ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3113

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Г. Заставенко

# К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $g\phi^4$ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

1967.

P2 - 3113

Л.Г. Заставенко

# К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $g\phi^4$ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

1. В работе [1] нами предложен алгоритм, отличный от обычной теории возмущений, для решения некоторых вариантов квантовой теории поля. В этой работе мы применим алгоритм [1] к случаю квантовой теории поля, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\ [\ \pi^2(x) + (\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 + \mu^2\phi^2 + 2gN\phi^4\ ]\ . \qquad (1)$$

Здесь N – символ нормального произведения. Этот случай, как известно, замечателен отсутствием расходимостей в теории возмущений. Нашим результатом является перепись основного уравнения квантовой теории поля (2) в форме уравнений (6), (10), не содержащих неопределенных величин. Полученные уравнения дают формулировку квантовой теории поля (1), не опирающуюся на теорию возмущений. Такой результат, по-видимому, получен нами впервые. Полученный результат позволяет более удовлетворительно, чем это было возможно раньше, рассмотреть вопрос о релятивистской инвариантности теории (П.4).

2. Итак, мы имеем дело с уравнением Шредингера

$$H\Omega = \lambda\Omega\ . \qquad (2)$$

Механизм квантования по узлам пространственной решетки, использованный в / является излишним в рассматриваемом простейшем случае. Положив

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\phi(k)\,e^{ikx}\,dk$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\pi(k)\,e^{-ikx}\,dk$$

и воспользовавшись "формулой"

$$N\phi^4 = \phi^4 - \phi^2\,6g\int\frac{dk}{2\omega_k}\ , \qquad \omega_k = (k^2+\mu^2)^{1/2}\ ,$$

перепишем (1) в виде:

$$H = \frac{1}{2}\int dk_1 dk_2 \delta(k_1+k_2)\{\pi(k_1)\pi(+k_2) + [\omega_{k_1}\omega_{k_2} - 6g\int\frac{dq}{\omega_q}]\phi(k_1)\phi(k_2)\}$$

$$+ \frac{g}{2\pi}\int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4). \qquad (1')$$

Здесь $\pi(k)$ – вариационная производная $-i\,\delta/\delta\phi(k)$.

2а) Для отыскания основного состояния подобно /1/ перейдем от $\Omega$ к новой неизвестной функции $\kappa$

$$\Omega = e^{-\kappa} \quad , \qquad (3)$$

которую будем искать в виде:

$$\kappa = \frac{1}{2}[\,a\phi^2 + c\phi^4 + d\phi^6 + \ \dots\ ]\,. \qquad (4)$$

Здесь

$$a\phi^2 \equiv \int dk_1 dk_2 \delta(k_1+k_2)\phi(k_1)\ \phi(k_2)\, d(k_1 k_2)$$

$$c\phi^4 \equiv \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)c(k_1k_2k_3k_4)\dots$$

функции $a(k_1k_2)$ , $c(k_1k_2k_3k_4)$ , ...
определены на многообразиях $k_1+k_2=0$ , $k_1+k_2+k_3+k_4=0$ , ...
Подстановка (3) в (2) дает уравнение для $\kappa$ :

$$\frac{1}{2}\int dk[\delta^2\kappa/\delta\phi(k)\delta\phi(-k) - \delta\kappa/\delta\phi(k)\delta\kappa/\delta\phi(-k)] + V = \lambda, \qquad (5)$$

здесь V совпадает с выражением (1) без первого члена. Подставив сюда (4) и приравнивая коэффициентные функции при одинаковых степенях $\phi$ , получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\int a(k_1k_2)[\delta(k_1+k_2)]^2 dk_1 dk_2 = \lambda \quad ,$$

определяющее $\lambda$ и уравнения

$$[a(k)]^2 = \omega_k^2 + 6\int[c(k,-k,k^1,-k^1) - g/\omega_{k^1}]\,dk^1$$

$$c\,(k_1,k_2,k_3,k_4)[a(k_1)+a(k_2)+a(k_3)+a(k_4)] =$$

$$= g/\pi + 15\int d(k_1,k_2,k_3,k_4,k^1,-k^1)\,dk^1$$

$$d(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)\,[\,a(k_1) + a(k_2) + \dots + a(k_6)\,] =$$

$$= -4\,\mathrm{Simm}(123456)\,[\,c(k_1, k_2, k_3, -k_1-k_2-k_3)\,c(k_4, k_5, k_6, -k_4-k_5-k_6)\,]$$
$$+ 28 \int dk^1\, e(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k^1, -k^1) \tag{6}$$

и так далее – для отыскания функций $a$, $c$, $d \dots$. Здесь Simm обозначение для операции симметризации, например,

$$\mathrm{Simm}(12)[\,F(k_1, k_2)\,] = \frac{1}{2}[\,F(k_1, k_2) + F(k_2, k_1)\,]\,;\quad a(k) \equiv a(k, -k)\,.$$

Система уравнений (6) определяет волновую функцию вакуума.

Относительно решения системы (6), по-видимому, можно высказать утверждение вроде следующего (доказательство нам неизвестно):

Утверждение I

Для системы (6) итерационный процесс с началом

$$a(k) = \omega_k$$
$$c = d = \dots = 0$$

сходится.

Пояснение: нетрудно видеть, что для итераций всех порядков интегралы в правой части (6) сходятся.

Произведенное в правой части первого уравнения системы (6) объединение двух расходящихся интегралов можно оправдать записью оператора энергии в виде:

$$H = \frac{1}{2} \int dk\, \left\{ \pi(k)\pi(-k) - \frac{6g}{\omega_k} \int \phi(q)\phi(-q)\,dq \right\} + \dots$$

Операция $H$, доопределенная таким образом, переводит степенной функционал $\kappa$ (см. уравнение (5)) в степенной функционал, все коэффициенты которого, за исключением свободного члена, конечны; свободный член бесконечен. Поэтому константе $\lambda$ в (2) никакого определенного значения приписать нельзя; можно утверждать, однако, что от $\phi$ она не зависит.

3б) Для отыскания возбужденных состояний представим $\Omega$ в виде произведения функционала основного состояния на новый неизвестный функционал:

$$\Omega = u e^{-\kappa} .$$

Определим оператор $H^1$ соотношением:

$$H u e^{-\kappa} = u H e^{-\kappa} + e^{-\kappa} H^1 u , \tag{7}$$

очевидно,

$$H^1 = \frac{1}{2} \int dk_1 dk_2\, \delta(k_1 + k_2) \{ \pi(k_1)\pi(k_2) - 2[\pi(k_1)\kappa]\, \pi(k_2) \} . \tag{8}$$

Согласно пункту 2а), первый член в (7) равен

$$\lambda\, u \exp[-\kappa] ,$$

где $\lambda$ – неопределенная (бесконечная) константа; таким образом, уравнение Шредингера для $u$ может быть записано в виде:

$$H^1 u = \Lambda u . \tag{9}$$

Легко видеть, что функционал $u$ может содержать либо только четные, либо только нечетные степени $\phi$. Мы ограничимся здесь более простым вторым случаем:

$$u = \alpha\phi + \gamma\phi^3 + \delta\phi^5 + \dots \tag{4'}$$

здесь

$$\alpha\phi \equiv \int \alpha(k_1)\delta(k_1 - p)\phi(k_1)\, dk_1$$

$$\gamma\phi^3 \equiv \int \gamma(k_1 k_2 k_3)\delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\, dk_1 dk_2 dk_3 .$$

. . . .

Функции $\alpha(k_1)$, $\gamma(k_1 k_2 k_3)$ ... определены на многообразных $k_1 = p$, $k_1 + k_2 + k_3 = p, \dots$ . Подставив это в (9) и приравнивая коэффициентные функции при одинаковых степенях $\phi$, получаем:

$$[\Lambda - a(p)]\,\alpha(p) = -3 \int \gamma(k^1, -k^1, p)\, dk^1$$

$$[\Lambda - a(k_1) - a(k_2) - a(k_3)]\,\gamma(k_1 k_2 k_3) = 2c(k_1 k_2 k_3, -p)\,\alpha(p) -$$

$$- 10 \int \delta(k^1, -k^1, k_1 k_2 k_3)\, dk^1 \tag{10}$$

$$[\,\Lambda - a(k_1) - a(k_2) - \ldots - a(k_5)\,]\,\delta(k_1 k_2 k_3 k_4 k_5) = 3\,d(k_1 k_2 k_3\, k_4 k_5\,, -p)\,\alpha(p)$$

$$+\ 6\,\mathrm{Simm}(12345)[\,c(k_1 k_2\, k_3\,, -k_1 - k_2 - k_3)\,\gamma(k_4\,, k_5, p - k_4 - k_5)\,]$$

$$-\ 21 \int \epsilon(k^1, -k^1, k_1 k_2\, k_3 k_4\, k_5)\,dk^1$$

и так далее.

По поводу системы (10) мы выскажем ( как и ранее, без доказательства), следующее:

Утверждение 2

Система (10) имеет решение $\alpha^p, \gamma^p$ , $\delta^p \ldots$ со свойством

$$\alpha^p = 1\ , \qquad \left.\begin{array}{l} \gamma^p \to 0 \\ \delta^p \to 0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad g \to 0\,, \tag{11}$$

Соответствующее собственное значение $\Lambda_p$ зависит от $p$ следующим простым образом:

$$\Lambda_p = \sqrt{p^2 + m^2}\,, \tag{12}$$

здесь $m^2$ – некоторая положительная константа. Теория возмущений позволяет убедиться в справедливости утверждения 2 с любой точностью по константе связи $g$ .

Физически решение системы (10) со свойствами (11), (12) описывает состояние с одной единственной частицей во всем пространстве; импульс частицы равен $p$ .

3. Построенный по каноническому рецепту /2/ оператор импульса есть

$$P = \int dk\ k\,\phi(k)\,\delta/\delta\phi(k)\ .$$

Действие его на однородный степенной функционал определется формулой:

$$P \int f(k_1 k_2 k_3 \ldots)\,\phi(k_1)\,\phi(k_2)\,\phi(k_3) \ldots dk_1 dk_2 dk_3 \ldots =$$

$$= \int (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots)\, f(k_1 k_2 k_3 \ldots)\,\phi(k_1)\,\phi(k_2) \ldots dk_1 dk_2 dk_3 \ldots$$

Отсюда и (4), (4') ясно, что рассмотренные в п.п. 2а), 2б) решения уравнения Шредингера являются собственными функционалами оператора импульса с собственными значениями $o$ и $p$ соответственно. Других сохраняющихся величин, кроме энергии и импульса, в рассматриваемом случае одной пространственной степени свободы нет.

4. Построенный по каноническому рецепту оператор $L$ лоренцова поворота x) может быть получен заменой в (1') $\delta(k_1+k_2)$ и $\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$ на $\delta'(k_1+k_2)$ и $\delta'(k_1+k_2+k_3+k_4)$ и изменением знака при всех членах, кроме второй вариационной производной.

4а) Так построенный оператор $L$ является не полностью определенным в применении к функции основного состояния (3), в том же смысле, что оператор $H$; в функционале $L\kappa$ определены все коэффициенты, за исключением коэффициента при нулевой степени $\phi$. Используя уравнения (6) и указанное выше явное выражение оператора $L$, нетрудно убедиться, что все коэффициентные функции степенного функционала $e^{+\kappa} L e^{-\kappa}$ за исключением неопределенного свободного члена, равны нулю; этот результат является адэкватной математической формулировкой лоренц-инвариантности основного состояния (вакуума). Лоренц-инвариантность основного состояния является тривиальным следствием уравнения (6) и не дает никакой дополнительной информации о функциях $a(k), c(k_1 k_2 k_3 k_4)\ldots$.

4б) Подобно (7) перейдем от $L$ к оператору $L^1$ (его явное выражение может быть получено заменой в (8) $\delta(k_1+k_2)$ на $\delta'(k_1+k_2)$). Нетрудно проверить для операторов $H^1$, $L^1$ и $P$ соотношения:

$$
\begin{aligned}
[H^1, L^1] &= P \\
[P, L^1] &= H^1,
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

из которых следует лоренц-инвариантность теории.

Действительно, пусть, например,

$$
\begin{aligned}
H^1 u_p &= E_p u_p \\
P u_p &= p u_p,
\end{aligned}
$$

тогда для функционала

x) Он получается добавлением $x$ в подинтегральное выражение формулы (1).



$$u_{\alpha p} = e^{\alpha L^1} u_p$$

ввиду (13) имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
H^1 u_{\alpha p} &= (E_p \operatorname{ch}\alpha + p \operatorname{sh}\alpha)\, u_{\alpha p} \\
P u_{\alpha p} &= (E_p \operatorname{sh}\alpha + p \operatorname{ch}\alpha)\, u_{\alpha p},
\end{aligned}
$$

из которых следует, в частности, зависимость (12). Отметим еще, что информация типа (12) содержится в уравнениях (10); ее удобно выявить с помощью применения правил коммутации (13) к функционалу $u_p$, однако, получаемые так соотношения являются лишь следствием (10). Для настоящего пункта является существенным то обстоятельство, что действие операторов $H^1$ и $L^1$ на функционал вида $(4^1)$ полностью определено.

5. Основной результат настоящей работы состоит в том, что впервые дана не зависящая от теории возмущений и пригодная, по-видимому, при всех значениях константы связи формулировка релятивистской модели квантовой теории поля. Весьма существенным моментом, оставленным без рассмотрения, является доказательство или проверка существования предполагаемых решений.

Автор благодарен проф. Д.И. Блохинцеву, акад. Н.Н. Боголюбову, Г.В. Ефимову, А.В. Ефремову и акад. М.А. Маркову за интерес к работе, многочисленные обсуждение и ценные замечания.

## Литература

1. Л.Г. Заставенко. Алгоритм, позволяющий найти собственные функции и собственные значения оператора энергии для некоторых моделей квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ 3112, Дубна 1967 г.
2. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ОГИЗ Гостехиздат, Москва, 1947 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1967 г.