ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3115

П.Н. Боголюбов

О МОДЕЛИ КВАЗИНЕЗАВИСИМЫХ КВАРКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

4811/1 пр.

P2 - 3115

П.Н. Боголюбов

О МОДЕЛИ КВАЗИНЕЗАВИСИМЫХ КВАРКОВ

§ 1.

В этой работе мы будем рассматривать один из наиболее упрощенных вариантов кварковой модели барионов, до известной степени сходной с оболочечной моделью атомного ядра. Вместо того, чтобы рассматривать задачу о связанных состояниях системы трех кварков, находящихся в интенсивном взаимодействии друг с другом, мы как и в оболочечной модели ядра будем считать возможным рассматривать кварки в барионе как независимые частицы, движущиеся в некотором "усредненном" или самосогласованном поле.

В такой схеме имеет смысл не только волновая функция всей системы трех кварков, но и индивидуальные, одночастичные волновые функции каждого кварка. Эти одночастичные волновые функции описываются обычным уравнением Дирака для частицы, находящейся в некотором данном поле. Таким образом, здесь кварки, входящие в состав бариона, занимают одночастичные энергетические уровни, как это имеет место и в оболочечной модели для отдельных нуклонов, образующих атомное ядро.

Необходимо, конечно, подчеркнуть и существенные отличия от оболочечной модели атомного ядра. Так как в ядре энергия взаимодействия составляющих его нуклонов мала по сравнению с их собственной энергией, обусловленный взаимодействием нуклонов дефект массы мал по сравнению с массой ядра. В случае же рассматриваемой кварковой модели барионов мы считаем массу одного кварка много большей массы бариона и дефект массы будет практически равен сумме масс всех трех кварков (в свободном состоянии).

Далее, число кварков (три) вряд ли достаточно для того, чтобы имело полный смысл само понятие "усредненного поля". Еще большее существенное отличие вызывается тем обстоятельством, что в рассматриваемой модели барионов для получения правильных результатов надо отказаться для кварков от принципа Паули и считать, что до трех кварков с одинаковым спином можно поместить на одном энергетическом уровне, т.е. нам потребуется, чтобы волновая функция системы трех кварков, образующих барион, была бы не антисимметричной, а симметричной функцией кварковых переменных: $\xi_k \equiv (\vec{x}_k, A_k, j_k)$; $k = 1,2,3$.

Здесь $\vec{x}$ – пространственные переменные, A – унитарные, j – спиновые индексы.

Эту фундаментальную трудность можно обойти рядом способов. Укажем здесь, например, на следующие две возможности.

1. Существует не один триплет кварков, а три триплета:

$$(p^{\alpha}, n^{\alpha}, \lambda^{\alpha}); \quad \alpha = 1,2,3$$

и рассматриваемые барионы состоят только из кварков, принадлежащих к различным триплетам. Благодаря этому противоречие с принципом Паули не возникает, и вполне допустимо считать кварки фермионами. Действительно, "одинаковые кварки" с одинаковыми индексами (A, j), лежащие на одном энергетическом уровне, в данной схеме будут различными, отличаясь между собой новым квантовым числом – номером триплета α. Этот дополнительный индекс α позволяет нам также рассматривать волновые функции $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, симметричные по отношению к ξ_1, ξ_2, ξ_3. В самом деле, взяв в качестве полной волновой функции выражение вида:

$$\epsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

в котором ϵ – антисимметричный тензор, получим функцию, антисимметричную по отношению к перестановкам полных систем переменных:

$$(\alpha_k, \xi_k) \equiv (\alpha_k, \vec{x}_k, A_k, j_k); \quad k = 1, 2, 3.$$

На такой подход к кварковым моделям было впервые указано в работе Н.Н. Боголюбова, Б.В. Струминского, А.Н. Тавхелидзе "К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц" /1/.

2. Существует только один триплет кварков (p, n, λ) и они являются парафермионами третьего порядка. Эта возможность впервые была показана О. Гринбергом /2/.

С математической точки зрения обе эти схемы имеют много общего, так как квантовая амплитуда рождения или уничтожения парафермиона третьего порядка представляется суперпозицией соответствующих амплитуд трех разичных фермионов. Таким образом, один триплет парафермионов возникает из суперпозиции трех фермионных триплетов.

Заканчивая общее обсуждение принятой модели барионов, подчеркнем, что в настоящее время кварковая модель является полностью гипотетической и ее ценность заключается пока только в тех результатах, которые можно получить с ее помощью.

Перейдем теперь к получению таких результатов, уделяя особое внимание определению магнитных моментов барионов и отношения аксиальной и векторной констант. Развивая идеи работ /3/ и /4/, будем считать, что усредненное поле характеризуется скалярным радиально-симметричным потенциалом $V(r)$ (где r – расстояние до "центра тяжести" бариона) и что низший энергетический уровень соответствует s -состоянию. Таким образом, для одного кварка в поле V мы будем иметь обычное уравнение Дирака:

$$\{\gamma_0 E + i(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) - M - V(r)\}\psi = 0. \tag{1.1}$$

Дираковские матрицы γ взяты здесь для метрики $(1, -1, -1, -1)$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

где I – единичная двумерная матрица, $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули.
В качестве γ_5 выберем самосопряженную матрицу:

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

В уравнении (1.1) M представляет массу кварка в свободном состоянии. Чтобы получить приближение SU_3, нам надо считать массы M всех трех кварков равными. Для обеспечения изотопической инвариантности достаточно равенства масс p и n.

Детали формы зависимости $V(r)$ от переменной r нас сейчас не интересуют, важно лишь, чтобы состояние с наименьшей энергией $E = E_0$ было связанным s – состоянием, т.е. чтобы оно характеризовалось нормируемой волновой функцией вида:

$$\psi = \psi_0(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi(r) & \chi \\ i\,g(r)(\vec{\sigma}\vec{r}) & \chi \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где χ – обычный двухкомпонентный спинор: $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$.

Подставив (1.2) в (1.1), получим уравнения для определения радиально-симметричных функций ϕ, g при данном V :

$$(E - U(r))\phi - (3g + r\frac{\partial g}{\partial r}) = 0$$

$$(E + U(r))g + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \tag{1.3}$$

где $U = M + V$. Рассмотрим орбитальный момент $\vec{L}$ и полный угловой момент кварка $\vec{I}$:

$$\vec{I} = \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{L}$$

$$L_x = i(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z});\ L_y = i(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x});\ L_z = i(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}).$$

Для полного углового момента найдем:

$$\vec{I}\begin{pmatrix} \phi(r) & \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma}\vec{r}) & \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(r) & \frac{\vec{\sigma}}{2}\chi \\ ig(r)(\vec{\sigma}\vec{r}) & \frac{\vec{\sigma}}{2}\chi \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\vec{I}^2\psi_0 = \begin{pmatrix} \phi(r) & (\frac{\vec{\sigma}}{2})^2\chi \\ ig(r)(\vec{\sigma}\cdot\vec{r}) & (\frac{\vec{\sigma}}{2})^2\chi \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\psi_0 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\psi_0. \tag{1.4}$$

Таким образом, в рассматриваемом s-состоянии, как и следовало ожидать, $I = \frac{1}{2}$. Из (1.2) видно, что L не имеет определенного значения, а именно, $L = 0$ для верхних компонент спинора ψ_0, и $L = 1$ для нижних компонент. Также и собственный спин кварка не имеет определенного значения. В случае, когда движение кварка близко к нерелятивистскому, нижние компоненты спинора ψ_0 будут малы и приближенно $L = 0$, $\vec{I} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$.

Исходя из (1.4), имеем

$$I_z\psi_0 = \begin{pmatrix} \phi(r) & \frac{\sigma_z}{2}\chi \\ ig(r)(\vec{\sigma}\vec{r}) & \frac{\sigma_z}{2}\chi \end{pmatrix}.$$

Поэтому, взяв в (1.2) $\chi = \chi\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\chi = \chi\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

мы получим волновые функции

$$\psi_0 = \psi\uparrow(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r}, 1)$$
$$\psi_0 = \psi\downarrow(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r}, 2),$$

являющиеся собственными функциями оператора I_z :

$$I_z \psi(\vec{r},1)=\frac{1}{2}\psi(\vec{r},1)$$

$$I_z \psi(\vec{r},2)=-\frac{1}{2}\psi(\vec{r},2).$$

В общем случае мы имеем суперпозицию этих состояний

$$\psi_0=\Phi(1)\psi(\vec{r},1)+\Phi(2)\psi(\vec{r},2),$$

где $\Phi(1)$, $\Phi(2)$– произвольные комплексные числа. Такая волновая функция соответствует спинору

$$\chi=\Phi(1)\chi_{\uparrow}+\Phi(2)\chi_{\downarrow}=\left|\begin{matrix}\Phi(1)\\ \Phi(2)\end{matrix}\right|.$$

Как видно, состояние данного кварка, находящегося на уровне E_0, может быть характеризовано дискретной волновой функцией $\Phi(j)$, а учитывая зависимость от унитарного индекса-функцией $\Phi(j,A)$.

На основании (1.4) преобразование

$$\psi_0\to 2I_\alpha\psi_0\ ;\quad \alpha=1,2,3$$

эквивалентно преобразованию $\chi\to\sigma_\alpha\chi$, которое можно представить в форме

$$\Phi(j,A)\to\sum_{j'=1}^{2}(\sigma_\alpha)_{j,j'}\Phi(j',A).$$

Поэтому компоненты вектора $2\vec{I}$ можно представить обычными спиновыми матрицами $\vec{\sigma}$, действующими на индекс j дискретной волновой функции Φ.

Рассмотрим теперь систему из трех кварков в состоянии с наименьшей энергией. Чтобы получить такое состояние в рассматриваемой схеме, необходимо поместить все три кварка на уровень E_0. Тогда масса соответствующего бариона будет

$$m_B=3E_0. \tag{1.5}$$

Состояние данной системы трех кварков, находящихся на уровне E_0, представляется суперпозицией всех допустимых состояний, в которых индексы j_1, j_2, j_3, задающие $I_z^{(1)}$, $I_z^{(2)}$, $I_z^{(3)}$ и унитарные индексы A_1, A_2, A_3 имеют определенные значения. Чтобы характеризовать такую суперпозицию, введем в рассмотрение дискретную волновую функцию

$$\Phi(j_1,A_1;j_2,A_2;j_3,A_3). \tag{1.6}$$

Пространственная часть волновой функции будет симметричной, поскольку все кварки находятся на одном и том же уровне и для них пространственные функции $\phi(r)$, $g(r)$ – одинаковые. А так как мы потребовали, чтобы полная волновая функция была симметрична по отношению к перестановкам между $\xi_\ell = (r_\ell, A_\ell, j_\ell)$; $\ell = 1,2,3$, то на функцию (1.6) мы должны наложить условие симметрии по отношению к комбинированным индексам: $a_\ell = (A_\ell, j_\ell)$ $\ell = 1, 2, 3$. Это условие симметрии заменяет в данной схеме подход, основанный на группе SU_6 , играя по существу ту же роль. Именно благодаря ему мы получаем здесь 56-плет барионов с обычной систематикой.

Например, волновая функция Φ , симметричная отдельно и по A_1 , A_2, A_3 и по j_1 , j_2 , j_3, характеризует декуплет резонансов с $I = \frac{3}{2}$, функция со смешанной симметрией соответствует октету барионов с $I = \frac{1}{2}$. Здесь мы пользуемся полным угловым моментом $\vec{I} = \sum_{\ell=1}^{3} \vec{I}^{(1)}_\ell$.

Вообще, для барионов данного семейства P, N,.. соответствующие выражения функции Φ имеют тот же вид, что и в подходе, основанном на группе SU_6. Дело в том, что все рассуждения группового подхода основаны в сущности только на упоминавшемся свойстве симметрии. Некоторое отличие рассматриваемой схемы состоит в том, что мы пользуемся угловыми моментами кварков, тогда как в обычном рассмотрении говорят только о спинах кварков. С другой стороны, в этой модели так же, как и в SU_6 теории, мы рассматриваем только статический случай – случай покоящихся барионов. Это ограничение было нами введено, по существу, уже при формулировке уравнения для кварка в барионе, в которое был введен радиально симметричный скалярный потенциал $V(r)$, зависящий от расстояния до центра тяжести r .

§ 2.

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитных моментов барионов. Для этого начнем с изучения реакции одного кварка, находящегося на минимальном энергетическом уровне E_0 , на внешнее магнитное поле и найдем возникающее при этом изменение энергии кварка.

Включим не зависящее от времени магнитное поле, характеризуемое вектор-потенциалом $\vec{A}(\vec{r})$, и дополним уравнение (1.1) соответствующими членами. Получим:

$$\{\gamma_0 E+\vec{\gamma}[i\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+eQ_A\vec{A}(\vec{r})]-U(r)\}\psi=0, \tag{2.1}$$

где eQ_A – электрический заряд кварка, $Q=\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$.
Считая $\vec{A}$ достаточно малым, найдем приращение δE, пропорциональное заряду кварка. Для этого удобно предварительно квадрировать это уравнение, написав:

$$(\mathfrak{L}+U)(\mathfrak{L}-U)\psi=0,$$

где

$$\mathfrak{L}=\gamma_0 E+\vec{\gamma}[i\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+eQ_A\vec{A}(\vec{r})].$$

Отсюда

$$\{\mathfrak{L}^2+U\mathfrak{L}-\mathfrak{L}U-U^2\}\psi=0. \tag{2.2}$$

При раскрытии выражения $\mathfrak{L}^2$ мы учитываем, кроме членов, не зависящих от $\vec{A}$, только члены первого порядка. В таком линейном приближении для $\mathfrak{L}^2$ получим:

$$\mathfrak{L}^2=E^2+\Delta+eQ_A i\sum_{\nu,\mu=1,2,3}\{\gamma_\nu\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\mu+\gamma_\mu\gamma_\nu A_\mu\frac{\partial}{\partial r_\nu}\}=$$

$$=E^2+\Delta+eQ_A i\sum_\nu(-\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\nu-A_\nu\frac{\partial}{\partial r_\nu})+$$

$$+eQ_A i\sum_{\mu\neq\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu(\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\mu-A_\mu\frac{\partial}{\partial r_\nu}).$$

Но

$$\gamma_\nu\gamma_\mu=\gamma_0\gamma_5\sigma_\nu\gamma_0\gamma_5\sigma_\mu=-\sigma_\nu\sigma_\mu=-i\sum_\lambda\epsilon_{\nu,\mu,\lambda}\sigma_\lambda$$

и

$$\sum_{\nu,\mu}\epsilon_{\nu,\mu,\lambda}\frac{\partial A_\mu}{\partial r_\nu}=H_\lambda,$$

где H_λ – компоненты вектора магнитного поля. Следовательно,

$$\mathfrak{L}^2=E^2+\Delta-eQ_A i\sum_\nu(\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\nu+A_\nu\frac{\partial}{\partial r_\nu})+eQ_A\vec{H}\vec{\sigma}.$$

Так как

$$U\mathfrak{L}-\mathfrak{L}U=-i\vec{\gamma}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}=-i(\vec{\gamma}\vec{r})\frac{U'(r)}{r},$$

то из (2.2) окончательно получим:

$$\{E^2+\Delta-U^2(r)-\frac{i(\vec{\gamma}\vec{r})}{r}U'(r)-eQ_A i\sum_\nu(\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\nu+A_\nu\frac{\partial}{\partial r_\nu})+eQ_A\vec{H}\vec{\sigma}\}\psi=0. \tag{2.3}$$

Для вычисления магнитных моментов рассмотрим частный случай однородного магнитного поля, направив его по оси z. Энергия кварка E_0, которая при отсутствии магнитного поля была одинакова для обеих независимых волновых функций: $\psi = \psi(\mathrm{r}, j)$ $j = 1, 2$, теперь будет различна. Включение рассматриваемого магнитного поля выделило в пространстве ось z. Поэтому из соображений симметрии ясно, что дискретными собственными функциями $\Phi(j)$ для δE будут $\Phi(j) = \delta(j-1)$, $\delta(j-2)$, то есть $\chi = \chi\uparrow, \chi\downarrow$ соответственно направлению углового момента по оси z и против этой оси. Приращения δE для них будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Для нахождения расщепления мы воспользуемся формулой теории возмущений первого порядка по параметру eQ_A. В рассматриваемом случае $H_z = H = \mathrm{Const}$ $H_x = H_y = 0$, можно взять вектор-потенциал в форме:

$$A_x = -\frac{Hy}{2}; \quad A_y = \frac{Hx}{2}; \quad A_z = 0.$$

Тогда

$$-i \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial r_\nu} A_\nu + A_\nu \frac{\partial}{\partial r_\nu} \right) + \vec{H}\vec{\sigma} =$$

$$= i H \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + H\sigma_z = H(L_z + \sigma_z) = H(2I_z - L_z)$$

и уравнение (2.3) принимает вид:

$$\left\{ E^2 + \Delta - U^2(r) - \frac{i(\vec{\gamma}\vec{r})}{r} U'(r) + eQ_A H(2I_z - L_z) \right\} \psi = 0. \tag{2.4}$$

Так как $i\gamma_\nu$; $\nu = 1, 2, 3$ являются самосопряженными матрицами, оператор

$$\Delta - U^2 - \frac{i(\vec{\gamma}\vec{r})}{r} U'$$

также будет самосопряженным. Поэтому в первом приближении

$$2E_0 \delta E = -eQ_A H \frac{\int \psi_0^* (2I_z - L_z) \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}}. \tag{2.5}$$

Но из (1.2) видно, что $L_z \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ g(r)(x\sigma_y - y\sigma_x)\chi \end{pmatrix}$

и

$$\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r} = -i \int |g(r)|^2 \chi^* (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)(x\sigma_y - y\sigma_x) \chi \, d\vec{r}.$$

Так как ввиду радиальной симметрии

$$\int |g(r)|^2 \; r_\alpha r_\beta d\vec{r} = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{3} \int |g(r)|^2 \, d\vec{r},$$

то

$$\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r} = \frac{1}{3} \int |g(r)|^2 r^2 d\vec{r} \chi^* (i\sigma_y \sigma_x - i\sigma_x \sigma_y)\chi = \frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 d\vec{r} \chi^* \sigma_z \chi .$$

Далее

$$\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r} = \int \{ |\phi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \; \chi^* \chi .$$

Так как I_z для волновой функции $\psi_0 = \psi(\vec{r}, j)$ можно рассматривать как обычное число $I = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j=1 \\ -\frac{1}{2}, & j=2 \end{cases}$

то $\dfrac{\chi_j^* \sigma_z \chi_j}{\chi_j^* \chi_j} = 2I_z$,

где

$$\chi_1 = \chi\uparrow , \chi_2 = \chi\downarrow$$

и поэтому

$$\frac{\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}} = 2 I_z \delta ,$$

где

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 d\vec{r}}{\int \{ |\phi(r)|^2 + r^2 |d(r)|^2 \} r^2 d\vec{r}} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^\infty r^4 |g(r)|^2 dr}{\int_0^\infty \{ |\phi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} r^2 dr} . \tag{2.6}$$

Как видно, δ равно среднему значению z -компоненты орбитального момента в состоянии, в котором $I_z = \frac{1}{2}$.

$$\delta = \langle L_z \rangle \uparrow . \tag{2.7}$$

Итак, из (2.5) получим:

$$\delta E = - \frac{eQ_A H}{2 E_0} 2 I_z (1 - \delta) . \tag{2.8}$$

Следовательно, магнитный момент кварка будет

$$\mu_A = \frac{eQ_A}{2E_0} (1 - \delta) . \tag{2.9}$$

Определим теперь магнитные моменты барионов. Для этого возьмем суммарное приращение энергии всех трех кварков:

$$\sum_{\ell=1}^{3} \delta E_\ell = -\frac{(1-\delta)\, eH}{2E_0} \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}. \tag{2.10}$$

Чтобы найти расщепление энергии для бариона, усредним выражение (2.10) по волновой функции $\Phi_B(a_1, a_2, a_3)$ данного бариона.

Рассмотрим барион из октета со спином $\frac{1}{2}$. Подчеркнем, что в рассматриваемой схеме спин бариона – это суммарный угловой момент кварков, составляющих барион:

$$\vec{S}_B = \sum_{\ell=1}^{3} I^{(\ell)}.$$

Тогда мы имеем две независимые функции $\Phi_B\uparrow, \Phi_B\downarrow$, соответствующие значениям $2s_z = 1, -1$. Но, очевидно,

$$\Phi_B^*\downarrow \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}\, \Phi_B\downarrow = -\Phi_B^*\uparrow \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}\, \Phi_B\uparrow,$$

и потому

$$\delta E_B = -\frac{(1-\delta)\, eH}{2E_0} (\Phi_B^*\uparrow \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}\, \Phi_B\uparrow)\, 2s_z.$$

Таким образом, магнитный момент бариона будет:

$$\mu_B = \frac{(1-\delta)\, e}{2E_0} (\Phi_B^*\uparrow \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}\, \Phi_B\uparrow).$$

Обычно принято эти магнитные моменты выражать в единицах боровского ядерного магнетона для протонной массы $\frac{e}{2m_p}$.

В таких единицах (при $\hbar = 1$, $c = 1$),

$$\mu_B = \frac{(1-\delta)\, m_p}{E_0} (\Phi_B^*\uparrow \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}\, \Phi_B\uparrow). \tag{2.11}$$

Рассмотрим еще случай модели, упоминавшейся в § 1, в которой имеются три триплета кварков. Обозначим $Q_{A,\alpha}$ заряд кварка с номером A из триплета с номером α. Тогда, очевидно, в (2.11) мы должны заменить

$$\sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell}\, 2I_z^{(\ell)} \to \sum_{\ell=1}^{3} Q_{A_\ell, \alpha_\ell}\, 2I_z^{(\ell)}.$$

Далее усреднение совершаем по волновой функции

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Phi_B\uparrow(a_1, a_2, a_3); \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} |\epsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}|^2 = 6.$$

Так как

$$\frac{1}{6}\sum_{(a_1,a_2,a_3)}|\epsilon_{a_1,a_2,a_3}|^2 Q_{A,a}=\frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}Q_{A,a},$$

то, если в этом случае взять

$$\frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}Q_{A,a}=Q_A=\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},$$

мы опять получим ту же самую формулу (2.11). Подробно такая модель была рассмотрена в работе /5/, где было указано на возможность выбора целых значений для $Q_{A,a}$.

Вернемся теперь к (2.11) и найдем, в частности, μ_p и μ_N, выполнив усреднение способом, аналогичным указанному Б.В. Струминским /6/. Для нуклонов

$$\Phi_p^{\uparrow}=\frac{\sqrt{2}p\uparrow p\uparrow n\downarrow-p\uparrow p\downarrow n\uparrow}{\sqrt{3}}$$ — Это не 56 плет

$$\Phi_N^{\uparrow}=\frac{n\uparrow n\downarrow p\uparrow-\sqrt{2}n\uparrow n\uparrow p\downarrow}{\sqrt{3}}.$$

В отличие от обычной схемы SU_6 здесь стрелка указывает на направление z-компоненты не спина кварка, а его полного углового момента. Так как

$$\sum_{\ell=1}^{3}Q_{A_\ell}2I_z^{(\ell)}\Phi_p^{\uparrow}=\frac{\sqrt{2}\,\frac{5}{3}\,p\uparrow p\uparrow n\downarrow+\frac{1}{3}\,p\uparrow p\downarrow n\uparrow}{\sqrt{3}},$$

из (2.11) получим:

$$\mu_p=\frac{(1-\delta)\,m_p}{E_0};$$

Совершенно аналогично

$$\mu_N=-\frac{2}{3}\,\frac{(1-\delta)\,m_p}{E_0}.$$

Из выражения (2.11), которое имеет полную формальную аналогию с известным результатом SU_6, нетрудно было бы вычислить магнитные моменты остальных барионов октета – они выразятся через μ_p обычными формулами. Однако, вероятно, при этом степень применимости полученных значений значительно ухудшится. Для нас было существенно, что самосогласованный потенциал является радиально симметричным. Такое допущение, если оно и пригодно для нуклонов, образованных p и n кварками с одинаковыми массами, по-видимому, плохо подходит для описания ситуации, при которой в барионе имеются нарушающие симметрию тяжелые λ-кварки.

Если ее все же попытаться описать с помощью такого потенциала V, то, вероятно, надо ввести в него значительные спин-орбитальные члены, которые разрушают радиальную симметрию.

§ 3.

По принятым теперь представлениям слабое взаимодействие адронов с лептонами в процессах, протекающих без изменения странности, характеризуется суммой векторного и аксиального токов:

$$I_\nu = I_\nu^V + I_\nu^A \quad ; \nu = 0,1,2,3,$$

входящих в изотопический триплет

$$I_{\nu,\rho}^V \; ; I_{\nu,\rho}^A \quad : \rho = 1,2,3$$

векторного и аксиального изотопических токов:

$$I_\nu^{V,A} = I_{\nu,1}^{V,A} + i I_{\nu,2}^{V,A} .$$

Векторный изотопический ток в приближении изотопической инвариантности сохраняется:

$$\operatorname{div} I_\rho^V = 0. \tag{3.1}$$

Рассмотрим матричные элементы этих адронных токов между двумя нуклонными состояниями. Используя лишь общие свойства ковариантности и закон сохранения (3.1), получают /7/:

$$< B' | I_{\nu,\rho}^{V,A}(x) | B > = e^{-i(qx)} \bar{u}_{B'} \mathcal{H}_\nu^{V,A} \frac{\tau_\rho}{2} u_B . \tag{3.2}$$

Здесь $q = p - p'$, где $p = (E, \vec{p})$ – четырехвектор энергии-импульса для состояния B, p' – для состояния B'

$$\mathcal{H}_\nu^V = F_V(q^2)\gamma_\nu + F_V^{(1)}(q^2)\frac{1}{2m}[\gamma_\nu, (\gamma q)]_- $$

$$\mathcal{H}_\nu^A = F_A(q^2)\gamma_\nu\gamma_5 + F_A^{(1)}(q^2)\frac{1}{2m}[\gamma_\nu, (\gamma q)]_- \gamma_5 + F_A^{(2)}(q^2)\frac{q_\nu}{m}\gamma_5 . \tag{3.3}$$

В соответствии с принятой четырехмерной метрикой (1, -1, -1, -1) скалярное произведение двух четырехвекторов определяется как

$$(q\,x) = q^0 x^0 - \vec{q}\,\vec{x} .$$

Далее, u_B — дираковский спинор:

$$\{(\gamma p)-m\}u_B(p)=0\,;\quad \bar{u}_B=u_B^*\gamma_0\,,$$

обладающий также изотопическим индексом $s=1,2$, на который действуют изотопические матрицы τ_ρ. В частности, для малых передач импульса q, как, например, для β-распада, можно написать вместо (3.3) упрощенные выражения;

$$\mathcal{H}_\nu^V=F_V(0)\gamma_\nu\,;\quad \mathcal{H}_\nu^A=F_A(0)\gamma_\nu\gamma_5\,.$$

В таком случае

$$\langle B'|I_\nu(0)|B\rangle=F_V(0)\bar{u}_{B'}\gamma_\nu\left(1+\frac{F_A(0)}{F_V(0)}\gamma_5\right)\tau^+u_B\,,$$

где $\tau^+=\dfrac{\tau_x+i\tau_y}{2}$ — оператор увеличения изотопического спина. Как известно, для лептонных токов векторная и аксиальная части входят с одинаковыми коэффициентами, так что мы всегда получим комбинацию вида: $\gamma_\nu(1+\gamma_5)$. Для нуклонов, однако, эксперимент дает

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)}=1,18\pm0,02.$$

Обычно считается, что отличие этого отношения от единицы обусловлено ренормировкой или эффектами внутренней структуры нуклонов. В модели кварков принято предполагать, что для кварков $F_A=F_V=1$. Учитывая такое допущение, будем определять отношение $\dfrac{F_A}{F_V}$ для нуклона, исходя из рассматриваемой модели независимых кварков. Для этого воспользуемся тем же приемом, что и при определении магнитных моментов.

Введем в рассмотрение внешнее (неквантованное) слабое поле $A_\nu(x)$, включив в лагранжиан взаимодействия член вида:

$$g_0\sum_{\nu=0}^{3}I_\nu A_\nu\,.$$

Поле $A_\nu(x)$ мы считаем постоянным $A_\nu(x)=A_\nu$, но в отличие от рассматривавшегося выше магнитного поля, введение его является чисто формальным, используется в качестве вспомогательного приема.

Определим вызванное таким полем изменение энергии δE покоящегося нуклона, а также приращения энергии δE_ℓ кварков и приравняем

$$\delta E=\sum_{\ell=1}^{3}\overline{\delta E_\ell}\,,$$

где усреднение проводится по волновой функции нуклона $\Phi(a_1,a_2,a_3)$.

Уравнение Дирака для свободного нуклона в рассматриваемом слабом поле будет:

$$\{\gamma p - m - g_0 \sum_{\nu=0}^{3} A_\nu (\mathcal{H}_\nu^V + \mathcal{H}_\nu^A) r^+ \} u_B(p) = 0$$

и потому для покоящегося нуклона получим

$$\{\gamma_0 E - m - g_0 \sum_{\nu=0}^{3} A_\nu (F_V(0)\gamma_\nu + F_A(0)\gamma_\nu\gamma_5) r^+ \} u_B = 0$$

или

$$\{E - \gamma_0 m - g_0 [A_0(F_V(0) + F_A(0)\gamma_5) + \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu (F_V(0)\sigma_\nu\gamma_5 + F_A(0)\sigma_\nu)] r^+ \} u_B = 0.$$

Отсюда найдем возмущение в первом порядке:

$$\delta E = g_0 u_B^* \{A_0(F_V(0) + F_A(0)\gamma_5) + \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu (F_V(0)\sigma_\nu\gamma_5 + F_A(0)\sigma_\nu)\} r^+ u_B,$$

где u_B – спинор нуклона для случая $\vec{p} = 0$.

Так как в этом случае его нижние компоненты равны нулю, члены с γ_5 выпадают, и мы можем написать:

$$\delta E = g_0 A_0 F_V(0) u_B^* r^+ u_B + g_0 \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu F_A(0) u_B^* \sigma_\nu r^+ u_B.$$

Направим спин нуклона по оси z. Тогда

$$u_B^* \sigma_\nu r^+ u_B = 0; \quad \nu = 1,2$$

$$u_B^* \sigma_3 r^+ u_B = u_B^* r^+ u_B.$$

Но спинор u_B при $\vec{p} = 0, \sigma_z = 1$ характеризуется только своей изотопической компонентой $c(s)$, указывающей, из какой суперпозиции P и N состоит B:

$$B = c(1)P + c(2)N; \quad |c(1)|^2 + |c(2)|^2 = 1. \tag{3.4}$$

Итак, мы получили

$$\delta E_B^{\uparrow} = g_0 A_0 F_V(0) c^* r^+ c + g_0 A_3 F_A(0) c^* r^+ c. \tag{3.5}$$

Так как

$$c^* r^+ c = \sum_{s', s=1}^{3} c^*(s)(r^+)_{s,s'} c(s') = c^*(1)c(2),$$

то видно, что δE не исчезает, лишь если B является суперпозицией P и N с $c(1) \neq 0$ и $c(2) \neq 0$.

Как видно, в (3.5) не входят члены, содержащие A_1 и A_2, поэтому мы и далее будем рассматривать случай, когда $A_1 = A_2 = 0$.

Рассмотрим уравнение для кварка в нуклоне при наличии введенного слабого поля. Дополнив (1.1) соответствующими членами, получим:

$$\{\gamma_0 E + i(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) - U(r) - g_0[A_0\gamma_0(1+\gamma_5) + A_3\gamma_3(1+\gamma_5)]r^+\}\psi = 0,$$

то есть

$$\{E + i\gamma_5(\vec{\sigma}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) - \gamma_0 U(r) - g_0[A_0(1+\gamma_5) + A_3\sigma_3(1+\gamma_5)]r^+\}\psi = 0.$$

Невозмущенная волновая функция кварка, находящегося на уровне E_0, будет

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \phi(r) & \chi \\ i\,g(r)(\vec{r}\vec{\sigma}) & \chi \end{pmatrix}.$$

Здесь χ – спинор и по отношению к обычному спину и по отношению к изотопическому спину:

$$\chi = |\Phi(j, A)|; \quad j, A = 1, 2.$$

Если $\Phi(j,A)$ отлична от нуля лишь для одной пары индексов, например, для $j=1, A=1$, в рассматриваемом состоянии имеется кварк определенного сорта (p или n) с определенным I_z . В общем случае дискретная волновая функция $\Phi(j,A)$ характеризует суперпозицию таких состояний. Мы будем пользоваться единичной нормировкой для Φ :

$$1 = \sum_{A,\,j=1,2} |\Phi(j,A)|^2 \equiv \Phi^*\Phi \equiv \chi^*\chi.$$

Здесь явно введен индекс кварка A , поскольку в наше уравнение теперь входит оператор r^+ , меняющий n на p .

Найдем приращение энергии кварка δE в состоянии Φ , обусловленное включением слабого поля. Применяя формулу теории возмущений, в первом порядке найдем:

$$\delta E = g_0 A_0 \frac{\int \psi_0^*(1+\gamma_5)r^+\psi_0\,d\vec{r}}{\int\psi_0^*\psi_0\,d\vec{r}} + g_0 A_3 \frac{\int\psi_0^*(1+\gamma_5)\sigma_z r^+\psi_0\,d\vec{r}}{\int\psi_0^*\psi_0\,d\vec{r}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\psi_0^*\gamma_5 r^+\psi_0\,d\vec{r} = \chi^*\int\{i\phi^*(r)g(r)(\vec{r},\vec{\sigma}) - i\,g^*(r)(\vec{r},\vec{\sigma})\phi(r)\}\,d\vec{r}\,r^+\chi = 0,$$

так как ввиду радиальной симметрии

$$\int \vec{r}\,\phi^*(r)\,g(r)\,d\vec{r} = \int \vec{r}\,g^*(r)\,\phi(r)\,d\vec{r} = 0.$$

Аналогично получим

$$\int \psi_0^*\,\gamma_5\,\sigma_z\,\tau^+\,\psi_0\,d\vec{r} = 0.$$

Так как $\sigma_z = 2I_z - 2L_z$, то

$$\delta E = g_0 A_0 \frac{\int \psi_0^*\,\tau^+\,\psi_0\,d\vec{r}}{\int \psi_0^*\,\psi_0\,d\vec{r}} + g_0 A_3 \frac{\int \psi_0^*\,(2I_z - 2L_z)\tau^+\psi_0\,d\vec{r}}{\int \psi_0^*\,\psi_0\,d\vec{r}}.$$

Раскрывая эти выражения как и в § 2, будем иметь

$$\int \psi_0^*\,\psi_0\,d\vec{r} = \int\{|\phi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\}\,d\vec{r}\,\chi^*\chi =$$

$$= \int\{|\phi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\,d\vec{r}$$

$$\int \psi_0^*\tau^+\psi_0\,d\vec{r} = \int\{|\phi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\}\,d\vec{r}\,\chi^*\tau^+\chi$$

$$\int \psi_0^*\,2I_z\tau^+\psi_0\,d\vec{r} = \int\{|\phi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\}\,d\vec{r}\,\chi^*\sigma_z\tau^+\chi$$

$$\int \psi_0^*\,L_z\tau^+\psi_0\,d\vec{r} = \frac{2}{3}\int |g(r)|^2\,r^2\,d\vec{r}\,\chi^*\sigma_z\tau^+\chi.$$

Но,

$$\chi^*\tau^+\chi = \sum_{j,A}\Phi^*(j,A)(\tau^+,\Phi)_{j,A} = \sum_j \Phi^*(j,1)\Phi(j,2) = \Phi^*\tau^+\Phi$$

и

$$\chi^*\sigma_z\tau^+\chi = \sum_{j,A}\Phi^*(j,A)(\tau^+\sigma_z\Phi)_{j,A}.$$

С другой стороны, как это отмечалось в § 1,

$$\sigma_z\Phi = 2I_z\Phi$$

и потому
$$\chi^*\sigma_z\tau^+\chi = \Phi^*\,2I_z\,\tau^+\Phi.$$

Итак, δE для одного кварка, находящегося в состоянии, характеризуемом дискретной волновой функцией Φ, представляется выражением:

$$\delta E = \Phi^*\left(g_0 A_0 \tau^+ + g_0 A_3(1-2\delta)\,2I_z\tau^+\right)\Phi,$$

где δ задается формулой (2.6). Следовательно, приращение энергии нуклона в состоянии с дискретной волновой функцией $\Phi_B^{\uparrow}$ выразится с помощью суммы по трем кваркам:

$$\delta E_B^{\uparrow} = \Phi_B^{*\uparrow}\left\{g_0 A_0 \sum_{\ell=1}^{3}\tau^{+(\ell)} + g_0 A_3(1-2\delta)\sum_{\ell=1}^{3} 2I_z^{(\ell)}\,\tau^{+(\ell)}\right\}\Phi_B^{\uparrow}. \qquad (3.6)$$

Приравняв эту сумму выражению (3.5), найдем:

$$F_V(0)\, c^* (r_1 + i r_2)\, c = \Phi^{*\uparrow}_B \sum_{\ell=1}^{3} (r_1^{(\ell)} + i r_2^{(\ell)})\, \Phi^{\uparrow}_B$$

$$F_A(0)\, c^* (r_1 + i r_2)\, c = (1-2\delta)\, \Phi^{*\uparrow}_B \sum_{\ell=1}^{3} 2 I_z^{(\ell)} (r_1^{(\ell)} + i r_2^{(\ell)})\, \Phi^{\uparrow}_B .$$

$$r^{+} = \frac{r_1 + i r_2}{2} . \qquad (3.7)$$

Так как, в соответствии с (3.4)

$$\Phi^{\uparrow}_B = c_1 \Phi^{\uparrow}_P + c_2 \Phi^{\uparrow}_N , \qquad (3.8)$$

а $r^{(\ell)}$ и $I_z^{(\ell)}$ являются эрмитовскими матрицами, мы получим из (3.7), разделяя вещественную и мнимую части:

$$F_V(0)\, c^* r_\rho\, c = \Phi^{*\uparrow}_B \sum_{\ell=1}^{3} r_\rho^{(\ell)}\, \Phi^{\uparrow}_B ; \quad \rho = 1,2$$

$$F_A(0)\, c^* r_\rho\, c = (1-2\delta)\, \Phi^{*\uparrow}_B \sum_{\ell=1}^{3} 2 I_z^{(\ell)} r_\rho^{(\ell)}\, \Phi^{\uparrow}_B ; \quad \rho = 1,2 .$$

Ввиду изотопической инвариантности отсюда следует, что такие же равенства имеют место и для $\rho = 3$. Эти соотношения в случае $\rho = 3$ удобны тем, что обе части их не аннулируются и при выборе $B = P$ или $B = N$. Возьмем в них

$$c_1 = 1, \quad C_2 = 0 ; \qquad \Phi^{\uparrow}_B = \Phi^{\uparrow}_P .$$

Тогда получим

$$F_V(0) = \Phi^{*\uparrow}_P \sum_{\ell=1}^{3} r_3^{(\ell)}\, \Phi^{\uparrow}_P = \Phi^{*\uparrow}_P \Phi^{\uparrow}_P = 1, \qquad (3.9)$$

а также

$$F_A(0) = (1-2\delta)\, \Phi^{*\uparrow}_P \sum_{\ell=1}^{3} 2 I_z^{(\ell)} r_3^{(\ell)}\, \Phi^{\uparrow}_P .$$

Для вычисления правой части воспользуемся представлением

$$\Phi^{\uparrow}_P = \frac{\sqrt{2}\, p\!\uparrow p\!\uparrow n\!\downarrow - p\!\uparrow p\!\downarrow n\!\uparrow}{\sqrt{3}} .$$

Так как

$$\sum_{\ell=1}^{3} 2 I_z^{(\ell)} r_3^{(\ell)}\, \Phi^{\uparrow}_P = \frac{3\sqrt{2}\, p\!\uparrow p\!\uparrow n\!\downarrow - p\!\uparrow p\!\downarrow n\!\uparrow}{\sqrt{3}} ,$$

то $$\Phi_p^{*\uparrow} \sum_{\ell=1}^{3} 2I_z^{(\ell)} \tau_3^{(\ell)} \Phi_p^{\uparrow} = \frac{3\cdot 2-1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Итак,

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = \frac{5}{3}(1-2\delta) \tag{3.10}$$

Этот результат был получен в работе /8/ на основе замечания, сделанного В. Матвеевым и Б. Струминским.x)

§ 4.

Перейдем к обсуждению полученных выше результатов, именно, рассмотрим две формулы – формулу для магнитного момента протона

$$\mu_p = (1-\delta)\frac{m_p}{E_0} \tag{4.1}$$

и формулу для отношения аксиальной и векторной констант

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = \frac{5}{3}(1-2\delta). \tag{4.2}$$

Здесь m_p – масса протона, E_0 – минимальный энергетический уровень кварка в нуклоне, δ задано выражением (2.6):

$$\delta = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^\infty r^4 |g(r)|^2 dr}{\int_0^\infty \{|\phi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\} r^2 dr}. \tag{4.3}$$

Как уже отмечено, δ связано со средним значением z -компоненты орбитального момента L_z для кварка:

$$\langle L_z\rangle\uparrow = \delta; \quad \langle L_z\rangle\downarrow = -\delta.$$

Вообще, в состоянии кварка, в котором I_z имеет определенное значение

$$\langle L_z\rangle_{I_z} = 2I_z\delta.$$

Так как $\sum_{\ell=1}^{3} 2I_z^{(\ell)} \Phi_p^{\uparrow} = \Phi_p^{\uparrow}$, то суммируя по всем трем кваркам, образующим протон, получим:

$$\delta = \langle \Phi_p^{\uparrow} \mathcal{L}_z \Phi_p^{\uparrow}\rangle, \tag{4.4}$$

x) См. Примечание при корректуре.

где $\mathfrak{L}_z$ – z – компонента суммарного орбитального момента кварков,

$$\mathfrak{L}_z = \sum_{\ell=1}^{3} L_z^{(\ell)} .$$

Поскольку

$$I_z^{(\ell)} = \frac{1}{2}\sigma_z^{(\ell)} + L_z^{(\ell)}$$

видно, что величину δ можно интерпретировать как вклад орбитального момента кварков в спин нуклона. В случае приближенно нерелятивистского характера движения кварков, когда $r g(r)$ мало по сравнению с $\phi(r)$, δ должно быть мало. Если вообще пренебречь δ в формулах (4.1), (4.2) и воспользоваться соотношением (1.5)

$$m_p = 3E_0, \tag{4.5}$$

то для магнитного момента протона мы получим

$$\mu_p = 3, \tag{4.6}$$

а для отношения аксиальной и векторной констант

$$\frac{F_A}{F_V} = \frac{5}{3} = 1,67 \tag{4.7}$$

– результат SU_6 .

Так как экспериментальное значение для μ_p , $\mu_p = 2,79$, то, принимая во внимание грубость использованной модели "независимых кварков", результат (4.6) следует считать удовлетворительным. В формуле же (4.7) согласие с экспериментом значительно хуже величины δ . Так как из (4.3) следует, что $\delta > 0$, сразу видно, что учет δ в (4.2) изменит правую часть в нужном направлении.

Отметим, что важность учета вклада орбитального момента была уже подчеркнута в работах Гатто и др., Харари /9/.

В этих работах, однако, авторы исходили из того, что к представлению (56) с $L=0$ примешивались другие представления, например, (20) с $L=1$. В нашей схеме не требуется выходить за пределы представления (56), так как примесь состояний с $L=1$ обусловлена самим уравнением Дирака.

Для ориентировочной оценки величины δ возьмем простейшую форму скалярного поля:

$$V(r) = -M, \quad r < r_0$$

$$V(r) = 0, \quad r > r_0, \tag{4.8}$$

предложенную в работе /1/. Как видно, здесь интенсивность поля в зоне $0<r<r_0$ столь велика, что скалярное поле фактически полностью "компенсирует" всю собственную массу кварка, а энергия E_0 получается положительной только из-за того, что потенциальный барьер локализует кварк в сфере радиуса r_0.

Итак, воспользуемся уравнением (1.3), в котором теперь

$$U = 0 , \quad r < r_0$$

$$U = M , \quad r > r_0 .$$

Получим

$$g = - \frac{1}{(E+U)} \frac{\partial \phi}{r \partial r} . \tag{4.9}$$

Подставив это выражение в первое из уравнений (1.3) и учитывая, что U является постоянной (кроме точки $r = r_0$), получим:

$$\eta (E-U)\phi + \frac{1}{(E+U)} \{ 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \} = 0 .$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 r\phi}{\partial r^2} + (E^2 - U^2) r\phi = 0 \quad : \quad r \neq r_0 ,$$

то есть

$$\frac{\partial^2 r\phi}{\partial r^2} + E^2 r\phi = 0 \ ; \quad 0 < r < r_0$$

$$\frac{\partial^2 r\phi}{\partial r^2} - (M^2 - E^2) r\phi = 0 ; \quad r > r_0 . \tag{4.10}$$

Так как $r\phi$ должно обращаться в нуль при $r = 0$, не претерпевать разрыва при переходе через $r = r_0$ и стремиться к нулю при $r \to \infty$, то из (4.10) получим

$$r\phi = A \sin E r \qquad 0 < r < r_0$$

$$r\phi = A \sin E r_0 \ e^{-\sqrt{M^2 - E^2}(r - r_0)} , \quad r > r_0$$

$$A = \text{const.} \tag{4.11}$$

Из (4.9), учитывая, что $g(r)$ также не должна иметь разрыва в точке $r = r_0$, находим

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r_0-0}=\frac{1}{E+M}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r_0+0},$$

откуда можно получить уравнение для определения собственного значения энергии $E=E_0$.

$$\cos E r_0+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{E}{M}\right)^2}}{1+\frac{E}{M}}\sin E r_0+\frac{1}{E r_0}\left(\frac{E}{E+M}-1\right)\sin E r_0=0.$$

Далее, для того чтобы не рассматривать массу M, величина которой нам не известна, и для упрощения вычислений имеет смысл совершить предельный переход $M\to\infty$.

(4.12)

Переходя к пределу, получим

$$\cos E r_0+\sin E r_0=\frac{\sin E r_0}{E r_0}.$$

Следовательно,

$$E_0=\xi/r_0, \tag{4.13}$$

где ξ – наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\xi+\sin\xi=\frac{\sin\xi}{\xi}. \tag{4.14}$$

Для $r<r_0$ получим также

$$\begin{aligned} r\phi(r)&=A\sin E_0 r\\ r^2 g(r)&=-A\left(\cos E_0 r-\frac{\sin E_0 r}{E_0 r}\right)\end{aligned} \tag{4.15}$$

и для $r<r_0$

$$r\phi=r^2 g=0. \tag{4.16}$$

Вычислим δ:

$$\delta=\frac{2}{3}\,\frac{\int_0^{r_0}\left(\cos E_0 r-\frac{\sin E_0 r}{E_0 r}\right)^2 dr}{\int_0^{r_0}\left\{\sin^2 E_0 r+\left(\cos E_0 r-\frac{\sin E_0 r}{E_0 r}\right)^2\right\} dr}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{\int_0^{\xi}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx}{\int_0^{\xi}\left\{\sin^2 x+\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\} dx}.$$

Входящие сюда интегралы берутся просто, так как

$$(\cos x - \frac{\sin x}{x}) = \cos^2 x - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Получим

$$\delta = \frac{2}{3}\,\frac{\frac{\xi}{2} + \frac{\sin 2\xi}{4} - \frac{\sin^2\xi}{\xi}}{\xi - \frac{\sin^2\xi}{\xi}} = \frac{1}{3}\,\frac{1 + \frac{\sin\xi}{\xi}\cos\xi - 2\,(\frac{\sin\xi}{\xi})^2}{1 - (\frac{\sin\xi}{\xi})^2},$$

откуда, воспользовавшись уравнением (4.14), найдем

$$\delta = \frac{1}{6}\,\{\frac{2\xi - 3}{\xi - 1}\}.$$

Так как численное решение уравнения (4.14) дает

$$\xi = 2,04, \tag{4.17}$$

получаем

$$\delta = 0,17. \tag{4.18}$$

Таким образом,

$$\mu_P = 2,49 \tag{4.19}$$

$$\frac{F_A}{F_V} = 1,1.$$

Как видно, значение магнитного момента протона отличается от экспериментального на 12%, а отношение аксиальной и векторной констант – на 7%. Принимая во внимание упрощенный характер использованной модели, эти результаты можно считать удовлетворительными.

Используя полученные результаты, можно вычислить еще средний квадрат радиуса нуклона:

$$<r_P^2> = \frac{\int r^2 \rho(r)\,d\vec{r}}{\int \rho(r)\,d\vec{r}},$$

где $\rho(r)$ – плотность распределения электрического заряда.

В рассматриваемой модели $\rho(r)$ пропорционально

$$\psi_0^*(r)\psi_0(r) = |\phi(r)|^2 + r^2\,|g(r)|^2,$$

поэтому, на основании (4.15), (4.16)

$$<r_P^2> = \frac{\int_0^{r_0} r^2\,\{\sin^2 E_0 r + (\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r})^2\}\,dr}{\int_0^{r_0}\{\sin^2 E_0 r + (\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r})^2\}\,dr},$$

положив $r = \frac{x}{E_0}$, получим:

$$\langle r_P^2 \rangle = \frac{1}{E_0^2} \frac{\int_0^{\xi} x^2 \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx}{\int_0^{\xi} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx} =$$

$$= \frac{1}{E_0^2} \frac{\xi^3/3 - \xi \sin^2 \xi + \xi - \frac{\sin 2\xi}{2}}{\xi - \frac{\sin^2 \xi}{\xi}} =$$

$$= \left(\frac{\xi}{E_0}\right)^2 \frac{\frac{1}{3} + \frac{\cos^2 \xi}{\xi} - \frac{\sin \xi \cos \xi}{\xi}}{1 - \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2} =$$

$$= r_0^2 \left\{ \frac{1}{3\left(1 - \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2\right)} + \frac{1}{2\xi^2} \right\}.$$

Отсюда, учитывая (4.5) и (4.17), найдем

$$\langle r_P^2 \rangle = 0,43 \frac{1}{m_\pi^2}.$$

Как видно, здесь также на основании упрощенной модели получается хорошее согласие с экспериментом

$$\left(\langle r_P^2 \rangle_{\text{эксп.}} = 0,396 \frac{1}{m_\pi^2}\right).$$

Здесь мы везде пользовались значением δ, полученным для случая прямоугольной потенциальной ямы. Но необходимо подчеркнуть, что в данной модели никаких оснований для выбора именно такой формы эквивалентного потенциала не имеется, если не иметь в виду упоминавшейся аналогии с теорией ядра. Можно было бы рассмотреть те же вопросы, встав на более общую точку зрения, не фиксируя конкретной формы потенциала $V(r)$. Тогда мы бы не смогли уже определить величину δ из уравнения Дирака.

В таком случае можно воспользоваться для определения δ экспериментальным значением μ_P. Для улучшения точности результата примем во внимание коллективную энергию кварков в нуклоне. Если без учета такой дополнительной энергии мы полагали

$$m_P = 3E_0,$$

то теперь, исходя из выражения коллективной энергии в виде (учитывая лишь "вращение")

$$WI(I+1),$$

найдем для нуклона и для изобара

$$m_p = 3E_0 + \frac{3}{4}W \qquad (938,2\ \text{Мэв})$$

$$m_{V^*} = 3E_0 + \frac{15}{4}W \qquad (1236\ \text{Мэв})\ .$$

Тогда, учитывая (4.1), получим $\delta = 0{,}145$. В этом случае из (4.2) для отношения аксиальной и векторной констант получим $\frac{F_A}{F_V} = 0{,}185$ значение, очень близкое к эксперименту.

§ 5.

В предыдущих параграфах мы везде исходили из представления о том, что самосогласованный потенциал является скалярным.

Рассмотрим теперь случай, который возникает, если предположить, что движение кварков в нуклоне характеризуется уравнением Дирака с псевдоскалярным потенциалом:

$$\{\gamma_0 E + i(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) - M + \epsilon\gamma_5 V(r)\}\psi = 0, \tag{5.1}$$

где $V(r)$ – радиально-симметричная функция и $\epsilon = \pm 1$. Исходя из такого уравнения, можно было бы тем же путем, что и в предыдущих параграфах, получить выражения для магнитных моментов, отношения аксиальной и векторной констант и т.п., вводя в (5.1) малые члены, соответствующие внешним полям, например, магнитному или слабому. Но здесь имеет смысл обратить внимание на одно интересное свойство уравнений такого типа с псевдоскалярным потенциалом, а именно, на возможность весьма просто совершить предельный переход в случае, когда свободная масса кварка $M \to \infty$. Для этого квадрируем уравнение (5.1), написав:

$$\{\gamma_0 E + i(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) - M + \epsilon\gamma_5 V(r)\}^2\psi = 0,$$

откуда, после очевидных упрощений, получим:

$$\{E^2 + \Delta_r + V^2 - M^2 + i\gamma_0\epsilon\frac{(\vec{\sigma}\vec{r})}{r}V'(r)\}\psi(r) = 0. \tag{5.2}$$

Предположим, что функция $U(\vec{r}) = V^2(\vec{r}) - M^2$ остается конечной при $M \to \infty$. Тогда

$$V(\vec{r}) = M\sqrt{1+\frac{U(r)}{M^2}} = M + \frac{U}{2M} + \frac{1}{M^3} + \ldots \tag{5.3}$$

Подставив (5.3) в (5.2), после предельного перехода получим

$$\{F^2 + \Delta_2 + U(r)\}\psi(\vec{r}) = 0. \tag{5.4}$$

Члены, вызывающие смешивание состояний с различными L, при этом выпали и мы пришли к уравнению Клейна–Гордона.

Предположим далее, как всегда, что решение уравнения (5.4) с наименьшим F^2 соответствует s –состоянию. Так как это уравнение не содержит матричной структуры, то $\psi_0(\vec{r})$ должно быть пропорционально некоторой скалярной функции $\phi(r)$:

$$\psi_0(\vec{r}) = \phi(r)\,\theta,$$

где θ – не зависящий от r четырехмерный спинор.

С другой стороны, подставив (5.3) в неквадрированное уравнение (5.1), найдем:

$$\left(-1 + \gamma_5 \in + \frac{1}{M} + \ldots\right)\psi_0 = 0$$

и потому для предельного случая $(\gamma_5 - \in)\,\psi_0 = 0$.

Значит, в рассматриваемом случае

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \phi(r) & \chi \\ \in\phi(r) & \chi \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где χ – обычный двухкомпонентный спинор. Такая структура волновой функции показывает, что мы находимся в существенно релятивистской области, так как величины верхней и нижней компонент волновой функции равны.

С другой стороны, так как из (5.5) следует, что

$$\mathfrak{L}\,\psi_0 = 0,$$

видно, что теперь

$$\vec{I}\,\psi_0 = \frac{\vec{\sigma}}{2}\,\psi_0,$$

т.е. в полном угловом моменте нет вклада от орбитального момента, и он составлен только из спина кварка. Поэтому, повторив рассуждения предыдущих параграфов, можно убедиться, что в данном случае не будет отклонений от результатов обычной SU_6 –теории, так как $\delta = 0$. В частности, $\frac{F_A}{F_V} = \frac{5}{3}$, а также $\mu_p = 3$. Действительно, включим постоянное магнитное поле H по оси Z и введем соответствующие члены в уравнение (5.1). Тогда, после предельного перехода при $M \to \infty$, мы получим для кварка в нуклоне вместо (5.4) уравнение вида:

$$\{E^2+\Delta_r+U(r)+eQ_A H(\sigma_z+L_z)\}\psi=0,$$

откуда

$$2E_0\delta E=-eQ_A H\frac{\int\overset{+}{\psi}_0(\sigma_z+L_z)\psi_0\,d\vec r}{\int\overset{+}{\psi}_0\psi_0\,d\vec r}=-eQ_A H\frac{\int\overset{+}{\psi}_0\sigma_z\psi_0\,d\vec r}{\int\overset{+}{\psi}_0\psi_0\,d\vec r}$$

и потому, несмотря на релятивистский характер движения, магнитный момент будет равен $\frac{eQ_A}{2E_0}$. Таким образом, магнитный момент протона в единицах боровского магнетона оказывается равным 3.

Как видно, рассмотренная ранее модель со скалярным потенциалом с физической точки зрения является более приемлемой, чем модель с псевдоскалярным потенциалом, так как она допускает учет вклада орбитального момента в спин нуклона.

С другой стороны, модель с псевдоскалярным потенциалом в математическом отношении имеет интересное свойство – возможность значительного упрощения задачи при соответствующем предельном переходе $M\to\infty$. Эту особенность псевдоскалярных потенциалов можно использовать при рассмотрении более сложных моделей, основанных на уравнениях типа Бете-Солпитера, где всякое возможное упрощение является крайне желательным.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Д-1968, Дубна 1965.
2. O.W. Greenberg. Phys. Rev. Lett. 13, 598, (1964).
3. H.J. Lipkin, A.N. Tavkhelidze. Preprint ICTP, IC/65/54, Trieste, 1965.
4. П.Н. Боголюбов. Препринт ОИЯИ Р-2569, Дубна 1966.
5. Н.Н. Боголюбов, В.А. Матвеев, Нгуен Ван Хьеу, Д. Стоянов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ Р-2141, Дубна 1965.

6. Б.В. Струминский. Препринт ОИЯИ Р-1939, Дубна 1965.

7. M.K. Gaillard. Lectures on the international school in Herceg Novi (Yougoslavie), 1965.

8. П.Н. Боголюбов. Препринт ОИЯИ Е-2827, Дубна 1966.

9. R. Gatto, L. Maiani, G. Preparata. Phys. Rev. Lett. 16, 377, (1966). H. Harari. Preprint Stanford, February 1966.
В.А. Матвеев, Б.В. Струминский, В.Г. Тарrамадзе. Препринт ОИЯИ Р-2821, Дубна, 1966.

10. M. Gell-Mann. Preprint, California Inst. of Tech. Oct. 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1967 г.

Примечание при корректуре

Во время печатания этого препринта был получен препринт Гелл-Манна /10/, в котором на основе других соображений для отношения аксиальной и векторной констант была получена следующая формула:

$$-\frac{G_A}{G_V} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\langle \vec{p}^{\,2} \rangle}{m^2} + \Theta\left(\frac{\vec{p}^{\,4}}{m^4}\right)\right)$$

Здесь $\langle \vec{p}^{\,2} \rangle$ - среднее значение квадрата импульса кварка в нуклоне, m - эффективная масса кварка, т.е. в наших обозначениях $m = E_0$, причем в этой формуле имеется в виду разложение по степеням $\frac{1}{m}$, последовательно учитывающее релятивистские поправки. Интересно отметить, что соответствующее разложение для нашей величины δ на основании (1.3) и (2.6) будет:

$$\delta = \frac{\langle \vec{p}^{\,2} \rangle}{6E_0^2} + \ldots$$

Таким образом, из формулы (3.10) точно получается вышеприведенная формула Гелл-Манна.