С 324.3
К-138
5/v-67г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3198

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов,

А.Н. Тавхелидзе

К ВОПРОСУ О ДИСПЕРСИОННЫХ ПРАВИЛАХ СУММ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

P2 - 3198

В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов,

А.Н. Тавхелидзе

К ВОПРОСУ О ДИСПЕРСИОННЫХ ПРАВИЛАХ СУММ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

В ряде работ последнего времени было показано, что дисперсионные правила сумм (д.п.с.), вытекающие из аналитичности амплитуд рассеяния в плоскости энергии, могут быть с успехом применены для получения экспериментально проверяемых соотношений между физическими величинами /1-2/.

Все д.п.с. естественно разделяются на два класса. Первый из них образуют так называемые сверхсходящиеся д.п.с. /1,2/, для вывода которых требуется существование дисперсионных соотношений без вычитаний не только для самих амплитуд, но и для амплитуд, умноженных на некоторую степень энергии x/. Ко второму классу принадлежат д.п.с., получаемые в рамках определенных гипотез об асимптотическом поведении амплитуды рассеяния /3/ (относительно экспериментального подтверждения д.п.с., выведенных в /3/, см. работу /4/).

В настоящей заметке мы хотели бы обратить внимание на тот факт, что д.п.с. можно применять как своеобразный инструмент, с помощью которого некоторые соотношения между сечениями при высоких энергиях отображаются на низкоэнергетическую область. В качестве примера будет рассмотрено мезон-барионное рассеяние, поскольку в этом случае (в отличие от барион-барионного рассеяния) ненаблюдаемая область в д.п.с. сравнительно мала, благодаря чему можно провести сравнение с экспериментом.

Начнем со сверхсходящихся д.п.с. Пусть $C^{(\pm)}(\nu)$, $D^{(\pm)}(\nu)$ и $E^{(\pm)}(\nu)$ есть соответственно кросс-четные и кросс-нечетные амплитуды рассеяния вперед, мнимые части которых по оптической теореме связаны с полными сечениями рассеяния мезонов на нуклонах следующими формулами:

---

x/ Это условие эквивалентно предположению, что при вычислении интегралов

$$\oint_\Gamma f^{(-)}(\nu)\,d\nu = 0\,, \qquad \oint_\Gamma \nu\, f^{(+)}(\nu)\,d\nu = 0$$

(Γ - контур, изображенный на рисунке, знаки $(\pm)$ соответствуют определенной кросс-четности) можно пренебречь вкладом от большого круга C_R.

$$\mathrm{Im}\, C^{(\pm)}(\nu) = \frac{\sqrt{\nu^2-\mu_\pi^2}}{2}\left[\sigma(\pi^- p) \pm \sigma(\pi^+ p)\right], \qquad (1)$$

$$\mathrm{Im}\, D^{(\pm)}(\nu) = \frac{\sqrt{\nu^2-\mu_k^2}}{2}\left[\sigma(k^- p) \pm \sigma(k^+ p)\right], \qquad (2)$$

$$\mathrm{Im}\, E^{(\pm)}(\nu) = \frac{\sqrt{\nu^2-\mu_k^2}}{2}\left[\sigma(\bar{k}^0 p) \pm \sigma(k^0 p)\right] \qquad (3)$$

(ν -энергия мезона в лабораторной системе).

Напишем сверхсходящиеся д.п.с. для комбинации амплитуд

$$\{ C^{(-)}(\nu) - D^{(-)}(\nu) + E^{(-)}(\nu) \}:$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Im}\, \{ C^{(-)}(\nu) - D^{(-)}(\nu) + E^{(-)}(\nu) \}\, d\nu = 0 \qquad (4)$$

В физической области подинтегральную функцию в (4) можно в силу (1) выразить через полные сечения изучаемых процессов. При достаточно больших энергиях ν, например, начиная с некоторого $\nu = A$, где $A \gg \mu_\pi, \mu_k$, верно приближенное равенство:

$$\mathrm{Im}\, \{ C^{(-)}(\nu) - D^{(-)}(\nu) + E^{(-)}(\nu) \} =$$
$$= \frac{\nu}{2} \{ [\sigma(\pi^- p) - \sigma(\pi^+ p)] - [\sigma(k^- p) - \sigma(k^+ p)] +$$
$$+ [\sigma(\bar{k}^0 p) - \sigma(k^0 p)] \}. \qquad (5)$$

С другой стороны, при высоких энергиях величину (5) можно считать равной нулю на основании "слабого" соотношения Джонсона-Тримена /5/x/:

---

x/ *Хотя равенство типа (6) выводится без какого-либо ограничения на энергии, ясно, что реально его следует принимать в расчет лишь в той области энергий, когда разность масс π - и K -мезонов уже несущественна. Именно это обстоятельство мы имеем в виду, называя соотношения Джонсона-Тримена и подобные им равенства (см., например, (13)) характерными для высокоэнергетической области.*

$$\sigma(\pi^- p) - \sigma(\pi^+ p) = \sigma(k^- p) - \sigma(k^+ p) + \sigma(k^0 p) - \sigma(\bar{k}^0 p) . \qquad (6)$$

Поэтому вместо (4) мы фактически получаем правило сумм:

$$\int_0^{\Lambda} \mathrm{Im}\,\{ C^{(-)}(\nu) - D^{(-)}(\nu) + E^{(-)}(\nu) \}\, d\nu = 0 . \qquad (7)$$

После явного выделения полюсных членов и интегралов по ненаблюдаемой области [6], а также учета формул (1)-(3) соотношение (7) принимает вид:

$$- \left(\frac{g^2_{\pi NN}}{4\pi}\right) 2\pi^2 \left(\frac{\mu_\pi}{m_p}\right)^2 - \frac{4\pi^2}{m_p} \left(\frac{g^2_{p\Lambda k}}{4\pi}\right) \left(\frac{M^2_\Lambda}{2m_p} + m_p - m_\Lambda\right) +$$

$$+ \int_{\mu_\pi}^{\Lambda} \sqrt{\nu^2 - \mu_\pi^2}\,[\sigma(\pi^- p) - \sigma(\pi^+ p)]\, d\nu = \int_{\mu_k}^{\Lambda} \sqrt{\nu^2 - \mu_k^2}\,[\sigma(k^- p) - \qquad (8)$$

$$- \sigma(k^+ p) - \sigma(\bar{k}^0 p) + \sigma(k^0 p)]\, d\nu = 2 \int_{\omega_{\Lambda\pi}}^{\mu_k} [\mathrm{Im}\, D^{(-)}(\nu) - \mathrm{Im}\, E^{(-)}(\nu)]\, d\nu ,$$

где m_p , m_Λ –массы протона и Λ –гиперона ,

$$M^2_\Lambda = m^2_\Lambda - m^2_p - \mu^2_k , \qquad (9)$$

$$\omega_{\Lambda\pi} = \frac{(m_\Lambda + \mu_\pi)^2 - m_p^2 - \mu_k^2}{2 m_p} ,$$

а константы взаимодействия g имеют следующие значения:

$$\frac{g^2_{\pi NN}}{4\pi} = 14{,}5 \pm 0{,}4 , \qquad (10)$$

$$\frac{g^2_{p\Lambda k}}{4\pi} = 4{,}8 \pm 1.0 \quad [7].$$

Если исходить из "сильных" соотношений Джонсона-Тримена [4/x)],

---

x/ *Эти соотношения, как известно, выполняются несколько хуже, чем (6).*

$$\frac{1}{2}[\sigma(k^+p)-\sigma(k^-p)]=\sigma(k^0p)-\sigma(\bar{k}^0p)=\sigma(\pi^+p)-\sigma(\pi^-p), \qquad (11)$$

то, повторяя приведенные выше рассуждения, легко получить пару д.п.с., аналогичных (8). Мы выпишем лишь одно из них, поскольку второе, при учете (8), очевидно, уже не является независимым:

$$\frac{2\pi^2}{m_p}\left(\frac{g^2_{p\Lambda k}}{4\pi}\right)\left(\frac{M^2_\Lambda}{2m_p}+m_p-m_\Lambda\right)-\frac{2\pi^2}{m_p}\left(\frac{g^2_{p\Sigma k}}{4\pi}\right)\left(\frac{M^2_\Lambda}{2m_p}+m_p-m_\Lambda\right)+$$

$$+\int_{\mu_k}^{A}\sqrt{\nu^2-\mu_k^2}\,\left[\frac{1}{2}\sigma(k^-p)-\frac{1}{2}\sigma(k^+p)-\sigma(\bar{k}^0p)+\right. \qquad (12)$$

$$\left.+\sigma(k^0p)\right]d\nu+\int_{\omega_{\Lambda k}}^{\mu_k}(\mathrm{Im}\,D^{(-)}-2\,\mathrm{Im}\,E^{(-)})\,d\nu=0.$$

Здесь

m_Σ – масса Σ – гиперона,

$$M^2_\Sigma=m^2_\Sigma-m^2_p-\mu^2_k, \qquad (13)$$

$$\frac{g^2_{p\Sigma k}}{4\pi}<3{,}2\;.$$ [7].

Сверхсходящиеся д.п.с. для кросс-четных амплитуд также могут быть применены с целью отображения соотношений между сечениями, характерных для высокоэнергетической области, на область более низких энергий.

Например, приведенное в работе [8] равенство

$$\sigma(k^+p)+\sigma(k^-p)=\frac{1}{2}[\sigma(\pi^+p)+\sigma(\pi^-p)+\sigma(k^0p)+\sigma(\bar{k}^0p)] \qquad (14)$$

в сочетании со сверхсходящимися д.п.с. вида

$$\int_0^\infty \nu\,\mathrm{Im}\left[D^{(+)}(\nu)-\frac{1}{2}C^{(+)}(\nu)-\frac{1}{2}E^{(+)}(\nu)\right]=0 \qquad (15)$$

дает следующую формулу:

$$m_p\left(\frac{g^2_{\pi NN}}{4\pi}\right)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\mu_\pi}{m_p}\right)^4-2\pi^2\left(\frac{g^2_{p\Sigma k}}{4\pi}\right)\left(\frac{M^2_\Sigma}{2m_p}+m_p-m_\Sigma\right)\frac{M^2_\Sigma}{2m_p}-$$

$$-4\pi^2\left(\frac{g^2_{p\Lambda k}}{4\pi}\right)\left(\frac{M^2_\Lambda}{2m_p}+m_p-m_\Lambda\right)\frac{M^2_\Lambda}{2m_p}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mu_\pi}^{\Lambda}\nu\sqrt{\nu^2-\mu^2_\pi}\,[\sigma(\pi^-p)+\sigma(\pi^+p)]\,d\nu+ \tag{16}$$

$$+\int_{\mu_k}^{\Lambda}\nu\sqrt{\nu^2-\mu^2_k}\,[\frac{1}{2}\sigma(k^0p)+\frac{1}{2}\sigma(\bar{k}^0p)-\sigma(k^+p)-\sigma(k^-p)]\,d\nu+$$

$$+\int_{\omega_{\Lambda k}}^{\mu_k}\nu\,[\,\mathrm{Im}\,E^{(+)}(\nu)-2\,\mathrm{Im}\,D^{(+)}(\nu)\,]\,d\nu=0\,.$$

Важно подчеркнуть, что все полученные нами соотношения (8), (12), (16) допускают сопоставление с экспериментом. При этом необходимо использовать лишь данные о поведении сечений при не слишком высоких энергиях.

В том случае, когда сверхсходящиеся д.п.с. написать нельзя, можно попытаться применить для наших целей правила сумм, найденные в работе /3/:

$$\int_0^{\Lambda}\mathrm{Im}\,f^{(-)}(\nu)\,d\nu=\sum C_i^{(-)}\frac{\Lambda^{\alpha_i^{(-)}+1}}{\alpha_i^{(-)}+1}\,, \tag{17}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\,\nu f^{(-)}(\nu)\,d\nu=-\sum C_i^{(+)}\frac{\Lambda^{\alpha_i^{(+)}+2}}{\alpha_i^{(+)}+2}\,, \tag{18}$$

где $\alpha_i^{(\pm)}$ -реджевские траектории при нулевой передаче импульса, а $C_i^{(\pm)}$ - известные в теории полюсов Редже множители.

При выводе соотношений (17)-(18) в /3/ предполагалось, что существуют сверхсходящиеся д.п.с. для функций вида

$$f^{(-)}(\nu)-\sum C_i^{(-)}\frac{\nu^{\alpha_i^{(-)}}-(-\nu)^{\alpha_i^{(-)}}}{\sin\pi\alpha_i^{(-)}}\,,$$

$$\nu f^{(+)}(\nu)-\sum C_i^{(+)}\frac{\nu^{\alpha_i^{(+)}}+(-\nu)^{\alpha_i^{(+)}}}{\sin\pi\alpha_i^{(+)}}\cdot\nu\,. \tag{19}$$

Мы опишем здесь способ рассуждений, несколько отличающийся от изложенного в [3], но приводящий к тем же равенствам (17)-(18).

Для простоты ограничимся рассмотрением только кросс-нечетной амплитуды $f^{(-)}(\nu)$. Поскольку теперь $f^{(-)}(\nu)$ не убывает на бесконечности, интеграл $\oint_\Gamma f^{(-)}(\nu)d\nu = 0$ (см. примечание на стр. 2 и рисунок имеет смысл только при конечных значениях радиуса R. Положим $R = A$, где A - параметр, фигурирующий в (17)-(18) и определяющий область, в которой уже справедливо реджевское асимптотическое представление:

$$f^{(-)} \approx \sum C_i^{(-)} \frac{\nu^{a_i^{(-)}} - (-\nu)^{a_i^{(-)}}}{\sin \pi a_i^{(-)}} \tag{20}$$

при $\nu \geq A$.

Очевидно, при $R = A$ равенство $\oint_\Gamma f^{(-)}(\nu)d\nu = 0$ можно переписать в виде:

$$\int_{C_A} f^{(-)}(\nu)d\nu + 4i\int_0^A \operatorname{Im} f^{(-)}(\nu)d\nu = 0 . \tag{21}$$

Сделаем теперь предположение, что $f^{(-)}(\nu)$ может быть аппроксимирована выражением (20) во всей комплексной плоскости ν при $|\nu| \geq A$. Эта гипотеза основана, во-первых, на аналогии с нерелятивистской теорией, где асимптотика Редже непосредственно связана с формулой

$$P_a(z) \approx z^a ,$$

$$|z| \to \infty ,$$

справедливой во всей комплексной плоскости z (за исключением области $|\arg z| = \pi$), а во-вторых, на изучении аналитических свойств диаграмм фейнмановских, суммирование которых приводит к амплитудам с реджевским поведением в теории поля [8].

Так как функция $f^{(-)}(\nu)$ действительна на некотором участке вещественной оси, то, согласно принципу симметрии Шварца, в комплексной области она должна удовлетворять условию

$$f^{(-)}(\nu^*) = (f^{(-)}(\nu))^* . \tag{22}$$

Это соотношение необходимо учитывать при подстановке (20) в интеграл $\int_{C_A} f^{(-)}(\nu)\,d\nu$ из (21). Фактически здесь целесообразно рассматривать функции $\Psi_1 = \sum C_i^{(-)} \nu^{a_i^{(-)}}$ и

$$\Psi_2 = -\sum C_i^{(-)} (-\nu)^{a_i^{(-)}} = -\sum C_i^{(-)} e^{-i\pi a_i^{(-)}} \nu^{a_i^{(-)}}$$

по отдельности ($f^{(-)} = \Psi_1 + \Psi_2$).

Условие (22) будет выполнено, если для функции $\Psi_1(\nu)$ разрез в плоскости ν провести от 0 до $-\infty$ $(-\pi \leq \arg\nu \leq \pi)$, а для $\Psi_2(\nu)$ – соответственно от 0 до $+\infty$ $(0 \leq \arg\nu \leq 2\pi)$. В итоге будем иметь:

$$\int_{R_A} f^{(-)}(\nu)d\nu = iA\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(Ae^{i\phi})e^{i\phi}\,d\phi + iA\int_{0}^{2\pi} \Psi_2(Ae^{i\phi})e^{i\phi}\,d\phi, \tag{23}$$

откуда, учитывая (21), придем к соотношению (17).

Если выписать д.п.с. (17) для амплитуды $C^{(-)}(\nu) - D^{(-)}(\nu) + E^{(-)}(\nu)$ и принять во внимание соотношения, установленные в [10]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,C^{(-)}(\nu) &= 4 r_\rho \nu^{a_\rho}, \\ \mathrm{Im}\,D^{(-)}(\nu) &= 2 r_\rho \nu^{a_\rho} + 6 r_{v_8} \nu^{a_{v_8}}, \\ \mathrm{Im}\,E^{(-)}(\nu) &= -2 r_\rho \nu^{a_\rho} + 6 r_{v_8} \nu^{a_{v_8}}. \end{aligned} \tag{24}$$

(r_ρ и r_{v_8} –реджевские факторы, отвечающие обмену "третьей" и "восьмой" компонентами октета векторных мезонов и простым образом связанные с $C_i^{(\pm)}$), то в результате мы опять придем к формуле (8).

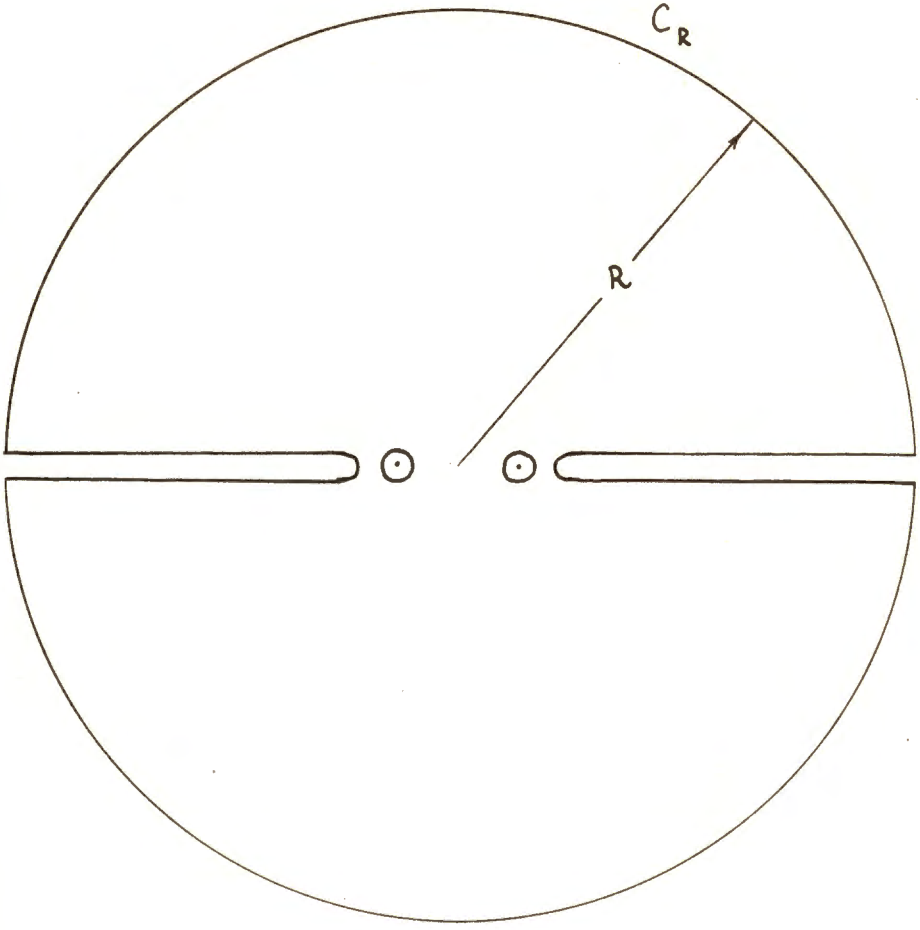
Следовательно, оба класса д.п.с. могут быть использованы для отображения асимптотических соотношений между сечениями в низкоэнергетическую область.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А.Логунову и Л.Д. Соловьеву, за интерес к работе и обсуждения и В.А.Мещерякову и И.Т. Тодорову, В.И. Журавлеву, Р.М. Мурадяну, Нгуену Ван Хьеу за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Л.Д. Соловьев. ЯФ, 3, 188 (1966); И.Г. Азнаурян, Л.Д. Соловьев. ЯФ, 4, 615 (1966).
2. В.А. Матвеев, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. Phys. Lett. 23, 146 (1966).
   В.А. Матвеев. Препринт ОИЯИ, Р-2879 (1966);
   В.Г. Писаренко. Препринт ОИЯИ, Е2-2931 (1966);
   V. de Alfaro S. Fubini, G. Rosetti, G. Furlah. Phys. Lett., 21, 576 (1966).
3. А.А. Логунов, Л.Д. Соловьев, А.Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ, Е2-3077, Дубна, 1967.
4. В.И. Журавлев, К.В. Рерих. Препринт ОИЯИ, Р2-3081, Дубна, 1967.
5. K. Johnson and S. B. Treiman. Phys. Rev. Lett., 14, 189 (1965).
6. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low and Y. Nambu. Phys. Rev., 106, 1337 (1957);
   P. T. Matthews and A. Salam. Phys. Rev., 110, 565 (1958).
7. M. Lusignoli, M. Restignoli, G. Violini, G. A. Snow. Nuovo Cimento, XLV, 792 (1966).
8. H. J. Lipkin and F. Scheck. Phys. Rev. Letters, 16, 71 (1966).
9. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустов. Phys. Rev. Lett., 2, 150 (1962).
10. N. Cabibbo, L. Horwitz, Y. Neeman. Phys. Lett., 22, 336 (1966).
    A. Ahmad Zadeh Phys. Rev. Lett., 16, 952 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1967 г.


C_R
R