ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3085

С.С. Хоружий

К ПОСТРОЕНИЮ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1. Неперенормируемые поля как аналитические функционалы

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P2-3085

Хоружий С.С.

К построению аксиоматической теории неперенормируемых взаимодействий.

1. Неперенормируемые поля как аналитические функционалы

Сформулирован формализм уайтмановского аксиоматического подхода для случая неперенормируемых взаимодействий. Исследованы различные критерии неперенормируемости теории. Найдено и проанализировано ослабленное условие локальности, выполняющееся в неперенормируемых теориях.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1966.

P2-3085

Khoruzhy S.S.

On the Construction of an Axiomatic Theory of Nonrenormalized Interactions I. Nonrenormalized Fields as Analytic Functionals

Formalism of the Wightman axiomatic approach is formulated for the case of nonrenormalized interactions. Various criteria of nonrenormalizability of the theory are investigated. A weakened locality condition, which is fulfilled in nonrenormalized theories, is found and analysed.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1966.

Р2 - 3085

С.С. Хоружий

К ПОСТРОЕНИЮ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1. Неперенормируемые поля как аналитические функционалы

§ 1. О критерии неперенормируемости

В обзорных работах аксиоматического направления в квантовой теории поля уже не раз отмечалось (см., например,[1,2]), что в так называемых неперенормируемых теориях матричные элементы допускают экспоненциальный рост в импульсном пространстве, и по этой причине они должны являться обобщенными функциями, действующими на основных функциях с компактным носителем в импульсном пространстве (пространство D_p). При этом их Фурье-образы - обобщенные функции в конфигурационном пространстве - будут аналитическими функционалами - обобщенными функциями над пространством Z целых аналитических функций определенного класса. Хотя учет этого обстоятельства, казалось бы, совершенно необходим для понимания математической природы неперенормируемых взаимодействий - до сих пор ни в аксиоматическом направлении, ни, насколько нам известно, в лагранжевом подходе не предпринималось сколько-нибудь систематических попыток трактовать неперенормируемые теории с указанной точки зрения. (Впрочем, отдельные вопросы рассматривались со сходных позиций в работах[3-7]). Последовательно провести такую трактовку, отправляясь от исходных положений уайтмановского аксиоматического подхода, и включить тем самым в его орбиту неперенормируемые теории является целью настоящей работы.

Исходными величинами теории являются в данном подходе гейзенберговы поля $A(f)$ и соответствующие им уайтмановские функции $W(f) = \langle A^n, f \rangle_0$. Поэтому прежде всего нам необходим критерий, который выражал бы свойство неперенормируемости теории в терминах этих величин. Как уже упоминалось, в качестве такого критерия без особенных обсуждений указывают обычно

К р и т е р и й А: уайтмановские функции $W(f)$ в импульсном пространстве суть обобщенные функции над пространством D_p.

Однако является a priori далеко не очевидным, что этот критерий выделяет в точности тот же класс теорий, что и нижеследующий пертурбационный критерий, который служит одновременно определением неперенормируемой теории.

Критерий В: число различных примитивно расходящихся диаграмм теории возмущений является бесконечным.

Для установления связей между (А) и (В) рассмотрим наряду с ними критерий неперенормируемости, принятый в аксиоматическом подходе Боголюбова-Медведева-Поливанова[8].

Критерий Б: Матричные элементы S-матрицы (во всяком случае, некоторые из них) не обладают конечными индексами роста по импульсам (т.е. являются, иначе говоря, обобщенными функциями в пространстве D_p).

Как мы покажем в настоящей работе, теории, выделяемые критерием (А), обладают S-матрицей, матричные элементы которой также суть обобщенные функции в пространстве D_p. Следовательно, из (А) вытекает (Б). С другой стороны, если определить уайтмановские функции для теории, удовлетворяющей критерию (Б), то они, очевидно, также будут обобщенными функциями над D_p. Тем самым, из (Б) следует (А), и оба критерия вполне тождественны.

Чтобы доказать далее их совпадение с (В), требуется установить: 1) если теория удовлетворяет (В), т.е. в ряду теории возмущений найдутся члены со сколь угодно высокой наперед заданной степенью роста (об эквивалентности этого свойства критерию (В) - см.[9], § 28), то и сумма ряда не будет обладать ограниченной степенью роста. 2) В разложении теории возмущений для матричных элементов теории, удовлетворяющей (Б), найдутся члены с любой наперед заданной степенью роста.

Общее доказательство утверждения (1) неизбежно должно затрагивать проблемы сходимости ряда теории возмущений и возможности решений с особенностью по константе связи. Поэтому оно вряд ли выполнимо в настоящее время, хотя для некоторых конкретных теорий утверждение (1) и удалось установить[4,7]. Что же касается (2), то это утверждение несложно доказать в рамках подхода Боголюбова-Медведева-Поливанова. Рассмотрим, например, один из низших матричных элементов:

$$\left\langle \frac{\delta j(x)}{\delta \phi(y)} \right\rangle_0 = v_2(x,y) = \theta(x-y)\langle [j(x), j(y)] \rangle_0 + \Lambda_2(x,y) = v_2^* + \Lambda_2 ,$$

где низший "токоподобный оператор" Λ_2 имеет ту же степень роста, что и v^*_2, а обобщенная функция v^*_2 не обладает неоднозначностью в точках совпадения аргументов

$$v_2(x,y)=\theta(x-y)\sum_{\nu}<0|j(x)\nu><\nu|j(y)|0>-(x\to y)+\Lambda_2.$$

Согласно правилам вариационного дифференцирования в подходе Боголюбова,

$$<0|j(x)|\nu> = v_{\nu+1}(x;y_1 \ldots y_\nu)=v^*_{\nu+1}+\Lambda_{\nu+1}.$$

Следовательно, разложение теории возмущений для $v_2(x,y)$ будет иметь вид:

$$r_2=\sum_n g^n r_2^{(n)} \; ; \; r_2^{(n)}=\theta(x-y)\sum_\nu \sum_j v_\nu^{(j)} \cdot v_\nu^{(n-j)} \approx \sum_\nu \Lambda_\nu \cdot \Lambda_\nu.$$

Видно отсюда, что если нет общего ограничения степени роста всех Λ_ν, то $r_2^{(n)}$ будет иметь неограниченную степень роста (и ограниченную – в противном случае). Утверждение (2) доказано.

Кроме того отметим, что из предположения о существовании конечного индекса роста у всех матричных элементов вытекает конечность числа матричных элементов с неотрицательными индексами роста /8/, чем боголюбовский критерий еще более приближается к критерию теории возмущений. Окончательно можем сказать: совпадение трех рассмотренных критериев установлено с точностью до отсутствия решений с особенностью по константе связи. Именно в этом смысле мы будем называть далее (A) критерием неперенормируемости теории.

Замечание. Существует класс теорий, которые не охватываются критерием (A), являясь еще более сингулярными. Пространство основных функций в таких теориях уже, чем пространство D_p (например, это может быть пространство $D_p(a)$, и т.п.). Примеры таких теорий могут быть построены /4/. Однако, как указывает Шроер в той же работе, все такие теории не соответствуют никакой физической реальности, ибо в них нельзя построить состояний типа плоских волн.

§ 2. Пространства аналитических функций. Аналитические функционалы

1. Пространства аналитических функций

Мы видим, что математическим аппаратом аксиоматической теории неперенормируемых взаимодействий должна служить теория функционалов в линейных топологических пространствах аналитических функций. Видно также, что наиболее важным из таких пространств явится для нашей теории пространство основных функций, фурье-образы которых принадлежат пространству $D(R^n)$, состоящему из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Это есть пространство $Z(C^n)$ /10/, которое содержит все целые аналитические функции $\psi(z)$, удовлетворяющие неравенствами:

$$|z^k \psi(z)| \leq C_k(\psi)\, e^{a(\psi)|\mathrm{Im}\, z|}, \tag{1}$$

где

$$z = (z_1 \dots z_n);\; z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n};\; |\mathrm{Im}\, z| = |\mathrm{Im}\, z_1| + \dots + |\mathrm{Im}\, z_n|. \tag{2}$$

Топологически пространство $Z(C^n)$ является индуктивным пределом в узком смысле /11/ семейства счетно-нормированных пространств $Z^{(a)}(C^n)$, в которых топология может быть задана следующей счетной последовательностью норм:

$$\|\psi\|_p = \sup_{z \in C^n,\, k \leq p} |z^k \psi(z)|\, e^{-a|\mathrm{Im}\, z|}. \tag{3}$$

Это означает, что последовательность функций $\{\psi_\nu(z)\}$, $\psi_\nu \in Z(C^n)$ считается сходящейся к 0 в $Z(C^n)$ тогда и только тогда, если все ψ_n принадлежат одному и тому же $Z^{(a)}(C^n)$ и в нем сходятся к 0 по его топологии /3/.

Подобно пространствам S и D, пространство Z ядерно: прямое произведение $Z(C)$ плотно в $Z(C^n)$, и каждый полилинейный функционал в $Z(C)$ является одновременно линейным функционалом в соответствующем $Z(C^n)$. Функции из $Z(C^n)$, рассматриваемые при вещественных значениях аргументов, принадлежат пространству Шварца $S(R^n)$, образуя в нем плотное множество. Вещественные преобразования Фурье этих функций составляют пространство D, которое также плотно в S, но нигде не пересекается с Z (/12/, стр. 220). Поэтому в Z нет ни одной функции с компактным носителем, и, в частности, из функций этого пространства нельзя построить разбиения единицы. Мультипликаторами (т.е. функциями, умножение на которые не выводит за пределы соответствующего пространства) являются в пространстве Z целые аналитические функции, подчиняющиеся неравенствам: $|\psi(z)| < C_m(1+|z|^m)\, e^{b|\mathrm{Im}\, z|}$.

Кроме пространства $Z(C^n)$ в дальнейшем нам неоднократно понадобятся пространства функций, голоморфных не на всем C^n, но на некотором его вещественном или комплексном аналитическом подмногообразии G. Такие пространства обычно строились не из Z, но из более простого пространства голоморфных функций H, снабженного топологией равномерной сходимости на каждом компакте[13-15]. Понятно, что такая топология слабее топологии Z, и $Z(C^n)\subset H(C^n)$. $H(C^n)$включает в себя целые функции любых порядков и типов. Если G – открытое множество, то пространство функций, голоморфных на G, можно наделить такой же топологией, которую будем считать заданной следующей счетной последовательностью норм:

$$\|\psi\|_p = \sup_{z \subset K_p} |\psi(z)|. \qquad (4)$$

($\{K_p\}$ – некоторая последовательность компактов, покрывающая G; $K_p \subset K_{p+1}$). Подобно $H(C^n)$, $H(G)$ будет полным метрическим пространством (пространством типа F[13]).

В ряде проблем нам придется рассматривать также случаи, когда G – замкнутое множество ($G=\bar{G}$). Поскольку такие G не являются естественными множествами задания аналитической функции, пространство $H(G)$ в этом случае обладает более сложной структурой. Его элементы называются локально аналитическими функциями на G и строятся следующим образом. Пусть Ω_G –множество всех открытых множеств, содержащих $\bar{G}$. Две функции $f, g \in \bigcup_{V\in\Omega_G} H(V)$ будем называть эквивалентными[16], если их сужения на множество $\bar{G}$ равны. Соответствующие классы эквивалентности, на которые разбивается объединение $\bigcup_{V\in\Omega_G} H(V)$, называются функциями, локально аналитическими на $\bar{G}$. (Если G открыто, то такая процедура приводит к пространству, которое изоморфно $H(G)$, определенному обычным образом. Во всех случаях, когда к множеству $\bar{G}$ применима теорема о единственности аналитической функции, локально аналитические функции фактически являются просто функциями, аналитическими в некоторой окрестности $\bar{G}$). Пространство таких функций $H(\bar{G})$ можно наделить топологией индуктивного предела последовательности пространств типа F[17,18]. Согласно этой топологии, последовательность функций $g_\nu(z)\in H(\bar{G})$ называется сходящейся к 0, если существует область $G'\supset\bar{G}$, в которой все функции g_ν остаются аналитическими и равномерно стремятся к 0. Пространство $H(\bar{G})$ неметризуемо, но, несмотря на это, непрерывность линейных функционалов в нем можно проверять, используя лишь счетные последовательности его элементов.

В нашей теории, где исходным является пространство $Z(C^n)$, функциональное пространство над областью $G \subset C^n$ естественно определить как пространство функций, которые в области G удовлетворяют тем же требованиям, что и функции из пространства $Z(C^n)$. Соответственно, для произвольного открытого множества $G \subset \dot{C}^n$ пространством $Z(G)$ назовем пространство всех функций, которые аналитичны в G, обладают первым экспоненциальным порядком роста на бесконечности (если $\infty \in G$), и убывают по вещественной оси быстрее любой степени(если $\infty_R \in G$). Подобно $Z(C^n)$, каждое пространство $Z(G)$ будет индуктивным пределом в узком смысле семейства счетно-нормированных пространств $Z^{(a)}(G)$, топология которых определяется следующей системой норм:

$$\|\psi\|_p = \sup_{\substack{z \in G \\ k \leq p}} |z^k \psi(z)| \, e^{-a|\operatorname{Im} z|} . \tag{5}$$

Если G – замкнутое множество, то пространство локально аналитических функций $Z(\bar{G})$ строим по образцу $H(\bar{G})$, но исходя теперь из пространства $\bigcup_{D \in \Omega_G} Z(D)$. Топология $Z(\bar{G})$ будет, очевидно, топологией двойного индуктивного предела пространств $Z^{(a)}(D)$:

$$Z(\tilde{G}) = \varinjlim_{D \supset \bar{G}} \ \varinjlim_{a \to \infty} Z^{(a)}(D). \tag{6}$$

Нетрудно доказать, что, когда G –ограниченное множество, топология (5) эквивалентна топологии равномерной сходимости на каждом компакте, принадлежащем G. Действительно, в силу /4,5/

$$\|\psi\|_p = \sup_{\substack{z \in G \\ k \leq p}} |z^k \psi(z)| \, e^{-a|\operatorname{Im} z|} \leq \sup_{\substack{z \in G \\ k \leq p}} |z^k| \, e^{-a|\operatorname{Im} z|} \times$$

$$\times \sup_{z \in G} |\psi(z)| \leq C \sup_{z \in G} |\psi(z)| = C \sup_{z \in K_v} |\psi(z)| .$$

Здесь C– константа, не зависящая от ψ, и K_v – некоторый компакт. Точно так же можно показать, что $\|\psi\|_p \geq C' \sup_{z \in K_s} |\psi(z)|$ (где K_s принадлежит тому же покрытию множества G, что и K_v), и эквивалентность обеих систем норм доказана. Тем самым, в случае ограниченного множества G, пространства $Z(G)$ и $H(G)$ совпадают по запасу функций.

II. Аналитические функционалы

Определение 1. (Определение аналитического функционала) x).

Аналитическим функционалом, определенным на множестве $G \subset C^n$, мы будем называть элемент пространства, двойственного какому-либо пространству функций, аналитических (или же локально аналитических, если G -замкнутое множество) на G.

Согласно результатам § 1, обобщенные функции неперенормируемых теорий являются аналитическими функционалами из пространства $Z'(C^n)$. В этом пространстве мы будем использовать, как правило, слабую топологию сопряженного пространства ([10] т. 2, § 5). Поскольку пространства D и $Z = F[D]$ не являются совершенными, то слабая и сильная топология в $Z'(C^n)$ не совпадают.

Является существенно важным для физических целей, чтобы в используемом пространстве обобщенных функций можно было выделять функционалы, относящиеся не ко всему пространству скаляров, но к определенной его ограниченной, либо неограниченной области. Для пространства аналитических функционалов процедура такого выделения отнюдь не тривиальна, поскольку основные функции не могут обращаться в 0 на множествах ненулевой меры и обычного понятия носителя для аналитического функционала сформулировать нельзя. Вместо него мы, следуя идеям Мартино[17], впервые в [19], введем следующее.

Определение 2. (Определение носителя аналитического функционала в пространстве Z).

Будем говорить, что аналитический функционал $F \subset Z'(C^n)$ имеет своим носителем замкнутое множество G, если F допускает непрерывное продолжение на пространстве локально аналитических функций $Z(\bar{G})$ и не допускает никаких дальнейших продолжений.

Согласно этому определению, функционал в пространстве $Z(C^n)$, имеющий носитель в множестве $G \subset C^n$, будет элементом пространства $Z'(\bar{G}) \subset Z'(C^n)$. Было доказано[20], что в пространствах типа $H'(G)$, $Z'(G)$, сопряженных к индуктивным пределам в узком смысле пространств типа F, может быть введена топология проективного предела: если $H(G) = \varinjlim_{D \supset G} H(D)$, то $H'(G) = \varprojlim_{D \supset G} H'(D)$.

---

x) Мы будем пользоваться общепринятой терминологией[15-18], которая несколько разнится от таковой Гельфанда и Шилова[10].

Соответственно, пространства типа $Z'(G)$ допускают топологию двойного проективного предела пространств $Z'^{(a)}(D)$.

При всех существенных отличиях, отражающих специфику теории голоморфных функций, определение 2 все же до известной степени родственно обычному: оба они отражают тот факт, что обобщенная функция с носителем в данном множестве зависит от поведения основных функций только в окрестности этого множества. Легко увидеть, что определение 2 эквивалентно следующему основному свойству обычного понятия носителя: линейный непрерывный функционал $F\in\Phi'(R)$, имеющий носитель в множестве T , обладает непрерывным расширением на пространство всех функций, совпадающих в T с функциями из $\Phi(R)$ ($\Phi(R)$ - произвольное пространство основных функций над полем вещественных чисел). Требования, предъявляемые к обычному понятию носителя, не исчерпываются этим свойством. Однако последнего все же оказывается достаточным, чтобы неперенормируемые теории обладали определенными (хотя и более слабыми сравнительно с перенормируемым случаем) свойствами локальности.

§ 3. Постулаты неперенормируемой теории

Определим теперь основной объект аксиоматической неперенормируемой теории - квантованное гейзенбергово поле над пространством $Z(C)$ основных функций, и сформулируем для такой теории систему постулатов Уайтмана /21/.

I . Определение пространства состояний и оператора гейзенбергова поля

Изучается теория одного нейтрального скалярного поля A с ненулевой массой. Гейзенбергово поле $A(f)$ есть операторнозначная обобщенная функция над пространством $Z(C^4)$, т.е. для всех $f\in Z$, $A(f)\equiv\langle A,f\rangle$ есть неограниченный оператор в гильбертовом пространстве векторов состояния $\mathcal{H}$, и $(\Phi, A(f)\Psi)$ с $\Phi,\Psi\in\mathcal{H}$ есть обобщенная функция в $Z(C^4)$. Существует общая область $D\subset\mathcal{H}$, на которой определен $A(f)$ для всех $f\in Z(C^4)$. Эта область линейна и плотна в $\mathcal{H}$, $A(f)D\subset D$. Последним условием обеспечивается существование ожиданий $(\Psi, A(f_1)\ldots A(f_n)\Psi)$ для всех Ψ из D , как полилинейных функционалов в $Z(C^4)$. Благодаря ядерности Z , эти ожидания одновременно являются линейными функционалами в соответствующем пространстве $Z(C^{4n})$ и допускают обозначение $(\Psi, A(z_1)\ldots A(z_n)\Psi)$.

Прежде чем переходить к другим постулатам, обратим внимание на то, что уже сама формулировка их является проблемой в строящейся нами теории. Согласно постулату I, поля и их вакуумные ожидания суть аналитические функционалы, а поле скаляров для таких объектов есть C, а не R. Поэтому выразить пространственно-временные свойства этой теории - такие, как трансляционная, лоренцова и CPT-инвариантность, локальность и слабая локальность, и др. оказывается возможным лишь косвенно, посредством нетривиальной математической процедуры. Именно, каждый раз, когда нам потребуется сформулировать для аналитического функционала $F \in Z'$ какое-либо условие пространственно-временного характера, будем поступать следующим образом. Будем рассматривать наряду с основными функциями $\psi(x+iy) \in Z(C)$ также их ограничения вещественной областью - "следы": $\psi^{(R)}(x) = \psi(x+iy)|_{y=0}$. Это суть функции из пространства Шварца, образующие в нем плотное множество (подпространство, которое мы будем обозначать через $Z|_R$) и являющиеся вещественными преобразованиями Фурье - функций с компактным носителем. Далее, поскольку S' плотно в Z', то в Z' существует всюду плотное множество G', обладающее следующим свойством. Для каждого аналитического функционала $F \in Z'$ найдется обобщенная функция $F^* \in S'$ такая, что

$$<F(z), \psi(z)> = (F^*, \psi^{(R)}(x)) \quad \text{для} \quad \text{всех } \psi \in Z. \tag{7}$$

Здесь $<F, \psi>$ и (F^*, ϕ) - обозначения функционалов, соответственно, в пространствах Z и S). Докажем

Предложение 1.

Функционал F^*, определенный согласно (7) на плотном множестве $Z|_R \in S$, может быть однозначно и непрерывно доопределен на все пространство S.

Доказательство

Достаточным (и необходимым) условием непрерывности линейного функционала в пространстве с выполненной 1-ой аксиомой счетности, и, в частности, в пространстве Шварца, является его ограниченность на каждом ограниченном множестве функций. Имеем:

$$|(F^*, \psi^{(R)})| = |<F, \psi>| = (2\pi)^n \, |<\tilde{\tilde{F}}, \tilde{\tilde{\psi}}>|,$$

где $\tilde{F} = \mathfrak{L}^{-1}[F] \in D'$, $\tilde{\psi} = \mathfrak{L}^{-1}[\psi] \in D$ ($\mathfrak{L}$ – оператор преобразования Лапласа). Поскольку $\tilde{F}$ как обобщенная функция в пространстве D есть непрерывный функционал, то отсюда

$$|(F^*, \psi^{(R)})| \leq C \|\psi\|_m, \qquad \text{для всех } \tilde{\psi} \in D[U_{0,R}],$$

где $D[U_{0,R}]$ – ограниченное множество в пространстве D (множество C^∞-функций с носителем в шаре $U_{0,R}$), и $\| \ \|_m$– некоторая норма в пространстве Шварца. Оператор Фурье переводит ограниченные множества из D в ограниченные множества из $Z|_R$ и поэтому

$$|(F^*, \psi^{(R)})| \leq C' \|\psi^{(R)}\|_m, . \tag{8}$$

Поскольку ограниченные множества в $Z|_R$ являются одновременно ограниченными множествами в S и $Z|_R$ плотно в S , то окончательно из (8) имеем:

$$|(F^*, \phi)| \leq C' \|\phi\|_m,$$

для всех ϕ из произвольного ограниченного множества в пространстве Шварца. Предложение доказано.

Определение 3. Будем говорить, что аналитический функционал $F \in Z'(C^n)$ обладает данным пространственно-временным свойствам (локальностью, лоренц-инвариантностью и др.), если этим свойством обладает в обычном смысле функционал $F^* \subset S'(R^n)$,связанный соотношением (7) с аналитическими функционалами из G'.

Это определение носит несколько формальный характер, поскольку оно еще не дает явной характеризации класса аналитических функционалов, удовлетворяющих данному физическому условию. Однако соотношения (7) достаточно для решения такой задачи в каждом конкретном случае.

Продолжим формулировку постулатов, пользуясь данным определением.

II . Релятивистская инвариантность. Существование и единственность вакуума

В гильбертовом пространстве теории $\mathcal{H}$ действует унитарное представление группы Пуанкаре $U(a,\Lambda)$, $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$. Существует единственный вектор Ω , инвариантный относительно всех операторов представления:

$$U(a,\Lambda)\Phi = \Phi_{(a,\Lambda)}; \ U(a,\Lambda) D \subset D$$
$$U(a,\Lambda)\Omega = \Omega; \ \ \Omega \in D. \tag{9}$$

Чтобы получить соответствующий закон преображения для операторов поля и их вакуумных ожиданий, воспользуемся вышесформулированной схемой. В соответствии с ней требование релятивистской инвариантности произвольной функции Уайтмана выразится условием:

$$< W, \psi > = (W^*, \psi^{(R)}) = (W^*, \psi^{(R)}_{(a,\Lambda)}) . \tag{10}$$

Функция $\psi^{(R)}_{(a,\Lambda)} = \psi^{(R)}(\Lambda^{-1}(x_0 - a)\ldots\Lambda^{-1}(x_n - a) \in Z|_R$ и является следом голоморфной функции $\psi_{(a,\Lambda)}(z) = \psi(\Lambda^{-1}(x_0 - a + iy_0)i\ldots)$. Поэтому

$$(W^*, \psi^{(R)}_{(a,\Lambda)}) = < W, \psi_{(a,\Lambda)} >,$$

что в совокупности с (10) дает:

$$< W, \psi > = < W, \psi_{(a,\Lambda)} > \tag{11}$$

искомую формулировку требования релятивистской инвариантности аналитического функционала W. Согласно постулату 1, возможна эквивалентная запись:

$$W(\Lambda z_0 + a; \ldots \Lambda z_n + a) = W(z_0 \ldots z_n) \tag{11'}$$

для всех вещественных a и $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$.

Пользуясь аналитичностью основных функций, нетрудно при некоторых добавочных ограничениях существенно усилить полученные условия.

Докажем сначала, что из (11) следует инвариантность функций Уайтмана также относительно любых комплексных трансляций $h = a + ib$.

Предложение 2.

Если

$$< W(z), \psi(z - a) - \psi(z) > = 0 \tag{12}$$

(где $z - a = (z_0 - a; \ldots z_n - a)$) для всех вещественных a и всех $\psi \in Z$, то и $< W(z), \psi(z - h) - \psi(z) > = 0$ для всех комплексных h.

Доказательство.

Ввиду $\psi(z - h) \subset Z$ ряд Тэйлора

$$\psi(z - h) = \sum_{a=0} \frac{h^a}{a!} \psi^{(a)}(z)$$

равномерно сходится во всей h -плоскости, причем сходимость имеет место также и в топологии пространства Z ([10], т. 1, стр. 178). Поэтому

$$\langle W(z), \psi(z-h) - \psi(z)\rangle = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{h^q}{q!} \langle W(z), \psi^{(q)}(z)\rangle . \qquad (13)$$

Здесь правая часть – степенной ряд с численными коэффициентами, равномерно сходящийся во всей h -плоскости. При этом на вещественной оси h -плоскости, согласно (12), (13), будем иметь:

$$\langle W(z), \psi(z-a) - \psi(z)\rangle = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a}{q!} \langle W(z), \psi^{(q)}(z)\rangle = 0 . \qquad (14)$$

Однако сумма степенного ряда внутри круга его сходимости (в нашем случае – во всей плоскости) представляет аналитическую функцию. Согласно (14), эта функция обращается в 0 на всей вещественной оси и, следовательно, она тождественно равна 0. Предложение доказано.

Следствие 1.

В пространстве Z свертка с основной функцией является не только бесконечно дифференцируемой, но и аналитической функцией своего аргумента.

Следствие 2.

Функции Уайтмана фактически зависят только от разностей трансляционно-инвариантных переменных: $W = W(z_0 - z_1; \dots z_{n-1} - z_n)$.

Что же касается свойств лоренц-инвариантности, то можно доказать следующее утверждение, фактически являющееся распространением известной леммы Холла-Уайтмана /22/ с аналитических функций на аналитические функционалы в пространстве Z .

Предложение 3.

Если условие инвариантности

$$\langle W(z), \psi(\Lambda^{-1} z) - \psi(z)\rangle = 0 \qquad (15)$$

имеет место для всех $\Lambda \subset L_+^{\uparrow}$ и $\psi \in Z$, то оно будет выполняться также и для любых комплексных преобразований Лоренца $\Lambda \in \mathfrak{L}_+$ (группа комплексных собственных преобразований Лоренца).

Доказательство будет комбинацией доказательства предыдущего предложения с обычным доказательством леммы Холла-Уайтмана.

В некоторой окрестности единичного преобразования $N \subset \mathfrak{L}_+$ можно ввести канонические координаты $(\lambda_1 \dots \lambda_6) \subset C^6$ такие, что преобразованиям из $L_+^{\uparrow}$ будут соответствовать вещественные значения λ_i . Функции $\psi(\Lambda^{-1} z) = \chi(\lambda, z)$

аналитичны по $\Lambda, \Lambda^{\nu}_{\mu}$ аналитичны по λ_1, и, следовательно, $\chi(\lambda, z)$ – аналитическая функция λ_1 в области N' (образ окрестности N в пространстве параметров λ_1). Разлагая $\chi(\lambda, z)$ в ряд Маклорена по λ, равномерно сходящийся в N', а также сходящийся в топологии Z, получим формулу, аналогичную (13):

$$< W(z), \chi(\lambda, z) - \chi(z) > = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda^q}{q!} < W(z), D^q_{\lambda} \chi(\lambda, z)|_{\lambda=0} >.$$

Согласно (11), при всех вещественных значениях $\lambda \in N'$ этот ряд сходится к 0. Поскольку он в соответствующем круге сходимости представляет аналитическую функцию λ, заключаем отсюда, что функции Уайтмана будут инвариантны относительно комплексных преобразований Лоренца из $N \subset \mathfrak{L}_+$.

Чтобы расширить N до всей группы $\mathfrak{L}_+$, для произвольного $\Lambda \in \mathfrak{L}$ построим непрерывную последовательность преобразований – "кривую" $\{\Lambda(t)\}$, соединенную Λ с единичным преобразованием: $\Lambda(0) = 1$, $\Lambda(1) = \Lambda$, $\Lambda(t) \in \mathfrak{L}_+$. Такая кривая может быть покрыта конечным числом перекрывающихся окрестностей. При некотором достаточно малом $t = t_k$, $\Lambda(t_k) \in N$ и, как мы видели,

$$< W(z), \psi(\Lambda(t_k)^{-1} z) > = < W(z), \psi(z) > .$$

Совершенно аналогично доказательству этой формулы можно показать теперь, что для некоторого $\Lambda(t_j) \in N$

$$< W(z), \psi(\Lambda(t_j)^{-1} \Lambda(t_k)^{-1} z) > = < W(z), \psi(\Lambda(t_k)^{-1} z) > .$$

Ввиду $\Lambda(t_j)\Lambda(t_k) = \Lambda(t_j + t_k)$ /22/ , имеем уже:

$$< W(t), \psi(\Lambda(t_j + t_k)^{-1} z) > = < W(z), \psi(z) > .$$

В итоге конечного числа таких шагов получим требуемый результат:

$$< W(z), \psi(\Lambda^{-1} z) > = < W(z), \psi(z) > \quad \text{для всех} \quad \Lambda \in \mathfrak{L}_+ .$$

Предложение 3 доказано.

Замечание 1.

Результаты предложений 2 и 3 справедливы для функционалов в любых пространствах голоморфных функций, ибо ограничения на порядок роста основных функций не были использованы в доказательствах. Единственное (и весьма слабое) ограничение следующее: ряд Тэйлора для основных функций должен сходиться также по топологии соответствующего пространства.

Замечание 2.

Постулат трансляционной инвариантности совместим не с любым и предположениями о выборе пространства основных функций. Так, оператор трансляций $U(a,1)$ не может быть определен над пространством $D(a)$ и т.п.

III . Спектральность (в сильной форме)

Оператор трансляций $U(a,1) \equiv T(a)$ обладает спектральным разложением:

$$T(a) = \int e^{ipa}\, dE(p), \tag{16}$$

где E – неотрицательная проекторнозначная мера. Носитель E удовлетворяет условию:

$$\mathrm{supp}\ E \subset \{p=0\} \cup \bar{V}^{+}_{\mu}, \tag{17}$$

причем собственное значение $p=0$ не вырождено, и соответствующим ему собственным вектором является вакуум Ω . $\bar{V}^{+}_{\mu}$ в (17) есть замыкание "верхней полы" гиперболоида $\{p_0^2 - p^2 \geq \mu^2\}$. Поскольку E – просто оператор в $\mathcal{H}$, а не операторнозначная обобщенная функция, то постулат спектральности должен равно выполняться в любых трансляционно-инвариантных перенормируемых и неперенормируемых теориях.

IV . Положительная определенность метрики в гильбертовом пространстве состояний:

$$(\Phi, \Phi^*) \geq 0 \qquad \text{для всех } \Phi \in \mathcal{H}. \tag{18}$$

Полагая в (18) $\Phi = \prod_{i=1}^{m} A(f_i)\,\Omega$ и с учетом ядерности Z находим, что прямым следствием (18) является: функции Уайтмана суть мультипликативно-положительные непрерывные функционалы в Z :

$$W(\phi \times \phi^*) \geq 0 \qquad \text{для всех } \phi \in Z .$$

V. Полнота (неприводимость) поля

Система операторов $\{A(f)\}$, где f пробегает все функции из Z , является полной в $\mathcal{H}$: если $[\hat{C}, A(f)] = 0$ для всех f из Z , то $\hat{C} = \alpha 1$.

В теории, исходящей из обобщенных функций умеренного роста, Рюэлем /23/ был доказан следующий существенный результат.

Теорема. Если поле $A(\phi)$ является операторнозначной обобщенной функцией в пространстве S и подчиняется постулатам I, II, III, то неприводимость $A(\phi)$ эквивалентна цикличности вакуума Ω относительно операторной алгебры $R\{A(\phi)\}$.

Нетрудно показать, что эта теорема Рюэля имеет место и в неперенормируемых теориях. Согласно Уайтману /1/, для ее доказательства достаточно, чтобы некоторый определенным образом построенный полином по $A(\phi) - \mathcal{P}[A(\phi)]$ допускал бы преобразование: $\mathcal{P} \to \hat{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{P}[A(\hat{\phi})]$, где функции $\hat{\phi}$ получаются из ϕ так: фурье-образы функций ϕ – основные функции $\tilde{\phi}$ в импульсном пространстве – умножаются на функцию $h(p)$, которая равна 1 на физическом спектре (носитель меры E) и 0 – в точках отрицательного или непрерывного спектра:

$$\tilde{\hat{\phi}} = h\tilde{\phi}; \quad h(p) = \begin{cases} 1 - p \in V_+ \\ 0 - p \notin V_+ \end{cases} \tag{19}$$

В нашем случае $\tilde{\phi} \in D$. Функция $h(p)$, обладающая свойством (19), может быть выбрана из класса мультипликаторов в D, и мы получим $\tilde{\hat{\phi}} \in D$; $\hat{\phi} \in Z$. Тем самым поле на функциях $\hat{\phi}$ будет определено, и преобразование $\mathcal{P} \to \hat{\mathcal{P}}$ является корректным, поскольку не выводит из класса аналитических функционалов. В остальном доказательство теоремы Рюэля сохраняется для нашего случая без изменений.

Постулату неприводимости поля может быть дана теперь следующая эквивалентная формулировка:

вакуум Ω является циклическим вектором в $\mathcal{H}$ относительно полиномиальной алгебры поля $A(\phi)$.

VI. Локальность

Как известно, для формулировки локальных свойств физической теории вводятся наблюдаемые, относящиеся либо к точке (в классических теориях), либо к определенной, ограниченной или неограниченной, области пространства-времени. Наблюдаемые, локализованные в данной области $G \subset M$ (M – пространство Минковского), в обычном варианте аксиоматического подхода строятся как значения соответствующих операторнозначных функционалов на основных функциях с носителями, заключенными в G . В нашем случае носитель основной функции совпадает либо с нулем, либо со всем C^{4n} , и указанный путь непригоден. С этим связаны делавшиеся неоднократно (например,[3,9]) сближения неперенормируемых и нелокальных теорий.

Однако, тем не менее, сформулированная нами схема описания пространственно-временных свойств неперенормируемых теорий применима и к свойству локальности. Она не дает возможности непосредственно построить локальные наблюдаемые, но все же позволяет показать, что функции Уайтмана могут удовлетворять некоторым требованиям, являющимся прямыми аналогами локальности. Как следствие этого, оказывается, что все неперенормируемые теории обладают весьма ослабленными локальными свойствами, но отнюдь не все из них являются нелокальными в точном смысле.

Для применения в рамках нашей схемы мы сформулируем обычное условие локальности как требование к носителю функции Уайтмана. Именно, если $W(x_0 \ldots x_n) \in S'$ (или D'), то свойство локальности выражается как симметричность $W(x_0 \ldots x_n)$ во взаимно пространственно-подобных точках:

$$W(x_0 .. x_i .. x_j .. x_n) - W(x_0 .. x_j .. x_i .. x_n) \text{если} \qquad (x_i - x_j)^2 \leq 0 .$$

В смысле теории обобщенных функций (20) означает:

$$(W(x_0 .. x_n), f(x_0 .. x_i \ldots x_j .. x_n) - f(x_0 .. x_j .. x_i .. x_n)) = 0,$$

если $f(x_0 - x_n) = 0$ при $(x_i - x_j)^2 \geq 0$, и $f \in S$ или, что то же

$$\operatorname{supp}[A(ij)\, W(x_0 \ldots x_n)] = \{(x_0 \ldots x_n) \in R^{4(n+1)}; (x_i - x_j)^2 \geq 0\} = R^{4(n-1)} \otimes \bar{V} \quad (21)$$

($A(ij)$ - оператор антисимметризации по переменным x_i и x_j). Наиболее удобной для дальнейшего является аналогичная (21) формулировка локальности для функции Уайтмана $F(x_0 .. x_n) \equiv A(0,..n)\, W(x_0 \ldots x_n)$, полностью антисимметризованной по всем аргументам:

$$\operatorname{supp} F(x_0 .. x_n) = \{(x_0 .. x_n) \in R^{4(n+1)}; (x_i - x_{i+1})^2 \geq 0, i = 0, .. n-1\} = \bar{V}^{4n}. \qquad (22)$$

Задача о формулировке свойства локальности аналитического функционала $W(z_0 \ldots z_n)$ может быть теперь поставлена в следующем виде. Вводим полностью антисимметризованный аналитический функционал $F(z_0 .. z_n) = A(0..\bar{n})$ $W(z_0 .. z_n)$

и "соответственный" ему в смысле формулы (7) функционал F^* из пространства Шварца. На F^* налагаем условие локальности в виде (22):

$$\langle F(z_0 \ldots z_n), \psi(z_0 \ldots z_n)\rangle = (F^*(x_0 \ldots x_n), \psi^{(R)}(x_0 \ldots x_n)) \text{ для всех } \psi \in Z \qquad F \in G' \quad (23)$$

$$\operatorname{supp} F^*(x_0 \ldots x_n) = \bar{V}^{4n} . \quad (24)$$

Формулы (23), (24) – неявная формулировка условия локальности. Отыщем явную характризацию класса аналитических функционалов, выделяемого этими формулами. Согласно § 2, свойствам носителя вещественных функционалов соответствуют в теории аналитических функционалов свойства расширения на некоторые пространства локально аналитических функций. Поэтому условие (24) должно приводить к расширению пространства основных функций функционала F . Чтобы найти это расширение, поступим следующим образом.

1. Выразим (24) так же, как свойство расширения функционала F^* с пространства $S(R)$ на некоторое пространство $S(V)$.

2. В пространстве $S(V)$ выделим подпространство тех функций, которые допускают продолжение в комплексную область, являясь, таким образом, следами голоморфных функций (пространство $Z|_V$). При этом между пространствами $S(R), S(V), Z|_R$ и $Z|_V$ должны выполняться соотношения:

$$S(V) \supset S(R); \; Z|_V \supset Z|_R ;$$

$$Z|_R \subset S(R); \; Z|_V \subset S(V),$$

откуда:

$$Z|_R \subset Z|_V \subset S(V)$$

– основное требование к искомому пространству $Z|_V$.

3. Пользуясь соотношением (23), в котором правая часть будет уже определена для всех функций $\psi^{(R)} \in Z|_V \supset Z|_R$, продолжим функционал F с пространством $Z(C)$ на пространство $Z|_{V+iR}$ аналитических функций, являющихся аналитическими продолжениями функций из $Z|_V$.

1. Для определения пространства $S(V)$ воспользуемся следующим свойством обобщенных функций умеренного роста.

Теорема [24]

Пусть G – функционал в пространстве Шварца, имеющий носитель в регулярном множестве T . Тогда G представляется в виде:

$$G(x) = \sum_{|\beta|\leq m} D^{\beta}[(1+|x|)^{m}\mu_{\beta}(x)], \tag{26}$$

где $\mu_{\beta}(x)$ – некоторые (комплексные) меры Радона с носителями в T, конечные на R^n ($\int|d\mu_{\beta}(x)|<\infty$), $m\geq 0$ – некоторое целое число.

Поскольку световой конус V – регулярное множество, то в силу (24),(26).

$$(F^*,\phi)= \sum_{|\alpha|\leq m} \int D^{\alpha}\phi(x_0..x_n)\,dr_{\alpha}(x_0...\ x_n) \qquad \text{для всех} \quad \phi\in S \tag{27}$$

(для удобства мы перешли к мерам степенного роста r_{α}). Поскольку здесь носители всех мер r_{α} заключены в V, то интегралы в правой части (27) будут также существовать для всех C^{∞}–функций ϕ, убывающих быстрее любой степени во времени-подобных направлениях. (Пространство таких функций и обозначим через $S(V)$). Поэтому формула (27) определяет собою непрерывное расширение функционала F^* с пространства $S(R)$ на $S(V)$. $S(V)$ – линейное счетно-нормированное пространство, в котором топологию зададим следующей последовательностью норм:

$$\|\phi\|^{(V)}_{k,\ell} = \sum_{i,j}^{k,\ell} \sup_{x\in V} |x^{i} D^{j}\phi(x)|. \tag{28}$$

Таким образом наряду с (24), еще одной эквивалентной формулировкой локальности является: функционал $F^*= A(0..n)W(x_0...x_n)$ обладает непрерывным продолжением на пространство $S(V)$.

2. Найдем теперь дополнительные условия, при которых функции из $S(V)$ обладают аналитическим продолжением на все $C^{4(n+1)}$. Поскольку подпространство таких функций $|Z|_V\subset S(V)$ играет только промежуточную роль в наших рассуждениях, мы не будем заниматься подробным описанием его структуры. Укажем только, что, как и в случае пространства $Z|_R$, функции из $Z|_V$ могут быть явно охарактеризованы только в терминах своих фурье-образов. Именно, функции из $Z|_V$ суть преобразования Фурье-функций класса C^{∞}, носители которых ограничены во времени-подобных направлениях (пространство $D|_V$). Ввиду очевидного $D|_V\supset D(R)$ будет и $Z|_V=F[D|_V]\supset Z|_R$. Аналогично, из $D|_V\subset S(V)$ следует $Z|_V\subset S(V)$ и условия (25) выполнены.

Между пространствами $S(V)$, $D|_V$ и $Z|_V$ имеют место точно такие же соотношения, как и в обычной тройке пространств S, D и Z. Так, оба пространства $Z|_V$ и $D|_V$ плотны в $S(V)$, однако их взаимное пересечение состоит лишь из тождественного нуля. Благодаря $Z|_V \subset S(V)$, функции из $Z|_V$ убывают быстрее любой степени во времени-подобных направлениях. Отметим также, что $D|_V$ включает в себя важный класс C^∞ -функций с носителями, ограниченными со стороны конуса V /25/ (носители таких функций удовлетворяют условно: $\mathrm{supp}\, g \subset \bar{V} + U_{0,R}$, где $U_{0,R}$ – шар радиуса R с центром в 0). Эти функции плотны в $D|_V$.

3. Наконец, продолжая функции пространства $Z|_V$ в комплексную плотность, мы получим пространство $Z|_{V+iR}$, состоящее из функций $\psi(z)$, голоморфных в цилиндрической области $V+iR$. В вещественных направлениях, лежащих в V, эти функции убывают, очевидно, быстрее любой степени. Как преобразования Фурье-Лапласа функций из $D|_V$, в комплексной области они являются функциями 1-го порядка роста: $|z^k \psi(z)| < C e^{a|\mathrm{Im}\, z|}$ для всех $z \in V+iR$. Наконец, поскольку из определения пространства $S(V)$ следует, что функции из $S(V)$ рассматриваются над замкнутым конусом $\bar{V}$, заключаем, что $V+iR$ – замкнутое множество, и $Z|_{V+iR}$ – пространство локально аналитических функций. Тем самым оно принадлежит классу пространств $Z(\bar{G})$, введенных нами в § 2, и мы можем записать: $Z|_{V+iR} = Z(V+iR)$.

Нетрудно доказать теперь, что аналитический функционал F, удовлетворяющий условию локальности в виде (23), (24), обладает непрерывным расширением на $Z(V+iR)$. Возможность расширения F на $Z(V+iR)$ гарантируется равенством (23). Непрерывность этого расширения можно доказать полностью аналогично доказательству предложения 1, установив ограниченность F на каждом ограниченном множестве из $Z(V+iR)$.

Таким образом обычному требованию локальности (22) соответствует в неперенормируемой теории свойство продолжимости аналитического функционала $F(z_0..z_n) = A(0..n)W(z_0...z_n)$ с исходного пространства основных функций $Z(C^{4(n+1)})$ на пространство $Z(V+iR)$. Пользуясь определением 2, мы можем выразить этот результат в терминах носителя аналитического функционала, и окончательно сформулировать.

Определение 4.

Будем говорить, что в неперенормируемой уайтмановской теории выполняется условие локальности, если полностью антисимметризованные функции Уайтмана $F(z_0 \dots z_n)$ имеют носитель (в смысле определения 2) в цилиндрической области $\bar{V} + iR$:

$$\operatorname{supp} F(z_0 .. z_n) \subset \bar{V} + iR. \qquad (29)$$

Как ясно из вывода этого условия, оно должно обладать обычным физическим содержанием постулата локальности: выразить независимость друг от друга двух возмущений, локализованных во взаимно пространственно- подобных областях. Однако, поскольку локальность в полном смысле теперь обладает лишь "соответственный" функционал F^* , то следует ожидать, что это физическое содержание передается условием (29) не столь полно, как обычной формулировкой (22). Мы покажем в дальнейшем, что этим условием, действительно, обеспечивается лишь часть локальных свойств, имеющих место в перенормируемых теориях.

Будучи ограничением на носитель аналитического функционала, требование локальности должно одновременно являться ограничением на степень роста его преобразования Фурье-Бореля. Простейший пример ситуации – теорема Палея-Винера-Шварца. Представляет физический интерес, найдя эти ограничения, дать явную характеризацию класса локальных и нелокальных неперенормируемых теорий. Это, однако, – задача значительной математической сложности.

Ввиду ограничений, налагаемых размерами статьи, обсуждение менее существенных постулатов примитивной причинности и аналитичности вакуума, а также анализ основных следствий из системы постулатов Уайтмана будут даны нами в другой работе.

Решением многих математических проблем настоящей работы автор обязан многочисленным плодотворным дискуссиям с В.С. Владимировым. Автор выражает глубокую благодарность также М.К. Поливанову за постоянный интерес к этой работе.

Литература

1. A. Wightman. Theor. Physics, Trieste, 1963.
2. A. Wightman, L. Garding. Ark. Fys., 29, 129 (1964).
3. W. Guttinger. Nuovo Cim., 10, 1 (1958).
4. B. Schoer. Iourn. Math. Phys., 5, 1361 (1964).
5. B. Schroer. Theor. Physics, Trieste, 1965.

6. B. Schoer, K. Bardakei. Journ. Math. Phys., 7, 10, 17 (1960).

7. F. Hadjioannou. Nuovo Cim., 4 L, ... (1966).

8. Б. Медведев, М. Поливанов. Труды зимней школы теор. физ., Дубна 1964.

9. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М. 1957.

10. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. Обобщенные функции, Т.Т. 1, 2, 4. М. 1958.

11. Ж. Себаштьян–и–Сильва. Математика, 1, 60, 1957.

12. Л. Шварц. Математические методы для физических наук. М, 1964.

13. J. Silva. Portug. Math., 9, 1 (1950).

14. A. Grothendieck. Journ. fur reine und angew. Math. 192, 35 (1953).

15. G. Kothe. Journ. fur reine und angew. Math., 191, 30 (1953).

16. J. Silva. Revisba de Fac. Cienc. Lisboa, Ser. 2 A, 1, 23 (1950).

17. A. Martinean. Journ d'Analyse Math., 11, 1 (1963).

18. В.П. Хавин. Пространства аналитических функций, в сб. "Математич. анализ", М. изд. ВИНИТИ, 1966.

19. A. Martinean. Compt. rend., 250, 2666 (1960).

20. Д.А. Райков. Труды Моск. Матем. Общества, 7, 413, 1958.

21. R. Haag, B. Schroer, Journ. Math. Phys., 3, 256 (1962).

22. D. Hall, A. Wightman. Mat–Fys. Medd., 31, N 5 (1957).

23. D. Ruelle. Helv. Phys. Acta, 35, 147 (1962).

24. В.С. Владимиров. Изв. АН СССР, сер. мат., 29, 807, (1965).

25. В.С. Владимиров. Изв. АН СССР, сер. мат., 29, 1123 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1966 г.