_{\gamma_1}\left(\gamma p+m\right)^{\lambda_2}_{\gamma_2} . \quad (15)$$

Из (15) можно сразу получить пропагатор для бозона со спином 2 с помощью следующих проекционных операторов (подробно см. /25/):

$$\left[P^{\gamma_2\gamma_1}_{\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1}\right]_{\theta'\sigma'} = \frac{1}{64m^4}\left[C^{-1}\gamma_{\theta'}(\gamma p+m)\right]^{\gamma_2\gamma_1}\left[(\gamma p-m)\gamma_{\sigma'}C\right]_{\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1} ,$$

$$P_{\mu\nu\theta'\sigma'} = -\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\theta'\sigma'} + \frac{1}{2}\left(g_{\mu\theta'}g_{\nu\sigma'} + g_{\mu\sigma'}g_{\nu\theta'}\right) - \frac{1}{3}g_{\theta'\sigma'}\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} .$$

Легко проверить, что

$$\overset{\circ}{S}_{(\mu\nu)} = P_{\mu\nu\theta'\sigma'}\left[P^{\gamma_2\gamma_1}_{\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1}\right]_{\theta'\sigma'}\Phi^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p) .$$

Аналогично можно проектировать $\overline{\Phi}^{\lambda_1\lambda_2}_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}(p)$ на состоянии $\overline{S^{\circ}}_{(\mu'\nu')}$. Проектируя теперь правую часть равенства (15) с помощью тех же проекционных операторов, мы получаем:

$$(p^2-m^2)\left\langle \overset{\circ}{S}_{(\mu\nu)}, \overline{\overset{\circ}{S}}_{(\mu'\nu')}\right\rangle\Big|_{p^2=m^2} =$$

$$-\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)\left(g_{\mu'\nu'}-\frac{p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(g_{\mu\mu'}-\frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}\right)\left(g_{\nu\nu'}-\frac{p_\nu p_{\nu'}}{m^2}\right)+\left(g_{\mu\nu'}-\frac{p_\mu p_{\nu'}}{m^2}\right)\left(g_{\nu\mu'}-\frac{p_\nu p_{\mu'}}{m^2}\right)\right]. \quad (16)$$

Выражение (16) дает как раз числитель пропагатора для бозона со спином 2 [26].

Способ, которым мы пользовались, чтобы получить пропагатор для бозона со спином 2, является общим способом получения пропагатора любого бозона с любым спином из выражения (10), поэтому (10) дает действительно "общий пропагатор" бесконечного бозонного мультиплета.

Аналогично можно получить выражение для общего пропагатора фермионного мультиплета.

Отметим здесь, что выражение (10) является как раз аналитическим продолжением выражения (13) за массовую поверхность. Вопрос о аналитическом продолжении выражения (13) тесно связан с взаимодействием полей и будет специально рассмотрен нами в дальнейшем.

5. Взаимодействие бесконечного мультиплета с синглетным полем в более высоких порядках

Рассмотрим теперь следующую диаграмму:

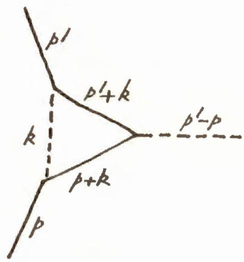


Рис. 1

На рис. 1 пунктирная линия означает синглетное поле (с массой μ), с которым взаимодействует бесконечный мультиплет (сплошная линия).

Рассмотрим случай бозонного мультиплета и возьмем для определенности представление с $2\varkappa=\rho=0$. Матричный элемент для диаграммы, изображенной на рис. 1, имеет вид

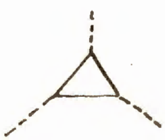
$$A(p'-p)\int\Big[\int D^{*}_{p'}(N,0;g_1)\Big\langle D_{p'+k}(N,0;g_1),D^{*}_{p'+k}(N,0;g_2)\Big\rangle\Big\langle D_{p+k}(N,0;g_2),D^{*}_{p+k}(N,0;g_3)\Big\rangle\times$$

$$\times\frac{1}{k^2-\mu^2}D_p(N,0;g_3)\,d\mu(g_1)\,d\mu(g_2)\,d\mu(g_3)\Big]\,d^4k\,. \qquad (17)$$

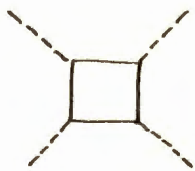
Подставляя (10) в (17) и оставляя во внешних линиях $D^{*}_{p'}(g_1), D_p(g_3)$ только интересующие нас состояния, мы получаем матричный элемент вершинной диаграммы взаимодействия данного состояния бесконечного мультиплета с синглетным полем A. Из (10) и (17) видно, что сходимость матричного элемента не зависит от спина состояний во внешних линиях. Матричный элемент (17) сходится как $\int|k|^{-3}d|k|$. Таким образом, в данном случае теория поля с бесконечным мультиплетом не дает улучшения сходимости по сравнению с обычной теорией поля, если мы берем во внешних линиях наинизшее состояние со спином 0.

Однако для состояний с высшим спином (например, для случая спина 2 в обычной теории поля такой матричный элемент расходится как $\int|k|^{5}d|k|$) теория с бесконечным мультиплетом дает надежную сходимость. Подобный результат для случая $SL(2,C)$ был получен другим путем в работе [8].

В случае же взаимодействия фермионного мультиплета с синглетным полем A теория с бесконечным мультиплетом дает улучшения сходимости уже во наинизшем состоянии со спином $\frac{1}{2}$ во внешних линиях. Действительно, в этом случае (без ущерба для общности для определенности можно взять, например, представление с $2\varkappa=\frac{1}{2}$) мы получаем ту же сходимость, как и в случае бозонного мультиплета, в то время как в обычной теории поля соответствующий матричный элемент расходится логарифмически. В обычной теории поля треугольная и четырехугольная диаграммы, изображенные на рис. 2,3, тоже приводят к расхождениям. Здесь же



Р и с. 2



Р и с. 3

матричные элементы таких диаграмм сходятся. Таким образом, в скалярной мезодинамике, если мы рассматриваем спинорное поле как наинизшее состояние бесконечного мультиплета, нет никакой необходимости вводить в лагранжиан контрчлены $a\varphi^3$ и $b\varphi^4$.

Как мы видели, теория поля с бесконечным мультиплетом во многих случаях дает улучшения сходимости матричных элементов и в некотором смысле она проще обычной теории поля. Для дальнейшего развития теории нужно найти инвариантную функцию вершины взаимодействия трех бесконечных мультиплетов, включить унитарную симметрию $SU(3)$ и, в соответствии с результатами работ /8,27,28/, исследовать вопросы причинности, связанные с квантованием.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Нгуену Ван Хьеу, Я.А. Смородинскому и И.Т. Тодорову за интерес к работе и ценные указания.

Литература

1. P.Budini, C.Fronsda. Phys.Rev.Lett., 14, 968 (1965).
2. Nguen Van Hieu. High Energy Physics and Theory of Elementary Particles. Mailpva Dumka, Kiev.
3. R.F.Dashen, M.Gell-Mann. Phys.Lett., 17, 142 (1965).
4. R.Delbourgo, A.Salam, F.R.S. and J.Dtaythdee. Procl.Roy., Soc., 289, 177 (1965).
5. I.I.Todorov. Preprint, Trieste, IC/66/71.
6. И.Е. Тодоров. Доклад на Международном конгрессе математиков, Москва, 1966; Препринт ОИЯИ, Р-2-2928, Дубна, 1966.
7. C.Fronsdal. High Energy Physics and Elementary Particles IAEA, Vienna, 1965.
8. C.Fronsdal. In finite maltiplets and local fields. Preprint Trieste, June, 1966.

9. Dao vong Duc, Nguyen van Hieu. Preprint, P-2886, Dubna, 1966.
10. Dao vong Duc, Nguyen van Hieu. Preprint, E2-2932, Dubna, 1966.
11. W.Rühl. Preprint CERN 65/1607/5 - TH. 618 (1965).
12. W.Rühl. Preprint CERN 65/1851/5 - TH.636 (1965).
13. Као Ти. Препринт ОИЯИ, Р5-2950, Дубна, 1966.
14. Као Ти. Препринт ОИЯИ, Р2-3078, Дубна, 1966.
15. Y.Murai. Progr. Theor. Phys., 9, 147 (1953).
16. М.Л. Граев. Труды Моск. математ.общ., 7, Москва, 1958.
17. И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. ДАН СССР, 71, 825 (1950).
18. И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Изв. АН СССР, серия математическая, 29,1329, 1 (1965).
19. A.Esteve, P.G.Sona. Nuovo Cimento, 32, 473 (1964).
20. A.Kihlberg, V.F.Muller, F.Halbwasch. Preprint CERN, 66/250/5 - TH-644.
21. R.Raczka. Preprint Trieste IC/65/80; R.Raczka, J.Fischer. Preprint Trieste IC/66/16, IC/66/36.
22. R.Delbourgo et al. Hiegh Energy Physics and Elementary Particles, IAEA, Vienna, 1965.
23 G.S.Guralnik, T.W.B.Kibble. Phys.Rev., 139, B712 (1965).
24. Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 2 , 517 (1965).
25. Као Ти. ЯФ, 4, 846 (1966).
26. C.Gronsdal. Suppl. Nuovo Cimento, 9, 416 (1958); V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Annals of Phys., 35, 167 (1965).
27. Nguen van Hieu. Preprint IFA, Bucharest, 1966. (Proceedings of the International Symposium of Weak Interaction, Balaton Villagos, 1966).
28. G.Feldman, P.T.Matthews. Preprint Imp. Coll. London, ICTP/66/12, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1967 г.