ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3112

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Г. Заставенко

АЛГОРИТМ, ПОЗВОЛЯЮЩИЙ НАЙТИ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1967 г.

Р2 - 3112

Л.Г. Заставенко

АЛГОРИТМ, ПОЗВОЛЯЮЩИЙ НАЙТИ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

I

Скалярное нейтральное поле с нулевой массой покоя и самодействием $g\phi^4$ описывается при квантовании по пространственной решетке уравнением Шредингера [1]

$$H\Omega = \lambda\Omega \quad , \tag{1}$$

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta + g\sum x_\alpha^4 \quad . \tag{2}$$

Здесь суммы по $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ берутся по кубической решетке $0 \le \alpha_i < m$, $0 \le \beta_i < m$, симметрическая матрица B определена соотношением

$$xBx \equiv \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha,q} (x_\alpha - x_{\alpha+q})^2 , \tag{3}$$

где сумма по q берется по шести точкам $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$.

1а. Для определения основного состояния оператора H перейдем от Ω к новой неизвестной функции κ :

$$\Omega = e^{-\kappa} \tag{4}$$

и соответственно перепишем уравнение (1):

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial^2\kappa}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial\kappa}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\kappa}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}xBx + g\sum_{\alpha} x_\alpha^4 = \lambda_0 \quad . \tag{5}$$

Функцию κ ищем в виде

$$\kappa = \frac{1}{2} (A x^2 + C x^4 + D x^6 + \ldots), \tag{6}$$

здесь

$$A x^2 \equiv \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta ,$$

$$C x^4 \equiv \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta$$

и так далее.

Подставив (6) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\frac{1}{2} \mathrm{Sp}\, A = \lambda_0 ,$$

$$6 (C x^2)_{\alpha\alpha} - (A x)^2_\alpha + B x^2 = 0 ,$$

$$15 (D x^4)_{\alpha\alpha} - 4 (A x)_\alpha (C x^3)_\alpha + 2 g \sum x_\alpha^4 = 0 , \tag{7}$$

$$28 (\mathcal{E} x^6)_{\alpha\alpha} - 6 (A x)_\alpha (D x^5)_\alpha - 4 (C x^3)^2_\alpha = 0 .$$

Считая отличными от нуля только несколько первых коэффициентов разложения (6), получаем из (7) приближенное уравнение для их определения. Например, принимая отличным от нуля только A, находим из второго уравнения (7):

$$x A^2 x = x B x ,$$

то есть

$$A = \sqrt{B} , \qquad \lambda_0 = \frac{1}{2} \mathrm{Sp} \sqrt{B} .$$

Это приближение соответствует, очевидно, случаю $g = 0$. В следующем приближении, считая отличными от нуля A и C, получаем для их отыскания уравнения

$$6(Cx^2)_{\alpha\alpha} - A^2x^2 + Bx^2 = 0 \quad , \qquad (8)$$

$$4(Ax)_\alpha \ (Cx^3)_\alpha = 2g\sum x_\alpha^4 \quad .$$

Гамилвтониан (2) не меняется при преобразовании $x_\alpha \to x_{\alpha+q}$, основное состояние гамильтониана (2) – не вырожденное (книга /2/, том 1, гл.6), поэтому оно тоже не меняется при этом преобразовании. Вследствие этого, в частности, матричные элементы $A_{\alpha\beta}$ зависят лишь от разности $\alpha - \beta \mod m$; отсюда следует, что матрицы A и B имеют одну и ту же систему собственных векторов $Z^{\vec{k}}$

$$(Z^{\vec{k}})_{\vec{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{m^3}} \exp\left[2\pi i \frac{\vec{\alpha}\vec{k}}{m} \right] \qquad (9)$$

Таким образом, подставив в (8)

$$x = \sum_{\vec{k}} y^{\vec{k}} Z^{\vec{k}} \quad ,$$

получаем

$$C_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} = \frac{2g}{N}(A_{\vec{k}_1} + A_{\vec{k}_2} + A_{\vec{k}_3} + A_{\vec{k}_4})^{-1} \sum_{\vec{p}} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4-\vec{p}m} \qquad (10)$$

и

$$A^2_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} + \frac{6g}{N}\sum_{\vec{k}'}(A_{\vec{k}} + A_{\vec{k}'})^{-1} \quad .$$

Здесь индексы $\vec{k}$, $\vec{k}'$ изменяются в пределах $0 \le k_i$, $k_i' < m$, $N = m^3$, в сумму по $\vec{p}$ входят значения p_i = 0,1,2,3. В случае $m \to \infty$ это уравнение переходит в интегральное уравнение

$$[A(s)]^2 = B(s) + 6g\int_0^1 ds_1' \int_0^1 ds_2' \int_0^1 ds_3' \, [A(s) + A(s')]^{-1},$$

где

$$B(s) = 2\sum_{i=1}^{3}(1 - \cos 2\pi s_i) \quad .$$

Аналогичным образом исследование основного состояния гамильтониана (2) при $m \to \infty$ в более высоких приближениях приводит к системам интегральных уравнений. Для энергии основного состояния такая процедура дает:

$$\lambda_0 = N \left\{ \frac{1}{2} \int d^3 s \sqrt{B(s)} + \frac{3g}{4} \left(\int d^3 s \frac{1}{\sqrt{B(s)}} \right)^2 - \frac{9g^2 \ln(1/g)}{8\pi^2} \left(\int \frac{ds}{\sqrt{B}} \right)^2 + \ldots \right\}. \quad (11)$$

1б. Для определения возбужденных состояний оператора H представим Ω в виде произведения функции основного состояния на новую неизвестную функцию U:

$$\Omega = U e^{-\kappa} .$$

Для функции U получаем уравнение

$$- \frac{1}{2} \sum_\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta^2} + \sum_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \frac{\partial \kappa}{\partial x_\beta} = (\lambda - \lambda_0) U .$$

Рассмотрим, например, одночастичные состояния. U будем искать в виде:

$$U = \alpha x + \gamma x^3 + \delta x^5 + \ldots \quad (12)$$

Получаем

$$\begin{aligned}
&-3(\gamma x)_{\beta\beta} + (\alpha)_\beta (Ax)_\beta = (\lambda - \lambda_0)\alpha \\
&-10(\delta x^3)_{\beta\beta} + 2(\alpha)_\beta (Cx^3)_\beta + 3(\gamma x^2)_\beta (Ax)_\beta = (\lambda - \lambda\ )\gamma x^3, \quad (13) \\
&-21(\epsilon x^5)_{\beta\beta} + 3(\alpha)_\beta (Dx^5)_\beta + 6(\gamma x^2)_\beta (Cx^3)_\beta + 5(\delta x^4)_\beta (Ax)_\beta = (\lambda - \lambda_0)\delta x^5.
\end{aligned}$$

В нулевом приближении система (13) сводится к уравнению

$$A a = (\lambda - \lambda_0) a$$

с решениями (см. (8), (11))

$$a = z^k \quad , \quad \lambda - \lambda_0 = A_k \quad . \qquad (14)$$

Следующее приближение дает

$$2 \sum_k a_{-k} \; C_{k k_1 k_2 k_3} = (\lambda - \lambda_0 - A_{k_1} - A_{k_2} - A_{k_3}) \, \gamma_{k_1 k_2 k_3} \quad .$$

Подставив это в первое из уравнений (13), с учетом (10) получаем

$$\lambda - \lambda_0 - A_k = - \frac{6g}{N} \sum_{k'} (\lambda - \lambda_0 - A_k - 2 A_{k'})^{-1} (A_k + A_{k'})^{-1},$$

$$\cong - \frac{3g}{N} \sum_{k'} A_{k'}^{-1} \; (A_k + A_{k'})^{-1} \quad .$$

II

Величины A_k при изменении k в пределах решетки меняются в некоторых конечных пределах:

$$0 < \epsilon (N, g) \leq A \leq \lambda (N, g) < \infty$$

Из рассмотрений п. 1а с любой точностью по g следует, что для любого g, $g > 0$, пределы функций $\epsilon (N, g)$ и $\lambda (N, g)$ при $N \to \infty$, $\epsilon_\infty (g)$ и $\lambda_\infty (g)$, существуют, причем $0 < \epsilon_\infty < \lambda_\infty < \infty$.

Но величины A_k согласно п. 1б определяют спектр одночастичных возбуждений. Поэтому при $g > 0$ спектр одночастичных возбуждений не описывается формулой вида

$$E_p = \sqrt{m^2 + p^2} \qquad (15)$$

(ибо импульс p изменяется в бесконечных пределах и из (1б) следовало бы $\lambda_\infty / \epsilon_\infty = +\infty$).

Таким образом, уравнение (1) может иметь физически удовлетворительные решения только при $g \to 0$ ($\epsilon_\infty(g) \to 0$ при $g \to 0$).

III

Сравним предлагаемый алгоритм с теорией возмущений. Решение уравнения Шредингера (1) и (2) в случае нулевой массы покоя не может быть разложено в степенной ряд по константе связи { ср.

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{(x_1 - x_2)^2}{z} + g(x_1^4 + x_2^4) ,$$

когда при $g \to 0$ функция основного состояния имеет вид

$$\psi \approx \psi_0(x_1 - x_2)\,\phi_0(g^{1/3}(x_1 + x_2)) \qquad \} ,$$

поэтому рассмотрим случай ненулевой массы покоя. Определение матрицы B в (2) следует заменить на следующее:

$$xBx = \sum_{\alpha,q} (x_\alpha - x_{\alpha+q})^2 + \mu^2 h^2 \sum_\alpha x_\alpha^2 ,$$

здесь μ –масса покоя скалярного поля без взаимодействия, h –постоянная пространственной решетки. Нетрудно убедиться, что решение, данное в пп. 1а,1б, при $g \to 0$ совпадает с тем, что дает теория возмущений. Условие применимости теории возмущений состоит, по-видимому, в том, чтобы изменение массы покоя, вызванное самодействием, было мало по сравнению с затравочной массой:

$$g \int \frac{d^3 s}{\sqrt{B(s)}} \ll \mu^2 h^2 .$$

Если выполняется противоположное неравенство

и $g \ll 1$, то

применимо разложение (11).

Пользуюсь случаем выразить благодарность профессору Д.И.Блохинцеву и профессору М.А. Маркову за интерес к работе.

Литература

1. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. Москва, Гостехиздат, 1947.
2. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, М.-Л. , Гостехиздат, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1967 г.