ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3086

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С.С. Хоружий

К ПОСТРОЕНИЮ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

II

Существование матрицы рассеяния

1966

Р2 - 3086

С.С. Хоружий

К ПОСТРОЕНИЮ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

II

Существование матрицы рассеяния

§ 1. Введение

Как было установлено в части I настоящей работы /1/ (далее 1), для так называемых неперенормируемых взаимодействий может быть сформулирована аксиоматическая схема, в которой гейзенбергов оператор поля и соответствующие ему функции Уайтмана принадлежат к классу аналитических функционалов, являясь обобщенными функциями над пространством Z целых аналитических функций. Было показано, что такая схема может удовлетворять всем постулатам подхода Уайтмана. Однако факт выполнения этих исходных постулатов еще отнюдь не обеспечивает прямой возможности перенесения в теорию неперенормируемых взаимодействий всех многообразных результатов аксиоматического подхода (теории рассеяния Хаага-Рюэля; формул редукции для S - матричных элементов; теории алгебр локальных наблюдаемых и др.). Как правило, получение всех этих результатов непосредственно опиралось на принадлежность основных функций теории пространствам S или D. Кроме того, специфические особенности пространства Z и, прежде всего, отсутствие в этом пространстве функций с компактным носителем, привели к тому, что постулаты Уайтмана, характеризующие локальные свойства теории, получили в случае неперенормируемых взаимодействий математически более слабую формулировку. По этим причинам не является вполне ясным, насколько далеко может быть продвинута дальнейшая разработка аксиоматической теории неперенормируемых взаимодействий. Все же мы показываем в настоящем разделе, что, исходя из постулатов, сформулированных в 1, можно доказать существование асимптотических n -частичных состояний и матрицы рассеяния, при этом сохраняя еще (хотя лишь в общих чертах) близость к обычному варианту уайтмановского подхода.

Для установления этого результата нам потребуются следующие постулаты (формулировки см. в 1).

I. Определение пространства состояний и оператора гейзенбергова поля.

II. Трансляционная ковариантность.

III. Спектральность в сильной форме.

IV. Положительная определенность.

V. Локальность.

Как известно, в перенормируемой аксиоматической теории доказательство существования S -матрицы не требует положительной определенности метрики пространства состояний. Представляет интерес выяснить, связан ли этот факт с физическими отличиями неперенормируемых теорий /13/.

Для гейзенбергова поля $A(\phi)$ мы будем использовать в данном разделе обычное представление:

$$A(\phi) = \int d^4 x\, \phi(x) A(x) \quad , \quad \phi \in Z \, . \tag{1}$$

Как и в случае пространств S и D, такое представление следует рассматривать как символическое, поскольку поле в действительности не предполагается регулярным функционалом. Подробнее вопрос об ограничениях, связанных с представлением (1) в теории аналитических функционалов, будет рассмотрен нами в другом месте.

§ 2. Пространственноподобное асимптотическое условие

Мы проведем доказательство существования матрицы рассеяния, опираясь на перечисленные постулаты и следуя там, где это возможно, классической методике Хаага-Рюэля /2-4/. Поскольку основные функции из Z имеют компактный носитель в импульсном пространстве, они пригодны для точного решения одночастичной задачи /4/, и мы можем положить в основу теории рассеяния почти локальное поле:

$$B(a) = \sum_{n=1}^{N} \int \prod_{i=1}^{n} d^4 x_i\, \phi_n(x_1 - a; \dots x_n - a)\, A(x_1) \dots A(x_n) \, . \tag{2}$$

В отличие от Рюэля, мы будем рассматривать простейшие почти локальные поля, соответствующие выбору $N = 1$ в (2). Обобщение для любого N, охватывающее случай связанных состояний, ничем не различалось бы в перенормируемых и неперенормируемых теориях. Введем усеченные уайтмановские функции:

$$\tilde{\tilde{W}}^{\pi}_{\phi} (a_0 \dots a_n) = \int \prod_{i=0}^{n} d^4 x_i\, \phi(x_0 .. x_n)\, \tilde{\tilde{W}}(x_{i_0} + a_{i_0}; \dots x_{i_n} + a_{i_n}) \, . \tag{3}$$

Благодаря ядерности пространства Z, здесь $\tilde{\tilde{W}}(x_0 \dots x_n) = \langle A(x_0) \dots A(x_n) \rangle_0^{\pi r}$ и π - произвольная перестановка: $\pi(0,1,\dots n) = (i_0 \dots i_n)$. Заданную конфигурацию $(a_0 \dots a_n)$ (которая будет браться чисто пространственной: $a^0_j = 0, j = 0 \dots n$) будем характеризовать параметрами:

$$\lambda^2 = \max_{i, i' \in (0,1..n)} |\bar{a}_i - \bar{a}_{i'}|^2 ; \quad \mu^2 = \max_{X : \{X, X'\} = \pi(0..n)} [\min_{i \in X, i' \in X'} |\bar{a}_i - \bar{a}_{i'}|^2] \, . \tag{4}$$

λ - диаметр конфигурации; μ - максимальное расстояние между разбиениями конфигурации на 2 подгруппы с системами индексов X и X'. При этом имеет место всегда

$$\mu \geq \lambda / n \tag{5}$$

(2 различных простых доказательства этого см. /4,5/). Пусть, далее, $I = (0,1 \dots n)$, J - та перестановка, при которой достигается μ, и Y, Y' - системы индексов подгрупп, расстояние между которыми есть μ :

$$J = \{Y, Y'\} = \{i_0 .. i_k, i'_0 \dots i'_{k'}\} ; \; (k + k' = n - 1) \, . \tag{6}$$

Согласно методу Рюэля, для установления свойств убывания $\tilde{\tilde{W}}_{\phi}(\bar{a}_0 .. \bar{a}_n)$ при $|\bar{a}_k| \to \infty$ удобно сначала доказать убывание по λ разности

$$\tilde{\tilde{W}}^{I}_{\phi}(\bar{a}_0 \dots \bar{a}_n) - \tilde{\tilde{W}}^{J}_{\phi}(\bar{a}_0 \dots \bar{a}_n) \, .$$

1 лемма Рюэля

Для любого N.

$$\lim_{\lambda\to\infty} [\tilde{\tilde{W}}^I_\phi(\bar a_0 \dots \bar a_n) - \tilde{\tilde{W}}^J_\phi(\bar a_0 \dots \bar a_n)] = 0 \quad , \tag{7}$$

если конфигурация $(\bar a_0 \dots \bar a_n)$ расширяется с сохранением формы, μ достигается всегда для $\pi = J$ и λ достигается всегда для тех же двух точек конфигурации.

Доказательство

Согласно (3,6),

$$\tilde{\tilde{W}}^I_\phi(\bar a_0 \dots \bar a_n) - \tilde{\tilde{W}}^J_\phi(\bar a_0 \dots \bar a_n) = \int \prod_{i=0}^{n} d^4 x_i \, \phi(x_0 \dots x_n) [\tilde{\tilde{W}}^I(x_0^0, \bar x_0 + \bar a_0; \dots x_n^0, \bar x_n + \bar a_n) -$$

$$- \tilde{\tilde{W}}^J(x^0_{i_0}, \bar x_{i_0} + \bar a_{i_0}; \dots x^0_{i'_k}, \bar x_{i'_k} + \bar a_{i'_k})] \quad . \tag{8}$$

В силу постулата локальности носителем аналитического функционала $\tilde{\tilde{W}}^I - \tilde{\tilde{W}}^J$ является множество

$$T = \{(z_0 - z_n) \in C^{4(n+1)}, (x_{i_r} - x_{i'_r})^2 \geq 0 \quad \text{для всех} \quad i_r \in Y, i'_r \in Y'\} . \tag{9}$$

Соответственно в (8) можно считать $\phi \in Z(T)$ (пространство функций, голоморфных в T с топологией (6–1)).Отсюда, используя также (5) и другие геометрические свойства, находим, что при заданной конфигурации $(\bar a_0 \dots \bar a_n)$ с параметрами λ, μ значение свертки (8) не зависит от поведения основной функции $\phi(x_0 \dots x_n)$ в области

$$||x||^2 = \sum_{j=0}^{n} ||x_j||^2 < \frac{\lambda^2}{8n^2} \quad , \tag{10}$$

где $||x_j^2|| = (x_j^0)^2 + \bar x_j^2$ – евклидово расстояние в пространстве Минковского. Этот результат, играющий решающую роль в доказательстве леммы, следует, таким образом, из нашего ослабленного условия локальности, так же как из обычного.

Далее для оценки свойств убывания разности (8) Рюэль пользуется умеренностью роста функций Уайтмана, а также вводит представление основной функции ϕ через некоторое специальное разбиение единицы. Оба эти приема, придающие доказательству поистине изящный вид, не могут быть использованы в нашем случае. В пространстве Z нет разбиения единицы. Мы, правда, можем,воспользовавшись включением $Z \subseteq S$, представить ϕ в виде суммы ряда функций, которые обладают нужными для доказательства свойствами и лежат в пространстве S, но не Z. Однако такой ряд сходится только в топологии S и не сходится в более сильной топологии Z, почему из представления $\phi = \sum_\nu \phi_\nu$ нельзя еще заключить, что $(F, \phi) = \sum_\nu (F, \phi_\nu)$, если $F \in Z'$. По этим причинам нам приходится избрать совершенно иной путь доказательства, существенно использующий положительную определенность метрики пространства состояний. Основу этого доказательства составляет теорема Бохнера-Шварца[6], стр. 206), которая для наших целей может быть сформулирована следующим образом:

Теорема

Всякий мультипликативно-положительный функционал Z в пространстве представим в виде:

$$(F, \phi) = \int \phi(\lambda) \, d\mu(\lambda) \quad , \tag{11}$$

где $\mu(\lambda)$ – положительная мера степенного роста.

Очевидно, что представление типа (11) можно распространить и на свертку:

$$(F * \phi)(\bar a) = T(\bar a)(F, \phi) = T(\bar a) \int \phi(\lambda) \, d\mu(\lambda) = \int \phi(\lambda - \bar a) \, d\mu(\lambda) \quad , \tag{12}$$

благодаря тому, что свертка в Z определена и операция $T(a)$ перестановочна с интегрированием по мере μ.

Применим теорему Бохнера-Шварца к представлению (8). Для этого, вводя сокращенные обозначения $x = (x_0 \dots x_n)$; $\bar a = (\bar a_0 \dots \bar a_n)$ и учитывая транзитивность свертки, перепишем (8) в виде

$$\tilde{\tilde{W}}^I_\phi(\bar a) - \tilde{\tilde{W}}^J_\phi(\bar a) = \int_{||x||^2 > \lambda^2/8n^2} dx \, \phi(x - \bar a) [\tilde{\tilde{W}}^I(x) - \tilde{\tilde{W}}^J(x)] \quad . \tag{13}$$

Это есть свертка разности двух усеченных уайтмановских функций. Согласно постулату положительной определенности, обычные функции Уайтмана $W^{I,J}(\phi)$ суть мультипликативно-положительные функционалы в Z x/. Произвольная усеченная функция $\tilde{\tilde{W}}^{\pi}(\phi)$ представляет собою разность соответствующей $W^{\pi}(\phi)$ и ряда слагаемых вида

$$W^{\pi}_{\Gamma}(\phi)=\int\prod_{j=0}^{n} d^4 x_j\,\phi(x_0\dots x_n)\,\langle A(x_{i_0})\dots A(x_{i_{k_1}})\rangle_0\,\langle A(x_{i_{k_1+1}})\dots A(x_{i_{k_2}})\rangle_0\dots\langle\dots A(x_{i_n})\rangle_0\,, \qquad (14)$$

где Γ есть произвольное разбиение совокупности $(i_0 \dots i_n)$ на погруппы $(i_0\dots i_{k_1})(i_{k_1+1} i_{k_2})\dots(\dots i_n)$.

Докажем, что при любом способе разбиения Γ $W^{\pi}_{\Gamma}(\phi)$ есть мультипликативно-положительный функционал. Произвольный сомножитель в (14) – $\langle A(x_{i_r})\dots A(x_{i_s})\rangle_0$ является мультипликативно-положительным функционалом. Поэтому, когда

$$\phi(x_0\dots x_n)=\phi^{\Gamma}(x_0\dots x_n)\equiv\phi_1(x_{i_0}\dots x_{i_{k_1}})\,\phi_2(x_{i_{k_1+1}}\dots x_{i_{k_2}})\dots \qquad (15)$$

$$\dots\phi_{\ell}(\dots x_{i_n}),\ (\phi_i\in Z),$$

$$W^{\pi}_{\Gamma}\,(\phi^{(\Gamma)^*}\times\phi^{(\Gamma)})\geq 0\,.$$

В силу ядерности Z множество функций $\phi^{(\Gamma)}(x_0\dots x_n)$ при любом Γ плотно в Z, и произвольную $\phi\in Z$ мы можем всегда представить в виде $\phi=\lim_{n\to\infty}\phi^{(\Gamma)}_n$, где последовательность функций $\{\phi^{(\Gamma)}_n(x_0\dots x_n)\}$ сходится в Z. При этом, благодаря непрерывности функционала $W^{\pi}_{\Gamma}(\phi)$, $W^{\pi}_{\Gamma}(\phi)=\lim_{n\to\infty}W^{\pi}_{\Gamma}(\phi^{(\Gamma)}_n)$ и

$$W^{\pi}_{\Gamma}\,(\phi^*\times\phi)=\lim_{n\to\infty}W^{\pi}_{\Gamma}\,(\phi^{(\Gamma)*}_n\times\phi^{(\Gamma)}_n)\,. \qquad (16)$$

В силу (15) (16) есть предел сходящейся числовой последовательности, все члены которой неотрицательны. Такой предел также не может быть отрицателен:

x/ Поэтому (11) является апостериорным подтверждением того, что, выбирая для $A(\phi)$ представление (1), мы не исключаем из рассмотрения никаких физических теорий.

если допустить, что $c=\lim_{n\to\infty}c_n$, все $c_n\geqslant 0$ и $c<0$, то для любого ϵ найдется такое N, что $|c|<\epsilon-c_N<\epsilon$. Ввиду $c=\mathrm{const}$ это означает, что $c<0$ невозможно. Тем самым мультипликативная положительность функционала $W^{\pi}_{\Gamma}(\phi)$ доказана. Вместо (13) мы получаем теперь:

$$\tilde{\tilde{W}}^{I}_{\phi}(\bar{a})-\tilde{\tilde{W}}^{J}_{\phi}(\bar{a})=F^{I}_{\phi}(\bar{a})-F^{J}_{\phi}(\bar{a})-\sum_{\Gamma}F^{I}_{\phi,\Gamma}(\bar{a})+\sum_{\Gamma}F^{J}_{\phi,\Gamma}(\bar{a})\,, \qquad (17)$$

где все слагаемые в правой части являются свертками мультипликативно-положительных функционалов в Z (новые символы F вместо W введены для указания на то, что в соответствующих членах интеграция совершается по области $\|x\|^2>\lambda^2/8n^2$.

Разность двух мультипликативно-положительных функционалов в общем случае не обладает мультипликативной положительностью, и представление (12) применимо лишь к каждому из этих слагаемых в отдельности. Но поскольку

$$|\tilde{\tilde{W}}^{I}_{\phi}(\bar{a})-\tilde{\tilde{W}}^{J}_{\phi}(\bar{a})|<|F^{I}_{\phi}(\bar{a})|+|F^{J}_{\phi}(\bar{a})|+\sum_{\Gamma}|F^{I}_{\phi,\Gamma}(\bar{a})|+\sum_{\Gamma}|F^{J}_{\phi,\Gamma}(\bar{a})|, \qquad (18)$$

то свойства убывания, требуемые леммой, также достаточно доказать независимо для каждого слагаемого в правой части (17). Обозначая любое такое слагаемое через $F_{\phi}(\bar{a})$, согласно теореме Бохнера-Шварца имеем для него

$$F_{\phi}(\bar{a})=\int\phi(x-\bar{a})\,d\mu(x)\,, \qquad (19)$$

где μ –положительная мера степенного роста с носителем в области $\|x\|^2>\lambda^2/8n^2$. Переходя к конечным мерам:

$$\tau(x)=(1+\|x\|^2)^{-p}\mu(x)\,,\ \int d\tau(x)=C<\infty\,,$$

имеем:

$$|F_{\phi}(\bar{a})|\leq C\max_{\|x\|^2>\lambda^2/8n^2}|(1+\|x\|^2)^{+p}\phi(x-\bar{a})|\,. \qquad (20)$$

Оценка (20) справедлива при любых $\bar{a}$ и λ. Отправляясь от нее, нетрудно доказать уже, что при $\lambda\to\infty$ величины $|F_\phi(\bar{a})|$ должны убывать быстрее любой степени λ. Действительно, ввиду $\phi(x-\bar{a})\in Z$ $\phi(x-\bar{a})$ убывает быстрее любой степени $\|x-\bar{a}\|$ при $\|x-\bar{a}\|\to\infty$. Имея оценки

$$\|\bar{a}\|^2>\lambda^2/2\,;\quad \|x-\bar{a}\|^2\geq\frac{1}{2}\,|(2\|x\|^2-1)(2\|\bar{a}\|^2-1)|$$

(получение их элементарно; так, например,

$$\lambda^2=(\bar{a}_j-\bar{a}_{j'})^2\leq\bar{a}_j^2+\bar{a}_{j'}^2+2|(\bar{a}_j\bar{a}_{j'})|<2(\bar{a}_j^2+\bar{a}_{j'}^2)<2\|a\|^2\,)$$

и с учетом ограничения $\|x\|^2>\lambda^2/8n^2$, заключаем, что область достаточно больших λ есть одновременно область достаточно больших $\|x\|^2$, $\|a\|^2$ и $\|x-a\|^2$. В этой области

$$|\phi(x-\bar{a})|\leq\frac{1}{\|x-a\|^{2M}}\leq\frac{2^M}{(2\|x\|^2-1)^M(\lambda^2-1)^M}\,,$$

и мы имеем

$$|F_\phi(\bar{a})|<\frac{c\cdot2^M}{(\lambda^2-1)^M}\max_{\|x\|^2>\frac{\lambda^2}{8n^2}}\left|\frac{(1+\|x\|^2)^p}{(2\|x\|^2-1)^M}\right|\,.$$

При достаточно больших $\|x\|$ и $M>p$ величина под знаком максимума будет монотонно убывающей функцией $\|x\|$. Поэтому при достаточно больших λ

$$|F_\phi(\bar{a})|<\frac{2^M\cdot c}{(\lambda^2-1)^M}\cdot\frac{(1+\lambda^2/8n^2)^p}{(\lambda^2/4n^2-1)^M}\,. \tag{21}$$

Выбирая здесь $M>\frac{1}{4}(N+2p)$ и учитывая (18), получаем из (21) подлежащее доказательству утверждение леммы Рюэля:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^N[\tilde{\tilde{W}}^I_\phi(\bar{a}_0\dots\bar{a}_n)-\tilde{\tilde{W}}^J_\phi(\bar{a}_0\dots\bar{a}_n)]=0\,. \tag{22}$$

Для доказательства существования асимптотических состояний нам непосредственно потребуются свойства убывания не разностей $\tilde{\tilde{W}}^I_\phi-\tilde{\tilde{W}}^J_\phi$, но каждой отдельной функции $\tilde{\tilde{W}}^\pi_\phi$ по трансляционно-инвариантным переменным $(\bar{a}_i-\bar{a}_j)$ при произвольном способе стремления последних к ∞. Такие свойства убывания не являются прямым следствием леммы, но требуют привлечения аксиомы спектральности. Учтем трансляционную инвариантность теории, введя замену переменных

$$\{x_{i_0}\dots x_{i_k},x_{i'_0}\dots x_{i'_{k'}}\}\to\{x=x_{i_0};\ \xi=x_{i'_0}-x_{i_0};\ \xi_{i_r}=x_{i_r}-x_{i_0};$$

$$\xi_{i'_{r'}}=x_{i'_{r'}}-x_{i'_0}\ ;\ (r=1\dots k,\ r'=1\dots k')\}$$

и полагая $\phi=\phi(x,\xi,\xi_i,\xi_{i'})$; $\tilde{\tilde{W}}^\pi=\tilde{\tilde{W}}^\pi(\xi;\xi_i,\xi_{i'})$. Поскольку для пространств Z и Z' сохраняет справедливость теорема о переходе свертки двух функций в произведение их фурье-образов при преобразовании Фурье, $\tilde{\tilde{W}}^\pi_\phi(\bar{a})$ может быть записана в виде:

$$\tilde{\tilde{W}}^\pi_\phi(\bar{a})=\int d^4p\prod_{r=1}^{k}d^4p_{i_r}\prod_{r'=1}^{k'}d^4p_{i'_{r'}}\ \tilde{\tilde{\phi}}(0,(p)_{i_k},(p)_{i'_{k'}})F\tilde{\tilde{W}}^\pi(p,(p)_{i_k},(p)_{i'_{k'}})\times \tag{23}$$

$$\times\exp i[p(\bar{a}_{i'_0}-\bar{a}_{i_0})+\sum_{r=1}^{k}p_{i_r}(\bar{a}_{i_r}-\bar{a}_{i_0})+\sum_{r'=1}^{k'}p_{i'_{r'}}(\bar{a}_{i'_{r'}}-\bar{a}_{i'_0})]\,,$$

где $(p)_{i_k}=p_{i_1}\dots p_{i_k}$.
В этом представлении основная функция $\tilde{\tilde{\phi}}$ лежит уже в пространстве D, а функционал $F\tilde{\tilde{W}}^\pi$ – в пространстве D'. В силу спектральности $F\tilde{\tilde{W}}^J(p,(p)_{i_k},(p)_{i'_{k'}})$ имеет носитель по переменной p в гиперболоиде V^μ_+, а функционал $F\tilde{\tilde{W}}^K(p,(p)_{i_k},(p)_{i'_{k'}})$, соответствующий перестановке $K=\{Y',Y\}$, – в гиперболоиде V^μ_-. Поэтому, выбирая функцию $h(p)$ из класса мультипликаторов в D и такую, что

$$h(p)=\begin{cases}1 & -\ p\in V^\mu_+\\ 0 & -\ p\in V^\mu_-\end{cases}\,,$$

и полагая

$$h(p)\tilde{\tilde{\phi}}(p;(p)_{i_k};(p)_{i'_k}) = \tilde{\tilde{\phi}}(p;(p)_{i_k};(p)_{i'_k}) \in D \ ,$$

получаем

$$\tilde{W}^{J}_{\psi}(\bar a) = \tilde{\tilde{W}}^{J}_{\phi}(\bar a) \ ; \quad \tilde{\tilde{W}}^{K}_{\psi}(\bar a) = 0 \ . \qquad (24)$$

Поскольку носители (в смысле теории аналитических функционалов) разностей $\tilde{\tilde{W}}^J - \tilde{\tilde{W}}^K$ и $\tilde{\tilde{W}}^I - \tilde{\tilde{W}}^J$, определяемые условием локальности, заключаются в одной и той же области (9), то для $\tilde{\tilde{W}}^J_{\psi}(\bar a) - \tilde{\tilde{W}}^K_{\psi}(\bar a)$ также имеет место 1-ая лемма Рюэля:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N [\tilde{\tilde{W}}^J_{\psi}(\bar a) - \tilde{\tilde{W}}^K_{\psi}(\bar a)] = 0 \ . \qquad (25)$$

В совокупности формулы (22,24,25) дают:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N \tilde{\tilde{W}}^I_{\phi}(\bar a_0 \dots \bar a_n) = 0 \ . \qquad (26)$$

Чисто геометрические соображения приводят к выводу о том, что (26) будет выполнено и при любом способе стремления $|\bar a_i - \bar a_j|$ к ∞. Кроме того, поскольку $\tilde{\tilde{W}}_{\phi}(\bar a) \equiv (\tilde{\tilde{W}} * \phi)(\bar a)$ как свертка с бесконечно дифференцируемой функцией ϕ также является бесконечно дифференцируемой функцией, причем $D(\tilde{\tilde{W}} * \phi)(\bar a) = (\tilde{\tilde{W}} * D\phi)(\bar a)$ (D – произвольный дифференциальный оператор), то уже полностью доказана для случая неперенормируемой теории

1-ая теорема Рюэля.

Величины $\tilde{\tilde{W}}_{\phi}(\bar a_0 \dots \bar a_n)$ и $P[\frac{\partial}{\partial a_0^0}, \dots \frac{\partial}{\partial a_n^0}]\tilde{\tilde{W}}_{\phi}(\bar a_0 .. \bar a_n)$, $c\phi \in Z$, рассматриваемые как функции разностей $(\bar a_i - \bar a_j)$, принадлежат пространству $S(R^{3n})$.

Результат, устанавливаемый этой теоремой, Рюэль называет пространственноподобным асимптотическим условием.

§ 4. Построение матрицы рассеяния

Для существования матрицы рассеяния в теории, исходящей из гейзенбергова поля $A(f)$, является достаточным, чтобы из $A(f)$ можно было определенным образом построить полную систему асимптотических (при $t \to \pm\infty$) состояний рассеяния. Согласно теории Хаага-Рюэля, исходными величинами для построения таких состояний выбираются векторы:

$$\Phi_n(t) = \prod_{i=1}^{n} B_i^*(t)\Omega \ ; \ B_i(t) = \int d\bar x \, f_i(\bar x, t)\overleftrightarrow{\partial_t} B(\bar x, t) \ , \qquad (27)$$

где $\{f_i(\bar x, t), \ i = 1,2,..\}$ – полная система положительночастотных гладких решений уравнения Клейна-Гордона. С помощью сильного постулата спектральности (формулировка которого не зависит от выбора пространства основных функций) нетрудно доказать, /8,9/ ч. 2, стр. 23) , что $B_i^*(t)\Omega$ принадлежат гильбертову пространству одночастичных состояний H_I:

$$H_I = \{\tilde{\tilde{f}}(p) : \int \frac{dp}{2\omega} |\tilde{\tilde{f}}(p)|^2 < \infty \ , \ \omega = \sqrt{p^2 + m^2} \ \} \qquad (28)$$

и обладают свойством стабильности, т.е. не зависят от времени t. Благодаря этому, если сильные пределы векторов (27) при $t \to \pm\infty$ существуют, то они могут быть интерпретированы как состояния системы n невзаимодействующих частиц – in – и out –состояния рассеяния. Задача построения S -матрицы заключается, таким образом, в доказательстве сильного асимптотического условия, которое формулирует

2-ая теорема Рюэля

Величины $\Phi_n(t)$, определенные согласно (27), обладают сильным пределом при $t \to \pm\infty$.

Доказательство

По построению $\Phi_n(t)$ при фиксированном n и изменяющемся t образуют последовательность векторов в гильбертовом пространстве теории $\mathcal{H}$. В силу полноты $\mathcal{H}$ для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. для всякого ϵ нашлось бы такое T, что для всех $t_{1,2} \geq T$ будет выполняться неравенство

$$\|\Phi_n(t_2) - \Phi_n(t_1)\| < \epsilon . \tag{29}$$

Пользуясь представлением $\Phi_n(t_2) - \Phi_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi_n}{dt}\, dt$ и разлагая норму $\| \frac{d\Phi_n}{dt} \|^2$ по усеченным функциям Уайтмана, находим, что для выполнения (29) достаточно, чтобы существовали и были интегрируемы в области больших t выражения

$$J_k(t) = \int \prod_{i=0}^{k} \{ d\bar{x}_i\, f_i(\bar{x}_i, t) \} \overleftrightarrow{\partial}_t \tilde{\tilde{W}}_{\phi}(0, \bar{x}_1 - \bar{x}_0, \dots 0, \bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) , \quad \underset{c}{\ } \ k > 1 \tag{30}$$

Свойства $J_k(t)$ по параметру t устанавливает

2-ая лемма Рюэля

Для класса гладких решений уравнения Клейна-Гордона

$$\tilde{f}(p) = \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)\check{f}(\bar{p}), \quad \check{f}(\bar{p}) \in D(R^3)$$

имеют место оценки:

1. $\max_{\bar{x}} | f(t,\bar{x}) |$ убывает, как $t^{-3/2}$ при $t \to +\infty$.
2. $| \int d\bar{x}\, f(t,\bar{x}) |$ растет не быстрее $t^{3/2}$ при $t \to \infty$.

В то время как 1-ая теорема Рюэля обеспечивает существование $J_k(t)$, 2-ая лемма Рюэля гарантирует его убывание с ростом t не слабее, чем $t^{-3/2(k-1)}$. Тем самым фундаментальность последовательности $\Phi_n(t)$ обеспечивается, и 2-ая теорема Рюэля доказана.

Таким образом, в неперенормируемой аксиоматической теории, подчиняющейся постулатам уайтмановского подхода, могут быть построены 2 системы асимптотических n -частичных состояний рассеяния

$$\Phi_n^{\substack{in \\ out}} = s - \lim_{t \to \pm\infty} \Phi_n(t) .$$

Согласно постулату асимптотической полноты, каждая из этих двух систем представляет собою базис в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{\substack{out \\ in}}$, причем $\mathcal{H}^{out} = \mathcal{H}^{in} = \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ -исходное пространство векторов $R\{A(f)\}\Omega$.

В этом едином гильбертовом пространстве определим унитарный оператор S -матрицу рассеяния

$$\Phi_k^{out} = S\Phi_k^{in} ; \quad \Phi_k^{in} = S^{+}\Phi_k^{out}$$

с элементами

$$S_{mn} = (\Phi_m^{in}, S\Phi_n^{in}) = (\Phi_m^{in}, \Phi_n^{out}) , \tag{31}$$

тем самым завершая поставленную задачу.

Представляет интерес дальнейшее исследование полученной матрицы рассеяния. В частности, было бы весьма любопытно проследить, как отразятся в уайтмановском формализме специфические отличия неперенормируемых теорий: близость к нелокальным взаимодействиям, отсутствие дисперсионных соотношений и др.

Всякое подобное исследование неизбежно должно опираться на какие-либо более конкретные представления матричных элементов, нежели (31). Поэтому ближайшей задачей теории Хаага-Рюэля для неперенормируемых взаимодействий является исследование одночастичной структуры матричных элементов /10/ (прежде всего - низших) и выяснение возможностей определения циклов Рюэля и получения редукционных формул /11,12/.

Автор глубоко благодарен В.С. Владимирову и в особенности М.К.Поливанову за многократные обсуждения, связанные с настоящей работой.

Литература

1. С. Хоружий. Препринт ОИЯИ, Р2-3085, Дубна, 1966.
2. R.Haag. Phys.Rev., 112, 669 (1958).
3. D.Ruelle. Helv.Phys.Acta, 35, 147 (1962).
4. A.Wightmen. In Theor.Physics, Trieste, 1963.
5. H.Araki, K. Hepp, D.Ruelle. Helv.Phys.Acta, 35, 164 (1962).
6. И. Гельфанд, Г.Шилов. Обобщенные функции, т. IV , М., 1958.
7. Л. Шварц. Математические методы для физических наук, М., 1965.
8. И. Тодоров. Труды Зимней школы теор. физики, Дубна, 1964.

9. H.Araki. Lectures, Zürich, 1962.
10. K.Hepp. Journal of Math. Phys., 6, 1172 (1965).
11. K.Hepp. Communications in Math. Phys., 1, 95 (1965).
12. С.Хоружий. Ядерная физика, 3, 176 (1966).
13. W.Güttinger. Nuovo Cimento, 10, 1 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1966 г.