ЯФ, 1967, т.6, в.5, с.1100-1110

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3114

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К. Волков

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ УНИТАРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ РАСХОДИМОСТЕЙ

1967.

P2 - 3114

М.К. Волков

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ УНИТАРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ РАСХОДИМОСТЕЙ

Направлено в ЯФ

1. Введение

Проблема ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля является одной из труднейших и важных проблем, так и не разрешенной достаточно удовлетворительно до настоящего времени в неперенормируемых теориях. В связи с этим сохраняет большой интерес задача построения модели, свободной от расходимостей с взаимодействием, не приводящим к единичной S-матрице. В последнее время все чаще такие попытки связывают с лагранжианами, описывающими существенно нелинейные взаимодействия (1,2). Есть надежда, что именно этот путь должен привести к успеху.

Год назад автором этой статьи была исследована двумерная модель, описываемая лагранжианом /3/

$$L(x)=L_0(\psi(x),\phi(x))-g:\bar{\psi}(x)\tau_1\gamma_\nu\psi(x)\partial_\nu\phi(x):-\Delta m_0:\bar{\psi}(x)\tau_3\psi(x): \tag{1}$$

$$L_0(\psi(x),\phi(x))=\frac{1}{2}(:\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\partial_\nu\psi(x):-:\partial_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x):)-m:\bar{\psi}(x)\psi(x)+:$$

$$+:\partial^\nu\phi(x)\partial_\nu\phi(x):-\mu_0^2:\phi^2(x):$$

τ_1 и τ_3 -матрицы изотопического спина, γ_ν -матрицы Дирака, $\psi(x)$ - оператор спинорного поля, $\phi(x)$-оператор скалярного поля.

Этот лагранжиан унитарным преобразованием сводится к лагранжиану с существенно нелинейным взаимодействием по $\phi(x)$ /3/.

Расчет, проведенный по теории возмущений при разложении по Δm_0, разности масс нуклонов в двух возможных состояниях, показал, что исследуемые функции Грина конечны в двумерном случае и модель свободна от ультрафиолетовых расходимостей.

Основная проблема в упомянутой модели была связана с построением фурье-образа функций Грина, содержащих выражение вида

$$\exp\{\pm i 4 g^2 \Delta_0(x x')\}, \quad \Delta_0(x x') = i \langle T(\phi(x)\phi(x'))\rangle_0 . \qquad (2)$$

В двумерном случае, где $\Delta_0(xx')$ на световом конусе имеет лишь логарифмическую особенность, эту трудность удалось преодолеть. Но для четырехмерного - физически наиболее интересного - случая, где функции Грина обладают особенностью вида

$$\approx \exp\{ a \frac{1}{x^2} \} \quad x^2 \to 0 \qquad (3)$$

задача осталась неразрешенной.

Настоящая работа как раз и посвящена решению этой проблемы. Вновь рассмотрена модель с лагранжианом (1), но уже в четырехмерном случае. Исследована скалярная функция Грина и амплитуда рассеяния скалярных частиц во втором порядке по Δm. Чтобы упростить выражения для исследуемых величин, массы всех свободных частиц принимаются равными нулю. Рассмотрено асимптотическое поведение амплитуды при больших значениях импульса.

Расчеты показали, что расходимости отсутствуют в теории и полностью соблюдаются условия унитарности, причинности и локальности.

2. Двухчастичная скалярная функция Грина и амплитуда рассеяния скалярных частиц

Как и в работе /3/, выражения для интересующих нас физических величин получены методом функционального интегрирования. Формула для одночастичной функции Грина скалярного поля $\phi(x)$ приведена в работе /3/. Получим формулу для двухчастичной функции Грина, которая связана с амплитудой рассеяния скалярных частиц соотношением

$$(2\pi)^4\delta(p'+q'-p-q)\,f(p'q'|pq)=\frac{1}{4}\lim_{p'^2,q'^2,p^2,q^2|\to\mu^2}(p'^2-\mu^2)(q'^2-\mu^2)(p^2-\mu^2)(q^2-\mu^2)G(p'q'|pq)S_0, \qquad (4)$$

где $G(p'q'|pq)$ – импульсное представление двухчастичной функции Грина, p и q – импульсы падающих частиц, p' и q' –уходящих. Функция Грина выражается через функциональный интеграл

$$G(x_1x_2|x_3x_4)=i\,\frac{\int\delta\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\exp\{-i/2\iint d\xi d\xi'\phi(\xi)\Delta_0^{-1}(\xi\xi')\phi(\xi')\}S_0(\phi)}{\int\delta\phi\exp\{-i/2\iint d\xi d\xi'\phi(\xi)\Delta_0^{-1}(\xi\xi')\phi(\xi')\}S_0(\phi)}, \qquad (5)$$

где $S_0(\phi)$ – поляризация вакуума во внешнем поле $\phi(x)$. Используя полученную в работе (3) формулу для $S_0(\phi)$ запишем $G(x_1x_2|x_3x_4)$ во втором порядке по Δm_0

$$G^{(2)}(x_1x_2|x_3x_4)=-i(\Delta m_0)^2\int_0^1 d\lambda^2\iint dy_1dy_2\,Sp\{S^c(y_1-y_2)S^c(y_2-y_1)\}\int\delta\phi\exp\{-\frac{1}{2}\iint d\xi d\xi'$$

$$\phi(\xi)\Delta_0^{-1}(\xi\xi')\phi(\xi')\}\times\{2\lambda g\phi(y_1)\operatorname{Sin}2\lambda g(\phi(y_2)-\phi(y_1))+\operatorname{Cos}2\lambda g(\phi(y_2)-\phi(y_1))\} \qquad (6)$$

$$\cdot[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)+\Delta_0(x_1x_2)\Delta_0(x_3x_4)+\Delta_0(x_1x_3)\Delta_0(x_2x_4)+\Delta_0(x_1x_4)\Delta_0(x_2x_3)],$$

где $S^c(y_1-y_2)=i<T(\bar\psi(y_1)\psi(y_2))>_0$.

Интегрируя по функциональной переменной ϕ и по обычной переменной λ и оставляя лишь ту часть, которая дает ненулевой вклад в $f(p'q'|pq)$, приходим к выражению:

$$\tilde G^{(2)}(x_1x_2|x_3x_4)=-i(\Delta m)^2(2g)^4\iint dy_1dy_2(\Delta(x_1y_1)-\Delta(x_1y_2))\dots(\Delta(x_4y_1)-\Delta(x_4y_2))$$

$$Sp\,\|\cdot\{S^c(y_1y_2)S^c(y_2y_1)\}\exp\{-i(2g)^2\Delta_0(y_1y_2)\}, \qquad (7)$$

где

$$\Delta m=\Delta m_0\exp\{i2g^2\Delta(0)\}. \qquad (8)$$

Это выражение удобнее переписать в следующем виде:

$$\bar{G}^{(2)}(x_1x_2|x_3x_4) = -i\iint dy_1dy_2\Delta(x_1y_1)\Delta(x_2y_1)\{\Pi^{(1)}(y_1y_2)\Delta(y_2x_3)-\Delta(y_1x_3)\Pi^{(2)}(y_1y_2)\}\Delta(y_2x_4), \tag{9}$$

где

$$\Pi^{(1)}(y) = 12(\Delta m)^2(2g)^4\int d\xi\, Sp\{S_0^c(\xi)S^c(-\xi)\}\exp\{-i(2g)^2\Delta_0(\xi)\}[3\delta(\xi-y)+\delta(y)],$$

$$\Pi^{(2)}(y) = 18(\Delta m)^2(2g)^4\int d\xi\, Sp\{S^c(\xi)S^c(-\xi)\}\exp\{-i(2g)^2\Delta_0(\xi)\}\delta(\xi-y).$$

Переходя к импульсному представлению и подставляя полученное выражение в (4), окончательно получаем для амплитуды рассеяния скалярных частиц

$$f(p'q'|pq) = \Pi(p^2)+\Pi(q^2)+\Pi(p'^2)+\Pi(q'^2)-\Pi(0)-\Pi(s)-\Pi(t)-\Pi(u), \tag{10}$$

где

$$\Pi(\ell^2) = 18g^4(\Delta m)^2\int d^4x\, Sp\{S^c(x)S^c(-x)\}\exp\{i\ell x-i(2g)^2\Delta_0(0)\} \tag{11}$$

и $\quad s=(p+q)^2, \quad t=(p-p')^2, \quad u=(p-q')^2.$

3. Амплитуда рассеяния скалярных частиц с нулевой массой покоя

Амплитуда рассеяния скалярных частиц, так же как и одночастичная функция Грина, рассмотренная в предыдущей работе /3/, выражаются через одну и ту же величину $\Pi(\ell^2)$. Поэтому в дальнейшем только она и будет исследоваться. Оказывается, в случае, если массы покоя частиц равны нулю, можно вычислить эту функцию. Тогда функции распространения, входящие в (11), приобретают крайне простой вид:

$$\Delta_0(x) = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{(2\pi)^2(x^2-i\epsilon)};\quad S^c(x) = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{x}}{2\pi(x^2-i\epsilon)^2},\quad Sp\{S^c(x)S^c(-x)\} = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi^4(x^2-i\epsilon)^3},$$

где $x^2 = x_\nu x^\nu$, $x = \gamma_\nu x^\nu$ и искомое выражение можно записать следующим образом:

$$\Pi(\ell^2) = -g(\kappa\Delta m)^2 F(\ell^2), \tag{13}$$

где

$$F(\ell^2) = (2\pi)^6 \int d^4x [\Delta_0(x)]^3 \exp\{i\ell x - i(2\pi)^2 \kappa \Delta_0(x)\} \tag{14}$$

и $\kappa = (\frac{g}{\pi})^2$. Заметим, что, если разложить подинтегральную функцию в ряд по κ, то мы придем к обычной теории возмущений с неустранимыми расходимостями в каждом члене ряда.

Имея в виду аналитические свойства функции $\Delta_0(x)$, интеграл (14) можно записать так:

$$F(\ell^2) = i\int d^3x \int_C dx_0 e^{i\ell x} \frac{\exp[-\frac{\kappa}{x^2}]}{(x^2)^3}, \tag{15}$$

где контур C указан на рис. 1.

Для вычисления интеграла (15) следует ввести промежуточную регуляризацию, которая не искажала бы аналитических свойств нашего выражения в каждом порядке теории возмущений, если произвести разложение по константе κ. Такой регуляризацией может служить следующая процедура. Будем считать искомое выражение пределом при $\delta \to 0$ полусуммы:

$$F(\ell^2) = \lim_{\delta \to 0} \frac{F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)}}{2}, \tag{16}$$

где

$$F_\delta^{\binom{1}{2}}(\ell^2) = i\int d^3x \int_C dx_0 e^{i\ell x} \frac{\exp[-\frac{\kappa}{x^2 \mp i\delta}]}{(x^2 \mp i\delta)^3}, \tag{17}$$

причем δ меньше радиуса полуокружностей, по которым обходятся особенности в контуре С.

Вычислим эти интегралы в нефизической области переменной ℓ ($\ell^2<0$). Полученное выражение легко будет продолжить на всю область ℓ.

В нефизической области выбираем систему координат, где $\ell=\{0,\vec{\ell}\}$ (энергетическая координата равна нулю). В этой системе координат сделаем поворот контура C до полного совмещения его с мнимой осью, после чего в полученной таким образом евклидовой метрике легко провести интегрирование по углам и $F_{\delta}^{(1)}(\ell^2)$ становится равной

$$F_{\delta}^{(1)}(\ell^2)=-\frac{2\pi^2}{\ell}\int_0^\infty d\lambda\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_1(\ell\sqrt{\lambda})\,\frac{\exp\left[\frac{\kappa}{\lambda+i\delta}\right]}{(\lambda+i\delta)^3}, \tag{18}$$

где $\ell=\sqrt{-\ell^2}=\sqrt{\vec{\ell}^2}$.

Используя для $\mathcal{J}_1(\ell\sqrt{\lambda})$ представление

$$\mathcal{J}_1(\ell\sqrt{\lambda})=i\,\frac{\ell\sqrt{\lambda}}{4}\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia}dy\,\frac{\left(\frac{\vec{\ell}^2\lambda}{4}\right)^{iy}}{\operatorname{sh}\pi y\,\Gamma(1+iy)\,\Gamma(2+iy)}, \tag{19}$$

где $a\ll 1$, и имея в виду абсолютную сходимость интегралов, можно переписать (18) в виде

$$F_{\delta}^{(1)}(\ell^2)=-i\,\frac{\pi^2}{2}\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia}dy\,\frac{\left(\frac{\vec{\ell}^2}{4}\right)^{iy}}{\operatorname{sh}\pi y\,\Gamma(1+iy)\,\Gamma(2+iy)}\int_0^\infty d\lambda\,\lambda^{1+iy}\,\frac{\exp\left[\frac{\kappa}{\lambda+i\delta}\right]}{(\lambda+i\delta)^3} \tag{20}$$

Рассмотрим интеграл по λ :

$$f(y)=\int_0^\infty d\lambda\,\lambda^{1+iy}\,\frac{\exp\left[\frac{\kappa}{\lambda+i\delta}\right]}{(\lambda+i\delta)^3}. \tag{21}$$

Подинтегральное выражение имеет разрез вдоль действительной отрицательной оси и существенно особую точку на отрицательной мнимой оси (см.рис.2), а на бесконечности стремится к нулю. Поэтому можно повернуть контур интегрирования на угол π и затем устремить δ к нулю. Полученный интеграл легко берется:

$$f(y) = e^{-\pi y}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\lambda^{iy} e^{-\frac{\kappa}{\lambda}} = -i\pi \frac{e^{-\pi y}\kappa^{iy-1}}{\operatorname{sh}\pi y\,\Gamma(iy)} . \qquad (21)$$

Подставляя полученное выражение в (20), имеем

$$F^{(1)}_{\delta=0}(\ell^2) = -\frac{\pi^3}{2\kappa}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} dy \frac{e^{-\pi y}\left(\kappa\frac{\vec{\ell}^2}{4}\right)^{iy}}{\operatorname{sh}^2\pi y\,\Gamma(iy)\Gamma(1+iy)\Gamma(2+iy)} . \qquad (23)$$

Аналогичное выражение легко получить и для $F^{(2)}_\delta(\ell^2)$. Подинтегральные функции имеют полюса, лежащие на реальной оси, и стремятся к нулю на бесконечности. Поэтому контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он шел сверху и снизу от реальной положительной оси (см. рис. 3), после чего, складывая $F^{(1)}_\delta$ и $F^{(2)}_\delta$, получаем

$$F(\ell) = i\frac{\pi^3}{2\kappa}\int_L dz \frac{\cos\pi z\left(-\frac{\kappa\ell^2}{4}\right)^z}{\sin^2\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(1+z)\Gamma(2+z)} . \qquad (24)$$

Этот интеграл равен сумме вычетов в соответствующих точках. Вычисляя его и подставляя полученное выражение в (13), приходим к искомой функции

$$\Pi(\ell^2) = 2(\pi\kappa\Delta m)^2\ell^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\kappa\ell^2}{4}\right)^n}{n!(n+1)!(n+2)!}\left[\ln\left(\frac{\kappa\ell^2}{4}e^{-i\pi}\right)-\psi(n+3)-\psi(n+2)-\psi(n+1)\right]-\frac{\pi^2}{\kappa} . \qquad (25)$$

Чтобы показать, что используемая промежуточная регуляризация действительно не искажает аналитических свойств исследуемого выражения в каждом порядке теории возмущений (разложение в ряд по κ), приведем в общих чертах другой способ вычисления интеграла (16) независимо в физической и нефизической областях переменной ℓ^2 .

При $\ell^2 > 0$ выберем систему координат, где $\ell = \{\ell_0, 0\}$. Разлагая под интегралом экспоненту с $\Delta_0(x)$ в ряд и интегрируя по x_0 с помощью теории вычетов, приходим к следующему выражению:

$$F(\ell_0) = A(\ell_0) + iB(\ell_0), \tag{26}$$

$$A(\ell_0) = -(2\pi)^2 \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{n!(n+2)!} \int dr\, r^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+2} \left[\frac{\cos \ell_0 x}{(x+\sqrt{r^2-i\delta})^{n+3}}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2-i\delta}} + \frac{\cos \ell_0 x}{(x+\sqrt{r^2+i\delta})^{n+3}}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2+i\delta}} \right],$$

$$B(\ell_0) = -(2\pi)^2 \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{n!(n+2)!} \int_0^{\infty} dr\, r^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+2} \left[\frac{\sin \ell_0 x}{(x+\sqrt{r^2-i\delta})^{n+3}}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2-i\delta}} + \frac{\sin \ell_0 x}{(x+\sqrt{r^2+i\delta})^{n+3}}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2+i\delta}} \right] = \tag{27}$$

$$= -8\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{n!(n+2)!} \int_0^{\infty} dr\, r^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+2} \frac{\sin \ell_0 x}{(x+r)^{n+3}}\Bigg|_{x=r}$$

Здесь в мнимой части сразу можно положить $\delta = 0$, ибо в каждом порядке по κ мнимая часть конечна.

Для нефизической области $\ell^2 < 0$ выберем систему координат, где $\ell = \{0, \vec{\ell}\}$, и получаем

$$F(\ell^2) = -\frac{(2\pi)^2}{\ell} \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{n!(n+2)!} \int_0^{\infty} dr\, r \sin \ell r \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+2} \left[\left(\frac{1}{x+\sqrt{r^2-i\delta}}\right)^{n+3}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2-i\delta}} + \left(\frac{1}{x+\sqrt{r^2+i\delta}}\right)^{n+3}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2+i\delta}} \right]. \tag{28}$$

Полученные выражения можно рассчитать до конца, и зависимость от δ в окончательных выражениях в пределе $\delta \to 0$ исчезает. (Например, интеграл в (28) приводит к ряду, представляющему бесселевскую функцию $K_{n+1}(\ell\sqrt{i\delta})$. Меняя порядок суммирования и вычисляя одну из двух сумм в пределе $\delta \to 0$, мы приходим к уже полученному ранее выражению (25)).

Амплитуда рассеяния скалярных частиц равна

$$f(p'q'|pq) = f(s) + f(t) + f(u), \tag{29}$$

где

$$f(r) = -2(\pi\kappa\Delta m)^2\, r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\kappa \frac{r}{4}\right)^n}{n!(n+1)!(n+2)!} \left[\ln\left(\frac{\kappa r}{4} e^{-i\pi}\right) - \psi(n+1) - \psi(n+2) - \psi(n+3) \right]. \tag{30}$$

$$r = (s, t, u)$$

Скалярная функция Грина равна

$$\Delta(p^2)=\Delta_0(p^2)+\frac{1}{g^2}\Delta_0(p^2)f(p^2)\Delta_0(p^2). \qquad (31)$$

Интересно отметить, что поправка к массе скалярной частицы $\delta\mu^2$ и константа Z_3 (полюсной член (см. [3])) в рассматриваемом приближении равны нулю. Поскольку (29) и (31) выражаются через одну функцию – $f(t)$, мы ограничимся только исследованием амплитуды рассеяния. Очевидно, если она будет удовлетворять требованиям унитарности и причинности теории, тогда то же будет верно и для всех функций Грина скалярных частиц.

4. Унитарность, причинность и асимптотическое поведение при больших s амплитуды рассеяния скалярных частиц

Полученное выражение для амплитуды рассеяния скалярных частиц находится в полном согласии с требованием унитарности теории. Действительно, в физической области, например, переменной $s\,(s>0)$, мнимая часть амплитуды рассеяния равна

$$\operatorname{Im} f(s,t,u)=2\pi(\pi\kappa\Delta m)^2 s\sum_{n=0}\frac{(\frac{\kappa s}{4})^n}{n!(n+1)!(n+2)!}=\pi(\pi\kappa\Delta m)^2 s\times {}_0F_2(2,3;\frac{\kappa s}{4}), \qquad (32)$$

где ${}_0F_2(2,3;\frac{\kappa s}{4})$ – обобщенная гипергеометрическая функция. В нефизической области $s<0$ $f(s)$ – чисто действительная величина, что и должно иметь место в силу унитарности.

Более тщательную проверку унитарности можно осуществить следующим способом. Из условия унитарности S -матрицы $SS^+=1$ легко получить в исследуемом порядке по Δm.

$$\delta^4(p'+q'-p-q)\operatorname{Im}(s,t,u)=2\pi^2\sqrt{\omega_p\omega_q\omega_{p'}\omega_{q'}}\sum_{n=2}^{\infty}\langle 0|a_{\vec p}a_{\vec q}S_1|n\rangle\langle n|S_1^+a^+_{\vec p'}a^+_{\vec q'}|0\rangle, \qquad (33)$$

где ω_p – энергии скалярных частиц, S_1 -первый порядок по Δm_0 матрицы рассеяния. Справа в (33) стоит сумма инвариантных фазовых объемов Ω_n.

Записывая их в виде четырехмерного интеграла в конфигурационном пространстве от соответствующих $\overset{(-)}{\Delta}(x)$ функций и интегрируя по x_0, легко привести правую часть (33) к форме, аналогичной мнимой части выражения (26), после чего равенство (33) становится очевидным. Итак, выполнение требований унитарности доказано.

Чтобы убедиться в выполнении требований, налагаемых на поведение амплитуды принципом причинности и локальности теории /4/, исследуем ее асимптотическое поведение при больших значениях s.

Как показано в приложении I, мнимая часть амплитуды при больших s растет следующим образом:

$$\mathrm{Im}\, f(s,t,u) = C(\kappa\Delta m)^2 \frac{\exp\{3(\frac{\kappa s}{4})^{1/3}\}}{s^{1/3}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{(\kappa s)^{1/3}}\right)\right), \quad s\kappa \gg 1 \qquad (39)$$

где C -некоторая числовая константа.

Действительная часть амплитуды рассеяния обращается в константу (см. приложение II)

$$\mathrm{Re}\, f(s) = 8\pi^2 \kappa \Delta m^2 \quad (s\kappa \gg 1). \qquad (30)$$

Такое поведение изучаемой величины не выходит за рамки ограничений, налагаемых на поведение амплитуды рассеяния принципом причинности и локальности (см. работу А. Джаффе /4/).

5. Заключение

В рамках четырехмерной унитарной релятивистской модели построена конечная теория поля во втором порядке по Δm. Изучаемый лагранжиан сводится к лагранжиану с существенно нелинейным по полю $\phi(x)$ взаимодействием. Это приводит к тому, что в интегралах, описывающих амплитуду рассеяния и функции Грина частиц, подинтегральные функции экспоненциально зависят от пропагаторов скалярных частиц, чему и обязана получаемая конечность теории. Действительно, стоит разложить подинтегральные функции по константе g^2 и вместо показательной зависимости их от $\Delta_0(x)$ вернуться к обычной степенной, как немедленно появляются хорошо знакомые неустранимые расходимости, в то время как исходное выражение свободно от них. Указанное свойство амплитуды рассеяния тесно связано с ее неаналитичностью по константе связи g^2 в точке $g^2 = 0$, что свидетельствует о незаконности использования теории возмущений с разложением по g^2 в этой точке.

Все расчеты проведены во втором порядке по Δm и при массах покоя всех частиц, равных нулю. Нам представляется важным убедиться в том, что и в высших порядках по Δm теория унитарна и не содержит расходимостей. Несомненный интерес представляет обобщение полученных результатов на случай отличных от нуля масс покоя.

Проведенное исследование позволяет надеяться, что построение теории поля без расходимостей становится возможным, если рассматривать существенно нелинейные лагранжианы взаимодействия. Все результаты, полученные здесь, легко переносятся на модель, рассматриваемую Р. Арновитом и С.Дезером[5].

В заключение автор выражает благодарность Г.В. Ефимову и Н.А. Черникову за весьма плодотворные обсуждения.

Приложение I

Исследуем асимптотическое поведение функции $\Phi(a)$ при больших значениях аргумента. Эта функция задана рядом

$$\Phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!(n+1)!(n+2)!}. \qquad (\Pi.1)$$

Используем интегральное представление обратной гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(n+3)} = -\frac{i}{2\pi}\int_L dv \frac{e^v}{v^{n+3}}, \qquad (\Pi.1.2)$$

где L – контур, указанный на рис. 4. Подставляя (П.1.2) в (П.1.1) и суммируя полученный ряд, получаем

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_L dv \, \frac{e^v I_1(2\sqrt{\frac{a}{v}})}{v^{5/2}}, \qquad (\text{П}.1.3)$$

где $I_1(2\sqrt{\frac{a}{v}})$ – функция Бесселя мнимого аргумента. При $a \to \infty$ можно воспользоваться асимптотическим выражением для бесселевской функции (ибо $\frac{a}{v} \gg 1$ в той области переменной интегривани, которая дает основной вклад в интеграл):

$$\Phi(a) = \frac{(-i)}{4\pi^{3/2} a^{7/6}} \int_L \frac{dz}{z^{9/4}} \exp\{a^{1/3}(z + \frac{2}{\sqrt{z}})\}. \qquad (\text{П}.1.4)$$

Здесь была сделана замена $z = a^{1/3} v$. Полученный интеграл легко оценивается методом перевала и в результате дает

$$\Phi(a) \approx \frac{\exp\{3a^{1/3}\}}{4\sqrt{3}\,\pi\, a^{4/3}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{a^{1/3}}\right)\right). \qquad (\text{П}.1.5)$$

Приложение II

Чтобы найти асимптотическое поведение при больших значениях a функции $R(a)$, задаваемой рядом

$$R(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!(n+1)!(n+2)!} [\ln a - \psi(n+3) - \psi(n+2) - \psi(n+1)], \qquad (\text{П}.\text{П}.1)$$

заметим, что интересующая нас функция является пределом производной от функции Φ (a) по индексу ϵ при $\epsilon \to 0$

$$\Phi_\epsilon(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+\epsilon}}{\Gamma(n+1+\epsilon)\Gamma(n+2+\epsilon)\Gamma(n+3+\epsilon)}. \qquad (\text{П}.\text{П}.2)$$

Функцию $\Phi_\epsilon(a)$ можно записать следующим образом:

$$\Phi_\epsilon(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+\epsilon}}{B(1+n+\epsilon, 2+n+\epsilon)\, B(3+n+\epsilon, 3+2(n+\epsilon))\, \Gamma(6+3(n+\epsilon))} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^3}\iint\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\, d\psi \int\limits_{C_R} dz\, e^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+\epsilon}(a^2\beta^3)^{n+\epsilon} a\beta^4 (2n+2+2\epsilon)(3n+5+3\epsilon)}{z^{3n+6+3\epsilon}} \cdot$$

$$\cdot (\mathrm{Cos}\phi)^{2(n+1+\epsilon)} (\mathrm{Cos}\psi)^{3(n+1+\epsilon)+1} [e^{i(n+\epsilon)\psi} + e^{-i(n+\epsilon)\psi}]\Big|_{a=\beta=2} \quad (\text{П.П.3})$$

Здесь мы использовали интегральные представления гамма- и бета-функций.

C_R-контур, указанный на рис. 5. Обход начала координат происходит по окружности с радиусом $R > \beta(a a^2)^{1/3}$. Произведя суммирование по n, получаем следующее врыжение:

$$\Phi_\epsilon(a) = \frac{1}{\pi^3}\iint\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\, d\psi \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} [f(\phi,\psi) + f(\phi_1 - \psi)]\Big|_{a=\beta=2}, \quad (\text{П.П.4})$$

где

$$f(\phi,\psi) = -i\, b^{1+\epsilon} \beta^2 \mathrm{Cos}\psi\, e^{-i\psi} \int\limits_{C_R} \frac{dz\, e^z}{z^{3(1+\epsilon)}(z^3 - b)} \quad (\text{П.П 5})$$

и

$$b = a(a\, \mathrm{Cos}\phi)^2 (\beta\, \mathrm{Cos}\psi)^3 e^{i\psi} \quad . \quad (\text{П.П.6})$$

Подинтегральная функция в (П.П.5) имеет три полюса в точках

$$z_1 = b^{1/3}, \quad z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi} b^{1/3}, \quad z_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi} b^{1/3}, \quad (\text{П.П.7})$$

которые лежат внутри контура C_R. Поэтому интеграл по контуру C_R сводится к трем вычетам в указанных точках и интегра́лу вокруг разреза, проходящего по отрицательной действительной оси.

$$f(\phi,\psi) = 2\pi \frac{\beta^2 \mathrm{Cos}\psi\, e^{-i\psi}}{3ab^{2/3}} [\exp\{b^{1/3}\} + e^{i\frac{2\pi}{3}(1-3\epsilon)} \exp\{e^{i\frac{2\pi}{3}} b^{1/3}\} + e^{i\frac{4\pi}{3}(1-3\epsilon)} \exp\{e^{i\frac{4\pi}{3}} b^{1/3}\}] -$$

$$- i\, b^{1+\epsilon} \beta^2 \mathrm{Cos}\psi\, e^{-i\psi} \int\limits_S \frac{dz\, e^z}{z^{3(1+\epsilon)}(z^3 - b)}, \quad (\text{П.П.8})$$

где S –контур, указанный на рис. 6. Для интересующей нас функции $R(a)$ важна лишь часть выражения (П.П.8), связанная с разрезом, в то время как растущий по a член, соответствующий вычету, не зависит от ϵ и при дифференцировании по этому параметру обращается в нуль. Таким образом, в $R(a)$ дает вклад лишь та область переменной z, где e^z убывает на бесконечности. После дифференцирования по параметрам a, β, ϵ получаем

$$R(a) \approx i\frac{2}{\pi^3 a}\iint_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\, d\psi \operatorname{Cos}^2\psi\; b\int_S dz\, e^z\, \frac{2b^2-3z^3(b+5z^3)\ln z}{z^3(b-z^3)^3}. \quad (\text{П.П.9})$$

При $a \to \infty$ выражение (П.П.9) принимает вид

$$R(a) \approx i\frac{4}{\pi^3 a}\iint_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\, d\psi \operatorname{Cos}^2\psi \int_S dz\, \frac{e^z}{z^3}. \quad (\text{П.П.10})$$

Этот интеграл берется и приводится к следующему выражению для асимптотического значения функции $R(a)$:

$$R(a)_{a\to\infty} \approx -\frac{1}{a}. \quad (\text{П.П.11})$$

Литература

1. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963); Nucl. Phys., 74, 657 (1965).
2. E. S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
3. М.К. Волков. Ядерная физика, II, 171, (1965).
4. Arthur M. Jaffe. Phys. Rev. Lett., 17, 661 (1966).
5. R. Arnowitt, S. Deser. Phys. Rev., 100, 347 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1967 г.

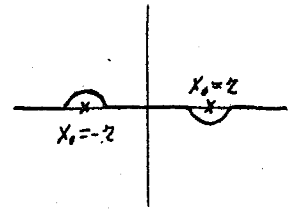

Рис. 1

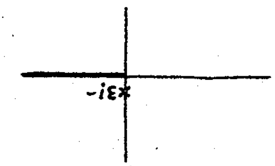

Рис. 2

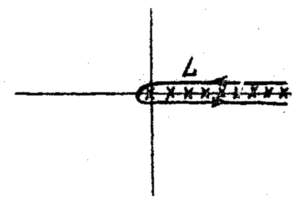

Рис. 3

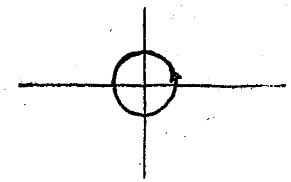

Рис. 4

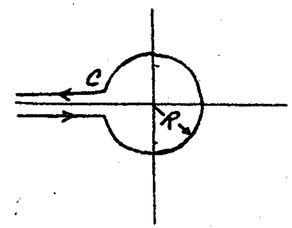

Рис. 5

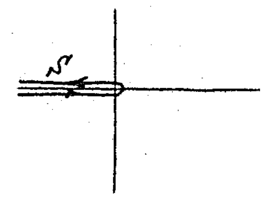

Рис. 6