ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-3162

Г.И. Копылов

СПЕКТР ЭФФЕКТИВНЫХ МАСС В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КАСКАДАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1967.

Копылов Г.И. P2-3162

Спектр эффективных масс в произвольных каскадах

Формулируется рецепт, позволяющий выражать в квадратурах распределение по эффективной массе любых групп частиц, рожденных в произвольном каскаде.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1967.

Kopylov G.I. P2-3162

Effective Mass Spectrum in Arbitrary Cascades

A recipe is formulated which allows to express in quadratures the distribution on effective mass of any groups of particles produced in an arbitrary cascade.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1967.

Р2-3162

Г.И. Копылов

СПЕКТР ЭФФЕКТИВНЫХ МАСС В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КАСКАДАХ

Известно, что элементарные частицы предпочитают рождаться путем последовательных распадов резонансов. Расчет спектров эффективных масс в таких системах затруднителен. Пространство состояний при каскаде распадов представляет собою более или менее узкий "коридор" фазового пространства; форма и извилистость этого коридора могут прихотливо меняться от реакции к реакции.

Численный метод расчета спектра эффективиых масс в каскадах предоставляет выдвинутая автором методика случайных звезд /1/, реализованная в Дубне в виде программы ФОРС /2/. В настоящей работе мы даем аналитический метод расчета, приложимый к сколь угодно сложным каскадам. Он возник в итоге обобщения расчетов /3-5/, предпринятых для объяснения пика в спектре эффективных масс пар $\Lambda^0\gamma$ /6/. Мы формулируем рецепт, позволяющий интеграл состояний произвольного каскада, в котором встречаются только распады на две частицы, представлять в виде кратного интеграла по эффективным массам (§ 1). Этот интеграл позволяет получать спектр интересующих нас эффективных масс либо аналитически - путем перемены порядка интегрирования - либо с помощью численного алгоритма, пригодного для счетной машины. Здесь вводится также понятие многомерной фигуры Далица и показано, что для произвольного каскада с фиксированными массами возникающих в нем частиц такая диаграмма существует.

В § 2 каскады усложняются: формулируются правила для расчета спектра масс пар в произвольных каскадах, где встречаются распады на произвольное число частиц (а не только на пары). В § 3 правило обобщается на расчет спектра масс троек и четверок частиц. В § 4 приведены два примера конкретных расчетов, основная же масса подобных примеров была включена в работу /4/.

§ 1. Каскады распадов на две частицы

Мы будем рассматривать в статье каскады последовательных распадов произвольного вида. Три подобных каскада изображены на рис. 1 (а,б,в). Для общности мы не уточняем названия распадающихся частиц, а нумеруем их подряд, начиная с первичной частицы.

Нас интересует спектр квадратов эффективных масс: например, частиц 2 и 8 в каскаде (а), частиц 9 и c в каскаде (б), частиц 13 и 18 в каскаде (в). Задачей нашей будет дать рецепт, позволяющий при взгляде на произвольный сколь угодно сложный каскад написать кратный интеграл, из которого спектр эффективной массы выводится либо численно, либо с помощью квадратур. Задача будет решена в следующих предположениях:

1) верна гипотеза фазового объема, иными словами, принимаются в расчет только ограничения, вытекающие из законов сохранения энергии и импульса (не учитывается динамика взаимодействия); в частности,

2) все распады в каскаде изотропны;

3) массы всех частиц, входящих в каскад, известны и фиксированы; кроме того, временно в этом параграфе считается, что

4) интересуемся только спектром пар частиц;

5) все входящие в каскад частицы распадаются не более чем на две частицы.

В дальнейшем мы избавимся последовательно от ограничений 5(§2), 4(§3) и 3(§3). От ограничений 2 и 1 в несложных каскадах тоже удается порою избавиться.

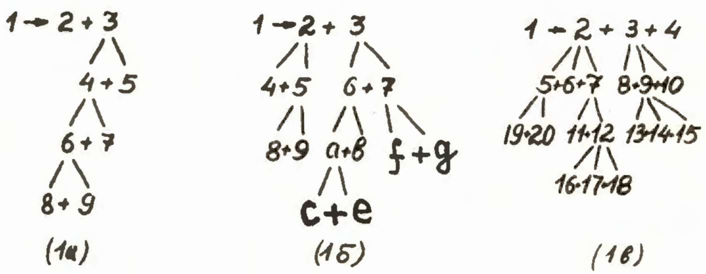


Рис. 1

В этих предположениях приступим к решению. Сначала разберем подробно более простой вопрос, от понимания которого зависит решение общей задачи.

З а д а ч а. Фиксированы 4-импульсы p_0, p_1 и массы m_0, m_1 двух частиц, 0 и 1. Частица 1 распадается на частицы 2 и 3 с массами m_2 и m_3. Найти спектр m_{02}^2.

Р е ш е н и е. Напишем интеграл состояний для распада $1 \to 2 + 3$:

$$S = \int d^4p_2\,\delta(p_2^2 - m_2^2)\,d^4p_3\,\delta(p_3^2 - m_3^2)\,\delta^4(p_2 + p_3 - p_1). \qquad (1)$$

Проинтегрируем по p_3:

$$S = \int d^4p_2\,\delta(p_2^2 - m_2^2)\,\delta[(p_1 - p_2)^2 - m_3^2].$$

Введем вместо p_2 новую переменную p_{02}, используя фиксированный импульс p_0:

$$p_{02} = p_0 + p_2 \qquad (2)$$

Тогда

$$S = \int d^4p_{02}\,\delta((p_{02} - p_0)^2 - m_2^2)\,\delta((p_0 + p_1 - p_{02})^2 - m_3^2).$$

Вычислим интеграл в системе, где $\vec{p}_0 + \vec{p}_1 = 0$. В этой системе импульс $\vec{p}_0$ принимает определенное значение, так что ω_0 и $\vec{p}_0$ известны;

$$S = \int d^4p_{02}\,\delta(m_{02}^2 + m_0^2 - m_2^2 - 2\omega_{02}\omega_0 + 2|\vec{p}_{02}||\vec{p}_0|\eta_{02,0}) \times$$
$$\times\ \delta(m_{01}^2 + m_{02}^2 - m_3^2 + 2m_{01}\omega_{02}). \qquad (3)$$

Отсчитывая $\vec{p}_{02}$ от $\vec{p}_0$, запишем d^4p_{02} в виде

$$d^4p_{02} = \tfrac{1}{2}\,dm_{02}^2 \cdot |\vec{p}_{02}|\,d\omega_{02} \cdot d\eta_{02,0}\,d\phi_{02,0}. \qquad (4)$$

Интегрирование даст

$$S = \int \frac{\pi/2}{2m_{01}|\vec{p}_0|}\,dm_{02}^2. \qquad (5)$$

Пределы интегрирования здесь определятся как крайние значения $(p_0 + p_2)^2$ при фиксированных $(p_0 + p_2 + p_3)^2 = m_{01}^2$ и $(p_2 + p_3)^2 = m_1^2$. Эти величины обозначаются $F^{\pm}(0,2,3,1,01)$. Аргументы у $F^{\pm}$ пишутся по кругу против ча-

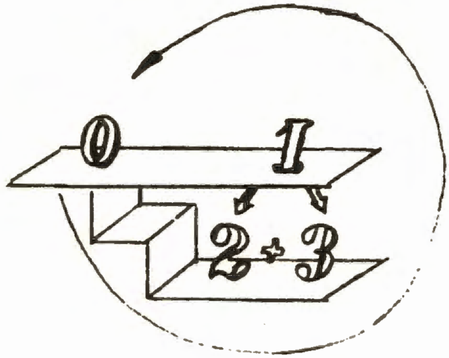


Рис. 2

совой стрелки (рис. 2). На этом рисунке в верхней части всегда помещаются исходные частицы, слева - нераспадающаяся, справа - распадающаяся. В нижней части помещаются продукты распада, слева - та частица 2, которая входит в пару 02. Мы имеем

$$F^{-}(0,2,3,1,01) \le m_{02}^2 \le F^{+}(0,2,3,1,01), \tag{6}$$

где

$$F^{\pm} \equiv m_{01}^2 + m_3^2 + 2\omega_{01}\omega_3 \pm 2p_{01}p_3, \tag{7}$$

$$\omega_{01} = \frac{m_{01}^2 + m_1^2 - m_0^2}{2m_1}, \quad \omega_3 = \frac{m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_1}, \quad p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - m_1^2}. \tag{8}$$

Далее, в системе покоя 01 имеем $|\vec{p}_0| = |\vec{p}_1|$, так что можно писать и $2m_{01}|\vec{p}_0|$, и $2m_{01}|\vec{p}_0|$. В дальнейшем знак $|\ |$ мы писать не будем

$$2m_{01}p_0 = 2m_{01}p_1 = \sqrt{m_{01}^2-(m_0+m_1)^2}\sqrt{m_{01}^2-(m_0-m_1)^2}\,. \qquad (9)$$

В итоге

$$S = \int_{F^-}^{F^+} \frac{\pi/2}{2m_{01}p_0}\, dm_{02}^2\,. \qquad (10)$$

Сформулируем результат в виде леммы.

Л е м м а

Если частица 0 имеет импульс p_0, а частица 1 с импульсом p_1 распадается на частицы 2 и 3, то спектр m_{02}^2 — П-образный в пределах F^-, F^+ с плотностью

$$\frac{dN}{dm_{02}^2} = \frac{\pi/2}{2m_{01}p_0} = \frac{\pi/2}{2m_{01}p_1} = \frac{\pi/2}{\sqrt{m_{01}^2-(m_0+m_1)^2}\sqrt{m_{01}^2-(m_0-m_1)^2}}\,. \qquad (11)$$

Усложним теперь задачу. Пусть нас интересует спектр m_{56}^2 в каскаде

$$1 \to \underset{4\swarrow\searrow 5}{2} + \underset{6\swarrow\searrow 7}{3}\,. \qquad (12)$$

Интеграл состояний здесь

$$S = \int \prod_4^7 d^4p_i\, \delta(p_i^2 - m_i^2)\,\delta^4\Big(\sum_4^7 p_i - p_1\Big)\delta((p_4+p_5)^2 - m_2^2)\delta((p_6+p_7)^2 - m_3^2)\,.$$

Он после умножения на

$$1 \equiv \int d^4p_2\,\delta^4(p_4+p_5-p_2)\,d^4p_3\,\delta^4(p_6+p_7-p_3)$$

обращается в

$$S = \int d^4 p_2\, \delta(p_2^2 - m_2^2)\, d^4 p_3\, \delta(p_3^2 - m_3^2)\, \delta^4(p_2 + p_3 - p_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int d^4 p_4\, \delta(p_4^2 - m_4^2)\, d^4 p_5\, \delta(p_5^2 - m_5^2)\, \delta^4(p_4 + p_5 - p_2) \rightarrow \tag{13}$$

$$\rightarrow \int d^4 p_6\, \delta(p_6^2 - m_6^2)\, d^4 p_7\, \delta(p_7^2 - m_7^2)\, \delta^4(p_6 + p_7 - p_3).$$

Имея в виду найти спектр m^2_{56}, выделим мысленно в каскаде следующую часть:

$$\begin{array}{ccc} 5 & + & 3 \\ & & \swarrow\;\searrow \\ & & 6\quad 7 \end{array} \tag{14}$$

Если импульсы p_5 и p_3 фиксированы, мы находимся в условиях Л е м м ы и имеем право написать вместо последнего интеграла

$$\int \frac{\pi/2}{2 m_{53}\, p_3}\, dm^2_{56}$$

в пределах

$$F^{\pm}(5, 6, 7, 3, 53).$$

В интеграл и пределы вошла масса m_{53}, являющаяся в нашем каскаде переменной величиной. Чтобы узнать, с каким весом и в каких пределах ее следует брать, изобразим оставшуюся часть каскада так:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \rightarrow & 3 & + & 2 \\ & & & & \swarrow\;\searrow \\ & & & & 5\quad 4 \end{array} \tag{15}$$

Теперь будем считать фиксированными p_2 и p_3. Опять Л е м м а позволяет свести предпоследний интеграл в (13) к виду

$$\int \frac{\pi/2}{2 m_{23}\, p_3}\, dm^2_{53}\,, \quad m^2_{53} \in F^{\pm}(3, 5, 4, 2, 23).$$

Масса m_{23} в нашем каскаде постоянна $(m_{23} = m_1)$. Остается только проинтегрировать по всем направлениям $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ (взять в (13) самый первый интеграл), получая $\pi p_2/m_{23}$. Окончательно имеем:

$$S = \frac{\pi p_2}{m_{23}} \int \frac{\pi/2}{2 m_{23} p_3} \, dm^2_{53} \int \frac{\pi/2}{2 m_{53} \, p_3} \, dm^2_{56} . \qquad (16)$$

Чтобы отсюда найти спектр m^2_{56}, надо переменить порядок интегрирования и т.д. (этим вопросам посвящена работа [4]). Мы не будем здесь заниматься дальнейшими процедурами, нашей целью будет дать общее правило: как писать интегралы типа (16) по схемам типа (12).

Переходя ко все более и более сложным каскадам, мы постепенно выясним общее правило. Сформулируем его на примере каскада рис. 1б. Пусть нас в нем интересует спектр m^2_{9c}.

1) Надо мысленно разбить каскад на последовательность подкаскадов, к которым применима **Лемма**, т.е. на последовательность пар частиц, первая из которых в данном подкаскаде считается стабильной, а вторая распадается на две (рис. 3). В последнем таком подкаскаде должны находиться частицы, которые нас интересуют (9 и c в нашем случае).

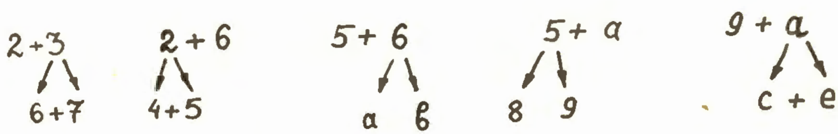


Рис. 3

На распады, не ведущие к интересующим нас частицам, можно не обращать внимания (например, на распад $7 \to f + g$ на рис. 1б).

3) Каждый такой подкаскад дает одно интегрирование в кратном интеграле. Самый первый распад $1 \to 2 + 3$ дает множитель $\pi p_2/m_1$. Все ос-

тальные - по интегралу типа

$$\int \frac{\pi/2}{2m_{ik}\, p_i}\, dm_{i\ell}^2 \quad ,$$

где в знаменателе стоит

$$2m_{ik}\, p_i = 2m_{ik}\, p_k = \sqrt{[m_{ik}^2 - (m_i + m_k)^2][m_{ik}^2 - (m_i - m_k)^2]} -$$

форма, связанная с массой "первого этажа" подкаскада, а дифференциал берется от квадрата массы "лестницы в подвал" подкаскада (или, что то же, массы первого этажа следующего подкаскада). В итоге в нашем случае имеем

$$S = \frac{\pi p_2}{m_{23}} \int \frac{\pi/2}{2m_{23}p_2}\, dm_{26}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{26}p_6}\, dm_{56}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{56}\, p_5}\, dm_{5a}^2 \to$$

$$\to \int \frac{\pi/2}{2m_{5a}\, p_5}\, dm_{9a}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{9a}\, p_9}\, dm_{9c}^2 \quad . \tag{17}$$

3) Пределы изменения квадрата массы "лестницы в подвал" есть $F^{\pm}$-функция (19) от аргументов, идущих против часовой стрелки (при условии, что лестница спускается слева направо). Например, в нашем случае пределы суть

$$\begin{aligned}
m_{26}^2 &: \quad F^{\pm}(2,6,7,3,23)\ , \\
m_{56}^2 &: \quad F^{\pm}(6,5,4,2,26)\ , \\
m_{5a}^2 &: \quad F^{\pm}(5,a,b,6,56)\ , \\
m_{9a}^2 &: \quad F^{\pm}(a,9,8,5,5a)\ , \\
m_{9c}^2 &: \quad F^{\pm}(9,c,e,a,9a).
\end{aligned} \tag{18}$$

Напомним, что функция $F^{\pm}$ есть сумма : 1) квадрата эффективной массы первого этажа; 2) квадрата массы остающейся частицы (не входящей в "лестницу"); 3) удвоенного скалярного произведения 4-импульсов пары, стоящей на первом этаже, и оставшейся частицы (взятых в системе покоя распавшейся частицы). В первом подкаскаде (см. рис. 3)

$$F^{\pm}(2,6,7,3,32) = m_{23}^2 + m_7^2 + 2\omega_{23}\omega_7 \pm 2p_{23}p_7 ,$$
$$\omega_3 = \frac{m_{23}^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_3}, \quad \omega_7 = \frac{m_3^2 + m_7^2 - m_6^2}{2m_3}, \quad p_i^2 = \omega_i^2 - m_i^2 . \tag{19}$$

З а м е ч а н и е

Конечно, интеграл (17) – не единственный, из которого можно определить спектр m_{9c}^2. Если, например, разбить каскад рис. 1б на подкаскады

$$\begin{array}{c} 2 + 3 \\ \swarrow\searrow \\ 6\quad 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 + 6 \\ \swarrow\searrow \\ a\quad b \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 + a \\ \swarrow\searrow \\ c\quad e \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 + c \\ \swarrow\searrow \\ 4\quad 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 + c \\ \swarrow\searrow \\ 8\quad 9 \end{array} ,$$

то будем иметь

$$S = \frac{\pi p_2}{m_{23}} \int \frac{\pi/2}{2m_{23}p_2}\, dm_{26}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{26}p_2}\, dm_{2a}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{2a}p_2}\, dm_{2c}^2 \to \tag{20}$$
$$\to \int \frac{\pi/2}{2m_{2c}p_2}\, dm_{5c}^2 \int \frac{\pi/2}{2m_{5c}p_c}\, dm_{9c}^2$$

с пределами

$$m_{26}^2 : F^{\pm}(2,6,7,3,23); \quad m_{2a}^2 : F^{\pm}(2,a,b,6,26); \quad m_{2c}^2 : F^{\pm}(2,c,e,a,2a);$$

$$m_{5c}^2 : F^{\pm}(c,5,4,2,2c); \qquad m_{9c}^2 : F^{\pm}(c,9,8,5,5c).$$

4) В полученных таким образом кратных интегралах всегда можно знаменатели интеграндов сдвинуть на шаг влево, т.е. записать, например, (16), (17) в виде

$$S = \frac{(\pi/2)^3}{m_1^2} \int \frac{dm_{58}^2}{2m_{58}p_8} \int dm_{56}^2 , \qquad (16')$$

$$S = \frac{(\pi/2)^6}{m_1^2} \int \frac{dm_{26}^2}{2m_{26}p_5} \int \frac{dm_{56}^2}{2m_{56}p_5} \int \frac{dm_{5a}^2}{2m_{5a}p_5} \int \frac{dm_{9a}^2}{2m_{9a}p_9} \int dm_{9c}^2 , \qquad (17')$$

и вообще в случае, когда для получения спектра $m_{\ell_s}^2$ нужно каскад разбить на n подкаскадов, имеем

$$S = \frac{(\pi/2)^{n+1}}{m_1^2} \int \ldots \int \frac{dm_{ik}^2}{\sqrt{m_{ik}^2-(m_i+m_k)^2}\ \sqrt{m_{ik}^2-(m_i-m_k)^2}} \int \ldots \int dm_{\ell_s}^2 . \qquad (21)$$

Многомерные аналоги пространства Далица.

Если ввести функцию ϕ_{ik} с помощью

$$m_{ik}^2 = m_i^2 + m_k^2 + 2m_i m_k \operatorname{ch}\phi_{ik} \qquad (22)$$

для всех интегралов, кроме последнего, то подинтегральная функция в (21) обратится в константу

$$S = \frac{(\pi/2)^{n+1}}{m} \int \ldots \int d\phi_{ik} \int \ldots \int dm_{\ell_s}^2 . \qquad (23)$$

В переменных ϕ_{ik}, m_{ℓ_s} фазовое пространство станет однородным, т.е. станет обладать тем свойством, которым обладает обычная двумерная диаграмма: сгущения точек на ней означают проявление динамических закономерностей в распаде. Мы получаем, таким образом, обобщение диаграммы Далица на системы многих частиц – лишь бы эти частицы рождались посредством цепочки двухчастичных распадов.

Правда, большой наглядности от многомерных аналогов фигуры Далица ожидать нельзя. Но для каскадов, кончающихся рождением четырех частиц, сохраняется и наглядность : диаграмма получается двумерной /5/ .

Дальнейшие преобразования. Вычислительный алгоритм

Чтобы из интегралов типа (16),(17),(20) находить распределение по последней переменной интегрирования, надо уметь менять порядок интегрирования и расставлять пределы. Это, в общем, нетрудно: функция $F^{\pm}$ как функция последнего аргумента есть гипербола (иногда – пара пересекающихся прямых), так что область интегрирования всегда имеет вид, подобный изображенному на рис. 4. В каждом конкретном случае задача решается аналитически: спектр $m^2_{\ell s}$ всегда выражается в квадратурах. Можно было бы сформулировать и общий рецепт. Но формулировка эта будет лишена той лаконичности, которая бы оправдывала усилия на ее усвоение, легче на ряде примеров понять общие

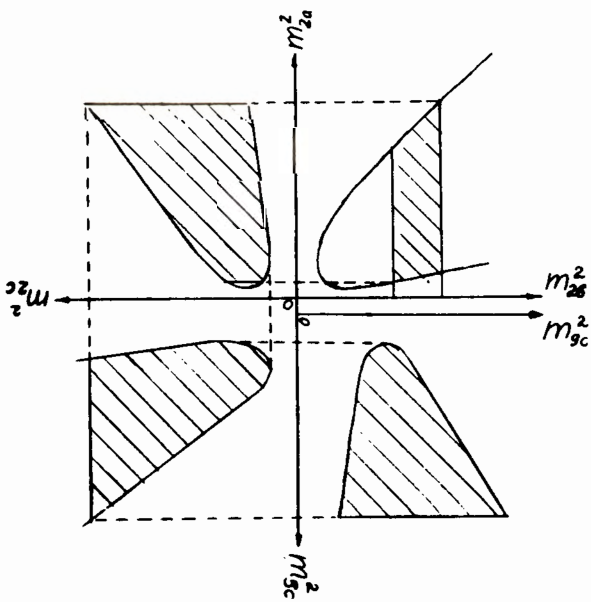


Рис. 4

идеи и пользоваться ими в каждом конкретном случае. Множество таких случаев было разобрано в работе /4/, к которой мы и отсылаем интересующегося.

Вместо аналитических способов мы обратимся сейчас к численным и покажем, что из интегралов типа (21) спектр $m^2_{\ell s}$ легко может быть вычислен на счетной машине.

Пусть нам из формулы (17) предстоит найти спектр m^2_{9c}. Хотя формулы типа (17'), (21) с виду и сложны, у них есть приятная особенность: каждый последующий интеграл в них есть функция только одной переменной: $\int dm^2_{9c}$ есть функция только m^2_{9a}, $\int dm^2_{9a}/2m_{9a}p_9$ – функция только m^2_{5a} и т.д. Возьмем интервалы изменения каждой переменной интегрирования "с запасом" – так, чтобы истинные пределы $F^{\pm}$ оказались бы заведомо внутри их. С запасом будут, например, следующие пределы (см.рис. 1б и 3):

$$
\begin{aligned}
& m_2 + m_6 \le m_{26} \le m_1 - m_7 , \\
& m_5 + m_6 \le m_{56} \le m_1 - m_7 - m_4 , \\
& m_5 + m_a \le m_{5a} \le m_1 - m_7 - m_4 - m_b , \\
& m_9 + m_a \le m_{9a} \le m_1 - m_7 - m_4 - m_b - m_8 .
\end{aligned} \tag{24}
$$

Для дискретной совокупности m^2_{9a} в этих пределах вычислим спектр m^2_{9c} как функцию m^2_{9a} (это П-образные кривые). Затем для каждого m^2_{5a}, взятого из дискретной совокупности значений в пределах (24), вычислим пределы изменения m^2_{9a}, и таблички m^2_{9c} для m^2_{9a}, взятых внутри этих пределов, просуммируем с весом $(2m_{9a}p_9)^{-1}$. В итоге получится для каждого m^2_{5a} своя табличка $m^2_{9c}(m^2_{5a})$ – спектр m^2_{9c}, отвечающий этому m^2_{5a}. Таблички $m^2_{9c}(m^2_{9a})$ уже больше не понадобятся, их можно вычеркнуть из памяти машины. Дальше процедура повторится: с каждым новым шагом будут возникать новые таблички: $m^2_{9c}(m^2_{56})$, $m^2_{9c}(m^2_{26})$ и, наконец, $m^2_{9c}(m^2_1)$, что и даст искомый спектр. Ясно, что эта процедура легко алгоритмизируется и удобна для счета на ЭВМ. По трудоемкости он совпадает с вычислением n двукратных интегралов.

§ 2. Спектры пар в произвольных каскадах

Теперь можно от каскадов, в которые входят только распады на две частицы, перейти к каскадам, в которых могут происходить многочастичные распады. Мы увидим, что такие каскады легко можно свести к каскадам § 1, если включить в интегралы добавочные факторы.

Начнем со следующего примера. Пусть нас интересует спектр $\overset{35}{\pi\pi}$ из распада $\underset{1}{X} \to \underset{2}{\pi}\,\underset{3}{\pi}\,\overset{4}{\eta} \hookrightarrow \overset{5}{\pi}\,\overset{6}{\pi}\,\overset{7}{\pi}$. Интеграл состояний здесь

$$S = \int \prod_2^4 d^4 p_i\, \delta(p_i^2 - m_i^2)\, \delta^4 (\sum_2^4 p_i - p_1) \int \prod_5^7 d^4 p_i\, \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4 (\sum_5^7 p_i - p_4) \tag{25}$$

после умножения на

$$1 \equiv \int dm_{34}^2\, \delta(p_{34}^2 - m_{34}^2)\, d^4 p_{34} \delta^4 (p_3 + p_4 - p_{34})\, dm_{67}^2 \delta(p_{67}^2 - m_{67}^2)\, d^4 p_{67} \delta(p_6 + p_7 - p_{67})$$

можно представить так:

$$\begin{aligned} S = \int dm_{34}^2 \int d^4 p_{34} \delta(p_{34}^2 - m_{34}^2)\, d^4 p_2\, \delta(p_2^2 - m_2^2)\, \delta^4 (p_{34} + p_2 - p_1) \to \\ \to \int d^4 p_4\, \delta(p_4^2 - m_4^2)\, d^4 p_3\, \delta(p_3^2 - m_3^2)\, \delta^4 (p_4 + p_3 - p_{34}) \to \\ \to \int dm_{67}^2 \int d^4 p_6\, \delta(p_6^2 - m_6^2)\, d^4 p_7 \delta(p_7^2 - m_7^2)\, \delta^4 (p_6 + p_7 - p_{67}) \to \\ \to \int d^4 p_5\, \delta(p_5^2 - m_5^2)\, d^4 p_{67} \delta(p_{67}^2 - m_{67}^2)\, \delta^4 (p_5 + p_{67} - p_4) . \end{aligned} \tag{26}$$

Интеграл в каждой строчке этого равенства дает фазовый объем системы двух частиц. Например, первый интеграл равен

$$S_2(1, 2, 3\ 4) = \pi p_2 / m_1 ,$$

второй есть $S_2(34, 3, 4)$, третий – $S_2(67, 6, 7)$, четвертый мы не будем брать до конца, но заменой $p_5 + p_3 \to p_5$ обратим его в $\int \frac{\pi/2}{2 m_{34} p_3}\, dm_{35}^2$. В итоге

$$S = \int dm_{34}^2 S_2(1,2,34) S_2(34,3,4) \int dm_{67}^2 S_2(67,6,7) \int \frac{\pi/2}{2m_{34}p_3} dm_{35}^2 = \tag{27}$$

$$= \frac{\pi^4}{4m_1} \int dm_{34}^2 \frac{p_2}{m_{34}^2} \int dm_{67}^2 \frac{p_6}{m_{67}} \int dm_{35}^2$$

в пределах

$$(m_3 + m_4)^2 \le m_{34}^2 \le (m_1 - m_2)^2 \quad ,$$

$$(m_6 + m_7)^2 \le m_{67}^2 \le (m_4 - m_5)^2 \, , \tag{28}$$

$$m_{35}^2 \sim F^{\pm}(3,5,67,4,34) \, .$$

Проследим по схеме каскада, как шел расчет. Это поможет нам понять общее правило. Уравнение (26) означает, что наш каскад (а) мы представили в виде цепочки двухчастичных распадов (б). Если обозначить стоящие в (26) дифференциальные выражения типа

$$d^4 p_i \, \delta(p_i^2 - m_i^2) d^4 p_j \, \delta(p_j^2 - m_j^2) \delta^4(p_i + p_j - p_{ij}) \tag{29}$$

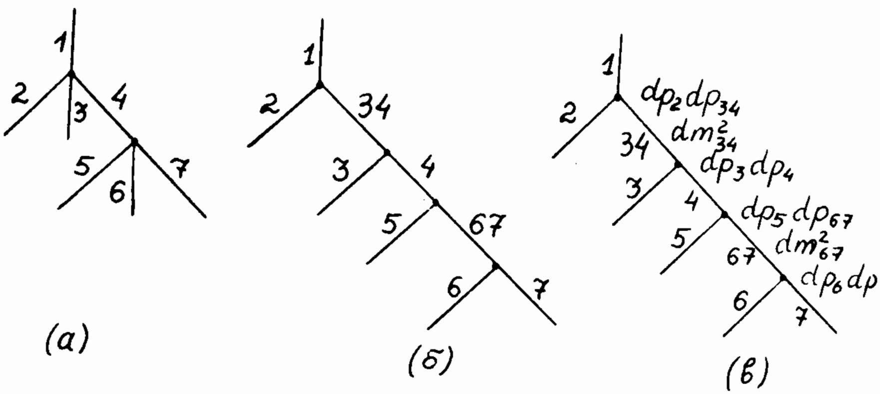
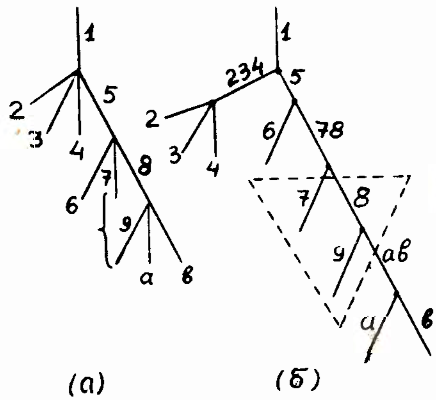
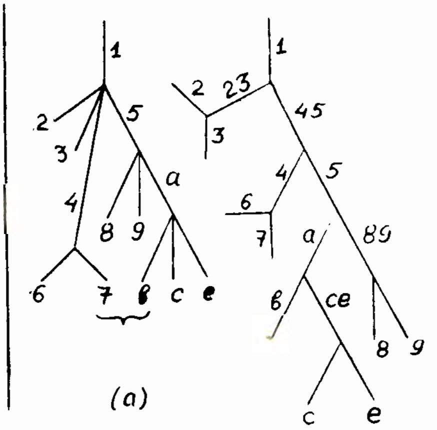


Рис. 5

сокращенно в виде $dp_i\, dp_j$, то, чтобы из схемы (б) получить (26), надо против каждого узла поставить $dp_i\, dp_j$ с индексами, отвечающими выходящим (идущим вниз) из узла линиям (часть (в) рисунка 5). Кроме того, против линий с двойным индексом rs надо поставить dm^2_{rs} . Затем мы интегрировали по всем дифференциалам в узлах $1 \to 2 + 34$, $67 \to 6 + 7$ потому, что стоящие в этих узлах импульсы не имели касательства к интересующей нас массе m^2_{53} ; вместо $dp_i\, dp_j$ в этих узлах стало S_2 от соответствующих аргументов. В узле $4 \to 5 + 67$ мы применили лемму, недоинтегрировав в нем по m^2_{35} ; вместо $dp_5\, dp_{67}$ в этом узле стало $\frac{\pi/2}{2m_{34}p_3}\, dm^2_{35}$. А тогда в узле $34 \to 3 + 4$ мы смогли проинтегрировать по всем направлениям p_3 и p_4 , что дало возможность заменить $dp_3\, dp_4$ на $S_2(34, 3, 4)$. Осталось только расставить дифференциалы в таком порядке, чтобы пределы интегрирования и подинтегральные выражения определялись однозначно.



Р и с. 6



Р и с. 7

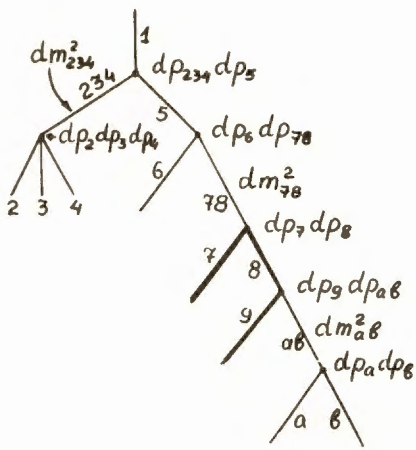
Становится ясно, как поступать в более сложных случаях. Попробуем сформулировать общий рецепт.

1) Если в каскаде произвольной сложности нас интересует спектр масс пары частиц, надо первым долгом представить его в виде цепочки распадов на две частицы. Например, каскад рис.6а представить в виде 6б, а каскад 7а – в виде 7б. Следует обратить внимание на то, что характер разбиения на двухчастичные распады определяется тем, спектр какой пары нас в конце концов интересует (на рис. 6 – пары 79, на рис. 7 – пары 7в). Так, в первом каскаде (рис. 6) мы разбили распад 5 → 6+7+8 на 5 → 6+(7+8), а не на 5 → (6+7)+8, потому что хотели, чтобы получилась ситуация, отмеченная на рис.6 треугольником, – это позволило применить лемму предыдущего параграфа.

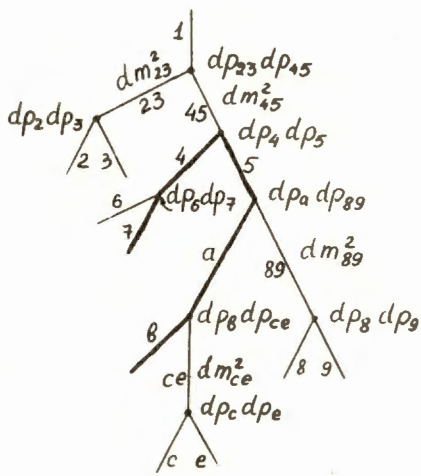
2) Каждой линии с переменной массой ik, т.е. с двойным индексом, составленным из индексов масс двух частиц, i и k, ставится в соответствие дифференциал dm^2_{ik}. Он будет стоять в интеграле п е р е д факторами, зависящими от m^2_{ik}.

3) Каждому узлу ставится в соответствие дифференциальная форма (29), обозначаемая $dp_i\, dp_j$, где i и j –индексы частиц, в ы х о д я щ и х из узла (рис. 6в, 7в).

4) Выделяются на схеме линии, отвечающие частицам k, ℓ, чей спектр нас интересует, и линии, соединяющие эти линии (рис. 6в, 7в).



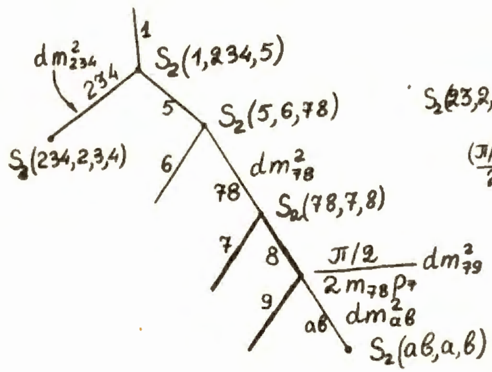
Р и с. 6(в)



Р и с. 7(в)

5) В узлах, в которых имеется больше одной нежирной линии, можно формы $dp_i\, dp_j$ заменить на $S_2(ij, i, j)$, формы $dp_i\, dp_j\, dp_k$ – на формы $S_3(ijk, i, j, k)$. Кроме того, в самом верхнем из узлов, образованных жирными линиями, тоже ставится S_2 (рис. 6г, 7г).

6) В остальных узлах ставятся вместо $dp_i\, dp_j$ формы $\frac{\pi/2}{2 m_{k\ell} p_k}\, dm_{k s}$ по правилам, сформулированным в предыдущем параграфе для каскадов, идущих через двухчастичные распады (рис. 6г, 7г).



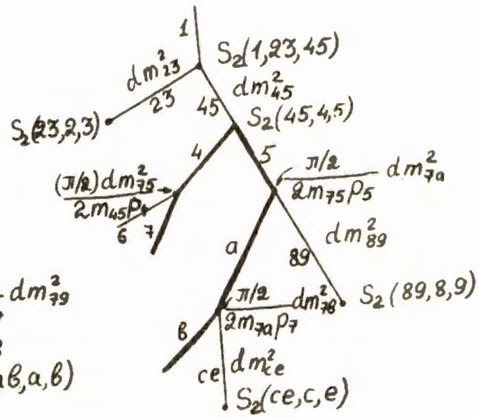


Рис. 6г. и 7г. В тех конечных распадных узлах, где поставлено S_2 или S_3, сами распады уже не показаны.

В итоге первый каскад (рис. 6а) представится интегралом

$$S = \int dm^2_{234}\, S_3(234, 2, 3, 4)\, S_2(1, 234, 5) \int dm^2_{78}\, S_2(5, 6, 78)\, \times$$

$$\times\, S_2(78, 7, 8) \int dm^2_{ab}\, S_2(ab, a, b) \int \frac{\pi/2}{2 m_{78} p_7}\, dm^2_{79} = \tag{30}$$

$$= \int dm^2_{234}\, S_3(234, 2, 3, 4)\, \frac{\pi p_5}{m_1} \int dm^2_{78}\, \frac{\pi^3 p_6}{4 m_5\, m^2_{78}} \int dm^2_{ab}\, \frac{\pi p_a}{m_{ab}} \int dm^2_{79}\, ,$$

в пределах

$$m_2 + m_3 + m_4 \le m_{234} \le m_1 - m_5 \ ,$$

$$m_7 + m_8 \le m_{78} \le m_5 - m_6 \ , \qquad (31)$$

$$m_a + m_b \le m_{ab} \le m_8 - m_9 \ ,$$

$$m^2_{79} \in F^{\pm}(7,9,ab,8,78).$$

Импульсы p_5 , p_6 частиц 5, 6 и т.д., стоящие в интеграле, вычисляются в системе покоя тех частиц, которые их родили (по схеме 6б), например,

$$p_9 = \frac{\sqrt{m_8^2 - (m_9 - m_{ab})^2}\sqrt{m_8^2 - (m_9 + m_{ab})^2}}{2m_8} \ .$$

Второй каскад (рис. 7а) представится интегралом

$$S = \int dm^2_{23} \int dm^2_{45}\, S_2(23,2,3)\, S_2(45,4,5)\, S_2(1,23,45) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{\pi/2}{2m_{45}\, p_4}\, dm^2_{75} \int dm^2_{89}\, S_2(89,8,9) \int \frac{\pi/2}{2m_{75}\, p_5}\, dm^2_{7a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int dm^2_{ce}\, S_2(ce,c,e) \int \frac{\pi/2}{2m_{7a}\, p_7}\, dm^2_{7b} \ .$$

После очевидных преобразований имеем

$$S = \frac{\pi^8}{16 m_1} \int dm^2_{23}\, dm^2_{45} \frac{p_2}{m_{23}} \frac{p_{23}}{m^2_{45}} \int \frac{dm^2_{75}}{2m_{75} p_5} \int dm^2_{89} \frac{p_8}{m_{89}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{dm^2_{7a}}{2m_{7a} p_7} \int dm^2_{ce} \frac{p_c}{m_{ce}} \int dm^2_{7b} \ . \qquad (32)$$

Пределы

$$m_2 + m_3 \le m_{23} \le m_1 - m_4 - m_5 \ ,$$

$$m_4 + m_5 \le m_{45} \le m_1 - m_{23} \ ,$$

$$m^2_{75} \in F^{\pm}(5,7,6,4,45) \ ,$$

$$m_8 + m_9 \le m_{89} \le m_5 - m_a \quad ,$$

$$m^2_{7a} \in F^{\pm}(7, a, 89, 5, 75),$$

$$m_c + m_e \le m_{ce} \le m_a - m_b \ , \qquad (33)$$

$$m^2_{7b} \in F^{\pm}(7, b, ce, a, 7a).$$

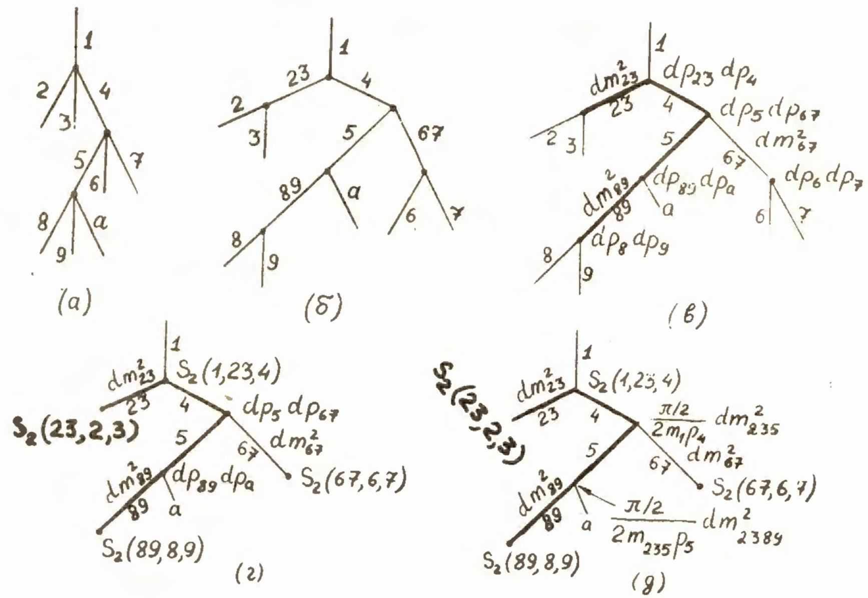
Мы умышленно разобрали столь сложные каскады, чтобы убедиться, что наши правила сработают и здесь. Каскады, встречающиеся на практике, много проще; с помощью наших рецептов для них легко получаются в квадратурах спектры любых пар частиц.

8. Спектры групп из n частиц ($n>2$)

Теперь уже легко разобрать самый общий случай, когда в каскаде произвольной сложности надо определить спектр группы из n частиц, из числа которых n_1 возникает в одной ветви каскада, n_2 – в другой ($n_1 + n_2 = n$). Впрочем, и это не самый общий случай: может оказаться, что группа n частиц "набрана" из трех и более ветвей каскада ($n_1 + n_2 + n_3 = n$). С такими задачами мы не умеем справляться аналитически, здесь пока остается только моделировать каскад. Спектр же масс группы частиц, взятых только из д в у х ветвей каскада, выражается в квадратурах всегда, по скольку бы частиц из этих двух ветвей ни брать.

Правила обращения с каскадами здесь те же, что и в предыдущем параграфе. Мы еще раз повторим их в применении к достаточно сложному каскаду.

Пусть в каскаде (рис. 8а) нас интересует спектр $m^2_{23,89}$. Действуем в следующем порядке: 1) делаем каскад двухчастичным (б); 2) ставим в каждом узле дифференциальную форму $dp_i\, dp_j$ (в); жирными линиями отмечаем последовательность распадов, соединяющих интересующую нас группу 23,89; 3) в узлах, где сходится больше одной нежирной линии, проводим интегрирование до конца, то есть заменяем $dp_i\, dp_j$ на S_2 ; то же делаем в самом верхнем узле, из которого выходят две жирные линии (г); 4) в остальных узлах применяем лемму, то есть вместо $dp_i\, dp_j$ ставим $\frac{\pi/2}{2m_{ik}\, p_i}\, dm^2_{ij}$.



Р и с. 8

В итоге получаем

$$S = \int dm^2_{23}\, S_2(1,23,4)\, S_2(23,2,3) \int dm^2_{67}\, S_2(67,6,7) \to$$

$$\to \int \frac{\pi/2}{2m_1\, p_4}\, dm^2_{23,5} \int dm^2_{89}\, S_2(89,8,9) \int \frac{\pi/2}{2m_{23,5}\, p_5}\, dm^2_{23\,89} \qquad (34)$$

или после преобразований:

$$S = \frac{\pi^5}{4m_1^2} \int dm^2_{23} \frac{p_2}{m_{23}} \int dm^2_{67} \frac{p_6}{m_{67}} \int \frac{dm^2_{23,5}}{2m_{23,5}\, p_5} \int dm^2_{89} \frac{p_8}{m_{89}} \int dm^2_{23\,89} \qquad (35)$$

в пределах

$$
\begin{aligned}
& m_2 + m_3 \le m_{23} \le m_1 - m_4 \;, \\
& m_6 + m_7 \le m_{67} \le m_4 - m_5 \;, \\
& m^2_{23,5} \in F^{\pm}(23,5,67,4,1), \\
& m_8 + m_9 \le m_{89} \le m_5 - m_a \;, \\
& m^2_{23\,89} \in F^{\pm}(23,89,a,5;23\,5).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

До сих пор мы всюду считали массы возникающих в каскаде частиц фиксированными. Ничто не мешает, однако, учесть размазанность масс короткоживущих резонансов: если масса некоторой частицы i, входящей в каскад, размазана по известному закону $\Gamma(m_i^2)$, то надо ввести интеграл $\int \Gamma(m_i^2)\,dm_i^2$ перед теми интегралами, куда входит m_i^2.

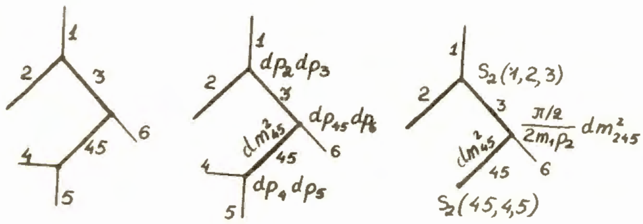
§ 4. Примеры

Может показаться, что интегралы, возникающие в каскадах с трехчастичными распадами (§2) и при расчете спектров масс более чем двух частиц (§3), чересчур сложны. Действительно, в отличие от каскадов §1, состоящих из двухчастичных распадов, здесь не удается дать общий, пригодный для любых каскадов, алгоритм счета на ЭВМ. Однако в практически важных случаях всегда можно дать аналитическое решение. Вот два примера.

1. Пусть в распаде $\underset{1}{X} \to \underset{2}{\Lambda}\overset{3}{\eta}$, $\eta \to \overset{4}{\pi}\overset{5}{\pi}\overset{6}{\pi}$ нас интересует, каков будет спектр $m^2_{\Lambda\pi\pi}$ в предположении, что диаграмма Далица η-мезона заселена равномерно. Следуя правилам §2, чертим последовательность диаграмм (рис. 9) и пишем

$$
S = S_2(1,2,3)\int dm^2_{45}\, S_2(45,4,5)\int \frac{\pi/2}{2m_1 P_2}\, dm^2_{245} =
$$

$$
= \frac{\pi^3}{4m_1^2}\int dm^2_{45}\,\frac{P_4}{m_{45}}\int dm^2_{245}\,.
$$



Р и с. 9

в пределах

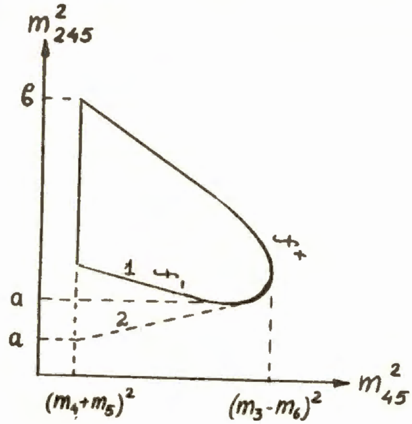
$$m_4 + m_5 \le m_{45} \le m_3 - m_6 ,$$

$$m^2_{245} \in F^{\pm}(2, 45, 6, 3, 1) \equiv m^2_1 + m^2_6 + 2\omega_1\omega_6 \pm 2p_1 p_6 , \tag{38}$$

где

$$\omega_1 = \frac{m^2_1 + m^2_3 - m^2_2}{2m_3} , \quad \omega_6 = \frac{m^2_3 + m^2_6 - m^2_{45}}{2m_3} .$$

Область интегрирования, в зависимости от соотношения масс, ограничена на рис. 10 либо линией 1, либо линией 2. Спектр $m^2_{\Lambda\pi\pi}$ получится после перемены порядка интегрирования



Р и с. 10

$$S = \frac{\pi^3}{8m_1^2}\int_a^b dm_{245}^2 \int_{\max[(m_4+m_5)^2,\, f^-]}^{f^+} dm_{\pi\pi}^2 \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_{\pi\pi}^2}} \ .$$

Чтобы найти $f^{\pm}$, надо найти экстремум $(p_4+p_5)^2$ при заданных

$$(p_4+p_5+p_6)^2 = m_3^2, \ (p_2+p_3)^2 = m_1^2, \ (p_2+p_4+p_5)^2 = m_{245}^2$$

$$f^{\pm} = m_3^2 + m_6^2 - 2\omega_3\omega_6 \pm 2p_3p_6, \ \omega_3 = \frac{m_1^2+m_3^2-m_2^2}{2m_1}, \ \omega_6 = \frac{m_1^2+m_6^2-m_{245}^2}{2m_1} \ .$$

Интеграл здесь берется, он равен

$$\phi(m_{\pi\pi}^2) = m_{\pi\pi}\sqrt{m_{\pi\pi}^2-4m_\pi^2} - 4m_\pi^2 \ln \frac{m_{\pi\pi} + \sqrt{m_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2}}{2m_\pi} \ .$$

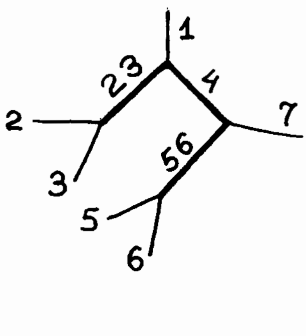
Окончательно имеем: спектр (ненормированный) $m_{\Lambda\pi\pi}^2$ заключен в пределах

$$a \le m_{\Lambda\pi\pi}^2 \le b$$

и внутри них равен

$$\frac{dN}{dm_{\Lambda\pi\pi}^2} = \Phi(f^+) - \Phi(\max[f^-, 4m_\pi^2]) . \qquad (39)$$

2. Другой пример: в возможном распаде $\underset{1}{K^0} \to \underset{2}{\pi^+}\underset{3}{\pi^-}\underset{4}{\pi^0}$, $\pi^0 \to \underset{5}{e^+}\underset{6}{e^-}\underset{7}{\gamma}$ узнать спектр масс $\pi^+\pi^-e^+e^-$. Диаграмма распада здесь такова



Значит, интеграл состояний равен

$$S = \int dm^2_{23}\, S_2(23,2,3) S_2(1,23,4) \int dm^2_{56}\, S_2(56,5,6) \int \frac{\pi/2}{2m_1 p_4}\, dm^2_{2356} =$$

$$= \int dm^2_{23} \cdot \frac{\pi p_2}{m_{23}} \frac{\pi p_4}{m_1} \int dm^2_{56} \frac{\pi p_5}{m_{56}} \int \frac{\pi/2}{2m_1 p_4}\, dm^2_{2356} = \tag{40}$$

$$= \frac{\pi^4}{4m^2_K} \int dm^2_{\pi\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2_\pi}{m^2_{\pi\pi}}} \int dm^2_{ee} \sqrt{1 - \frac{4m^2_e}{m}} \int dm^2_{\pi\pi ee}$$

в пределах

$$2m_\pi \le m_{\pi\pi} \le m_K - m_{\pi^0},$$

$$2m_e \le m_{ee} \le m_{\pi^0}, \tag{41}$$

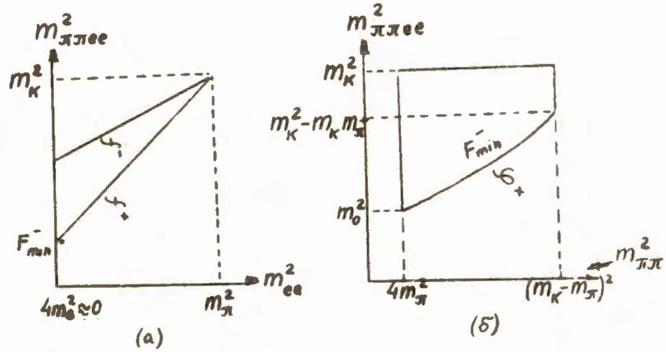
$$m^2_{\pi\pi ee} \in F^{\pm}(23, 56, 7, 4, 1) = m^2_K - 2(\omega_K \mp p_K)\omega_\gamma ,$$

где

$$\omega_K = \frac{m^2_K + m^2_{\pi^0} - m^2_{\pi\pi}}{2m_{\pi^0}}, \quad \omega_\gamma = \frac{m^2_{\pi^0} - m^2_{ee}}{2m_{\pi^0}} .$$

Чтобы отсюда найти спектр $m^2_{\pi\pi ee}$, надо для каждой пары $m^2_{\pi\pi}$, m^2_{ee} вычислить спектр $m^2_{\pi\pi ee}$ и сложить эти спектры с весами $(1 - 4m^2_\pi/m^2_{\pi\pi})^{1/2}(1 - 4m^2_e/m^2_{ee})^{1/2}$

Можно даже учесть тот факт, что пара e^+e^- рождается из виртуального γ - кванта, внося в матричный элемент полюсной член m^{-4}_{ee}. От этого члена в веса войдет добавочный фактор m^{-4}_{ee} Но можно спектр $m^2_{\pi\pi ee}$ вычислить и аналитически. Зависимость $F^{\pm}$ от m^2_{ee} при постоянном $m^2_{\pi\pi}$ есть прямая линия (рис. 11,а). Переставим местами интегрирование по $m^2_{\pi\pi ee}$ и по m^2_{ee}



Р и с. 11

$$S = \frac{\pi^4}{4m_K^2} \int dm^2_{\pi\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m^2_{\pi\pi}}} \int\limits_{F^-_{min}}^{m_K^2} dm^2_{\pi\pi ee} \int\limits_{\max[(2m_e)^2, f^-]}^{f^+} dm^2_{ee} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m^2_{ee}}} ,$$

где F^-_{min} получается из (41) при $\omega_\gamma = m_\pi/2$, а

$$f^{\pm} = m_\pi^2 - m_\pi \frac{m_K^2 - m^2_{\pi\pi ee}}{\omega_K \pm p_K}$$

Область интегрирования по $m^2_{\pi\pi}$, $m^2_{\pi\pi ee}$ имеет вид, как на рис. 11 б. Теперь снова меняем порядок интегрирования:

$$S = \frac{\pi^4}{4m_K^2} \int\limits_{m_0^2}^{m_K^2} dm^2_{\pi\pi ee} \int\limits_{(2m_\pi)^2}^{\min[\phi^+, (m_K - m_\pi)^2]} dm^2_{\pi\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m^2_{\pi\pi}}} \int\limits_{\max(4m_e^2, f^-)}^{f^+} dm^2_{ee} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m^2_{ee}}} , \qquad (42)$$

где

$$m_0^2 = F^-(m^2_{\pi\pi} = 4m_\pi^2 , m^2_{ee} = 4m_e^2) ,$$

а ϕ^+ – решение уравнения

$$m_K^2 - 2(\omega_K + p_K)\frac{m_\pi}{2} = m^2_{\pi\pi ee}$$

относительно $m^2_{\pi\pi}$, а именно:

$$\phi^+ = m^2_{\pi\pi ee} + m_\pi^2 - \frac{m_K^2 m_\pi^2}{m_K^2 - m^2_{\pi\pi ee}} .$$

Двойной интеграл, стоящий в (42) вслед за $dm^2_{\pi\pi ee}$, даст спектр эффективных масс $m^2_{\pi\pi ee}$. Он изображен на рис. 12 .

§ 5. Заключение

Рецепты, приведенные в этой работе, позволяют единообразным путем приступать к расчету спектров эффективных масс в весьма сложных каскадах. С их помощью, кроме вычисления фона резонансов, можно решать и другую, более простую задачу: вычисление пределов, которые ограничивают в таком-то каскаде массу такой-то группы частиц (для получения ответа достаточно вычислить пределы интегрирования в наших интегралах). Поэтому мы не останавливались на ней особо, хотя именно она должна в первую очередь решаться, когда судят о возможном влиянии одного интеграла на другой. Каким бы сложным ни был каскад, расчет последовательности функций $F^\pm$, введенных нами, ответит на вопрос о границах изменения эффективной массы той или иной группы частиц.

Литература

1. Г.И. Копылов, ЖЭТФ, 35, 1426 (1958); 39 1091 (1960).
2. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р-2027, Дубна, 1965.
3. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 46, 2063 (1964).
4. Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р1-3048, Дубна, 1966.

5. Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р1-3049, Дубна, 1966.

6. Ван Юн-Чан, Ким Хи Ин, Е.Н. Кладницкая, Г.И. Копылов, А.А.Кузнецов, Н.Н. Мельникова, Нгуен Дин Ты, Е.С. Соколова. Препринт ОИЯИ, Р-1615, Дубна, 1964; Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964 г., т.1,стр.615.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1967 г.

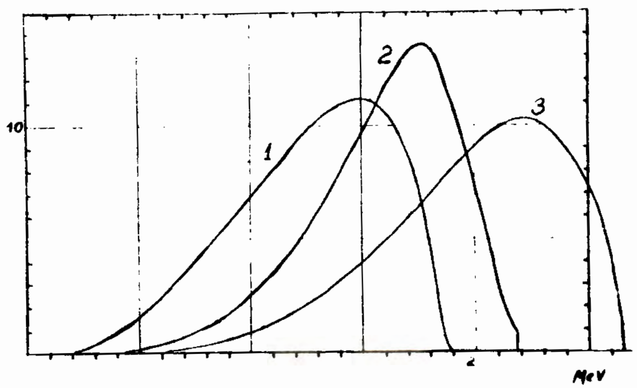


Рис. 12. Спектры эффективных масс (отсчитываемые от суммы масс покоя):
1) $\pi^+\pi^-e^+e^-$ в распаде $K \to \pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^0 \to e^+e^-\gamma$; 2) то же с учетом полюсного члена;
3) $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ в распаде $X \to \pi^+\pi^-\eta$, $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$.
Рассчитаны по формулам типа (40). Нормированы на 1.