Acta. Phys. Polon., 1967, V. 32, F. 3(9), c. 375—383

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3078

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Као Ти

ВЫРОЖДЕННЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2,2) И СИММЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1966

P2 - 3078

Као Ти

ВЫРОЖДЕННЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2,2) И СИММЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в "Acta Phys.Pol."

Као Ти. P2 - 3078

Вырожденные унитарные представления группы SU(2,2) и симметрия элементарных частиц.

В предыдущей работе /1/ было найдено две серии вырожденных унитарных представлений группы SU(2,2). В настоящей работе доказано, что одна из этих двух серий (именно главная серия) принадлежит к так называемой серии d_1 Граева /2/. Кроме того, здесь указано возможное применение представлений главной серии к теории симметрии элементарных частиц. Дана редукция $SU(2,2) \supset \{SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)\}_p$, где p - 4 импульс частиц, и проведена классификация частиц по неприводимым представлениям максимальной компактной подгруппы. Коротко рассмотрена также вершина взаимодействия бесконечного мультиплета со скалярным внешним полем.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1966.

Cao Chi. P2-3078

Degenerate Unitary Representations of the SU(2,2) Group and Elementary Particle Symmetry

Two series of degenerate unitary representations of the SU(2,2) group were found in the previous paper /1/. It is proved in the present paper that one of these two series (the principal one) belongs to the so called Graev /2/ d_1 series. Besides, a possible application of the principal series representations to the elementary particle symmetry theory is pointed out here. The $SU(2,2)$ $\{SU(2) \times SU(2) \times U(1)\}_p$ reduction is given where p is four-momentum of particle. Particles are classified according to irreducible representations of the maximal compact subgroup. The vertex of interaction of an infinite multiplet with a scalar external field is briefly considered.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1966.

В работе [1] было найдено две серии вырожденных унитарных представлений группы $SU(2,2)$. Здесь мы рассмотрим связь между найденными представлениями и представлениями, данными Граевым в работе [2], и укажем возможное применение этих представлений к теории симметрии элементарных частиц.

1. Главная серия $N=-\frac{3}{2}+i\rho$ и серия d_1

Группа $SU(2,2)$ определяется как группа комплексных матриц, сохраняющих эрмитову форму $\psi^+ M\psi$, где

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Вырожденные представления группы $SU(2,2)$, рассмотренные в работе [1], реализуются в пространстве однородных функций $f(\Delta_{i_1},\Delta_{i_1 i_2 i_3})$, где $\Delta_{i_1\ldots i_k}$ – миноры, образованные из k первых строк матрицы $g=\xi_{ij}\ (i,j=1,2,3,4)$. Каждое представление характеризуется парой чисел (N,x), которые связаны со степенями однородности F и $\mathcal{F}$ функции f относительно $\Delta_{i_1},\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ следующим образом:

$$N+2x=F\quad,$$
$$N-2x=\mathcal{F}\quad.$$

Из условий унитарности представлений были получены две серии представлений. Для главной серии $N=-\frac{3}{2}+i\rho$ (ρ -любое вещественное число), для дополнительной серии $\mathrm{Im}\,N=0$; в обеих сериях $4x$ -любое целое число. При реализации представлений в пространстве однородных функций f генераторы группы имеют вид

$$\mathcal{L}_{ij} = \sum_{n=1}^{3} \xi_{ni} \frac{\partial}{\partial \xi_{nj}}$$

и удовлетворяют следующему коммутационному соотношению:

$$[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{k\ell}] = \delta_{jk}\mathcal{L}_{i\ell} - \delta_{i\ell}\mathcal{L}_{kj} \quad .$$

Максимальной компактной подгруппой является прямое произведение $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Алгебры групп $SU(2)$, $SU(2)$, $U(1)$ имеют следующие генераторы соответственно:

$$\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{21}, \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{22}) \; ; \; \mathcal{L}_{34}, \mathcal{L}_{43}, \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}) \; ; \; \tfrac{1}{4}(\mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}).$$

Остальные генераторы $\mathcal{L}_{ij}$ являются некомпактными генераторами. В связи с максимальной компактной подгруппой $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ в [1] был использован следующий базис в гильбертовом пространстве функций f :

$$|j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = n_{j_1 j_2 \lambda} N_{j_1 m_1} N_{j_2 m_2} S^{N-j_1-j_2} \mathcal{L}_{21}^{j_1-m_1} \mathcal{L}_{43}^{j_2-m_2} \xi_1^{a} \eta_2^{\beta} \xi_3^{c} \eta_4^{\delta} \, . \quad (2)$$

Здесь $\quad \xi_i = \xi_{1i} \quad , \quad \xi^i = \eta_i = \varepsilon^{ijk\ell} \xi_{1j} \xi_{2k} \xi_{3\ell} \quad ;$

$$S = \xi^1 \xi_1 + \xi^2 \xi_2 - \xi^3 \xi_3 + \xi^4 \xi_4 \quad ;$$

$n_{j_1 j_2 \lambda}$ – нормирующий множитель; a, β, c, δ – не отрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям $a + \beta = 2j_1$, $c + \delta = 2j_2$;

$$N_{jm} = [(j+m)!]^{\frac{1}{2}} [(2j)!(j-m)!]^{-\frac{1}{2}} \quad ;$$

λ – собственное значение генератора группы $U(1)$ $\left(\lambda = \frac{a+\delta-\beta-c}{4}\right)$.

Отметим здесь, что существование двух серий представлений, найденных в [1], можно так же наглядно понять из следующего соображения. Как известно, группа $SU(2,2)$ локально изоморфна реальной ортогональной группе $SO(4,2)$ в шестимерном пространстве с метрикой $R_{AB} = (1,1,1,1,-1,-1)_{diag}$.

Рассмотрим, например, следующий оператор Казимира:

$$C = L_{23}^2 + L_{13}^2 + L_{12}^2 + L_{14}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2 - L_{15}^2 - L_{25}^2 - L_{35}^2 - L_{45}^2 - L_{16}^2 - L_{26}^2 - L_{36}^2 - L_{46}^2 + L_{56}^2,$$

где L_{AB} - генераторы псевдоортогональной группы $SO(4,2)$, удовлетворяющие коммутационному соотношению

$$[L_{AB}, L_{CD}] = R_{AD} L_{BC} + R_{BC} L_{AD} - R_{AC} L_{BD} - R_{BD} L_{AC} .$$

Изоморфизм группы $SO(4,2)$ группе $SU(2,2)$ осуществляется с помощью следующих соответствий:

$$L_{23} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{21} + \mathcal{L}_{34} + \mathcal{L}_{43}\right),$$

$$L_{13} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{12} - \mathcal{L}_{21} + \mathcal{L}_{34} - \mathcal{L}_{43}\right),$$

$$L_{12} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}\right),$$

$$L_{14} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{21} - \mathcal{L}_{34} - \mathcal{L}_{43}\right),$$

$$L_{24} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{12} - \mathcal{L}_{21} - \mathcal{L}_{34} + \mathcal{L}_{43}\right),$$

$$L_{34} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{33} + \mathcal{L}_{44}\right),$$

$$L_{15} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{14} - \mathcal{L}_{41} + \mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{32}\right),$$

$$L_{25} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{14} + \mathcal{L}_{41} - \mathcal{L}_{32} - \mathcal{L}_{23}\right),$$

$$L_{35} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{13} - \mathcal{L}_{31} + \mathcal{L}_{42} - \mathcal{L}_{24}\right),$$

$$L_{45} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{31} + \mathcal{L}_{24} + \mathcal{L}_{42}\right),$$

$$L_{16} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{14} + \mathcal{L}_{41} + \mathcal{L}_{32} + \mathcal{L}_{23}\right),$$

$$L_{26} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{32} - \mathcal{L}_{14} + \mathcal{L}_{41}\right),$$

$$L_{36} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{31} - \mathcal{L}_{24} - \mathcal{L}_{42}\right),$$

$$L_{46} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{42} - \mathcal{L}_{24} - \mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{31}\right),$$

$$L_{56} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}\right).$$

Выражая C через генераторы $\mathcal{L}_{ij}$, мы получаем:

$$4C = 3\sum_i \mathcal{L}_{ii}^2 - 2\sum_{i<j}\left(\mathcal{L}_{ii}\mathcal{L}_{jj} + \mathcal{L}_{jj}\mathcal{L}_{ii}\right) + 4\sum_{i\neq j}\left(\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji} + \mathcal{L}_{ji}\mathcal{L}_{ij}\right) .$$

Действуем теперь оператором C на векторный базис (2). После длинных выкладок мы приходим к следующему выражению:

$$\frac{1}{2} C \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda \right\rangle = \left(N^2 + 3N + 2x^2 \right) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda \right\rangle .$$

Требование вещественности собственного значения оператора C дает результаты, полученные в работе [1]:

1) $N = -\frac{3}{2} + i\rho$ (главная серия),

2) $\mathrm{Im}\, N = 0$ (дополнительная серия).

Рассмотрим теперь связь между найденными нами представлениями и представлениями, данными в работе [2], при этом ограничимся только представлениями главной серии (в [2] были даны только представления главных серий). Известно, что матрицу $g \in SU(2,2)$ вообще можно представить в виде

$$g = \zeta \delta z . \tag{3}$$

Так как мы рассматриваем только вырожденные представления, реализуемые однородными функциями $f(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2 i_3})$, то, следуя работе [3], мы должны взять следующие клеточные формы для матрицы ζ, δ, z : .

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{14} \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 & 0 \\ z_{31} & 0 & 1 & 0 \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & 1 \end{pmatrix} .$$

Согласно работе [2], эти клеточные формы для матриц ζ, δ, z соответствуют заданию группы $SU(2,2)$ как группы комплексных матриц, сохраняющих эрмитову форму $\psi^+ M_2 \psi$, где

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

Эта новая реализация группы получается из старой реализации (1) путем трансформирования элементов группы с помощью подходящей вещественной ортогональной матрицы. Серия представлений, соответствующих реализации (4), называется серией d_1. В новой реализации матрицы g удовлетворяют соотношению

$$g M_2 g^+ = M_2 . \qquad (5)$$

Отсюда для матриц δ получаем $\delta^*_{44}\delta_{11} = 1$ и $\delta_0 \sigma_3 \delta_0^+ = \sigma_3$, где

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

поэтому δ_0 является матрицей из группы $SU(1,1)$. Применив условие (5) к матрице z, получим:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 + ix_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 + ix_4 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} M_{ij} x_i x_j + ix_5 & -x_1 + ix_2 & x_3 - ix_4 & 1 \end{pmatrix} ,$$

где x_i $(i=1,2,3,4)$ и x_5 –любые вещественные числа. Для удобства вместо переменных $\xi_i \equiv \xi_{1i}$, $\xi^i \equiv \eta_i \equiv \varepsilon^{ijkl} \xi_{1j} \xi_{2k} \xi_{3l}$, использованные в /1/, мы перейдем к переменным $\xi'_i \equiv \xi_{4i}$, $\xi'^i \equiv \eta'_i \equiv \varepsilon^{ijkl} \xi_{4j} \xi_{3k} \xi_{2l}$ и в дальнейшем всегда будем опускать штрихи у новых переменных, так как нет существенного различия между старыми и новыми переменными. Переменные ξ_i не зависят от ζ_{ij} и выражаются через элементы матриц δ и z следующим образом:

$$\xi_1 = \delta_{44}\left(-\tfrac{1}{2}M_{ij}x_i x_j + ix_5\right) ,$$
$$\xi_2 = \delta_{44}\left(-x_1 + ix_2\right),$$
$$\xi_3 = \delta_{44}\left(x_3 - ix_4\right),$$
$$\xi_4 = \delta_{44} .$$

Пользуясь (5), можно доказать, что

$$\xi_i^* = -(M_2)_{ij}\,\xi^j . \tag{6}$$

С другой стороны, разложение (3) дает следующие выражения для ξ_i и ξ^i:

$$\xi_i = \delta_{44} z_{4i},$$

$$\xi^i = (-1)^i \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \delta_{44} \begin{vmatrix} z_{2j} & z_{2k} & z_{2l} \\ z_{3j} & z_{3k} & z_{3l} \\ z_{4j} & z_{4k} & z_{4l} \end{vmatrix} \quad j,k,l \neq i,\ j<k<l . \tag{7}$$

Сравнивая (7) и (6), можно проверить, что $|\delta_0| = 1$ и δ_{44} - вещественный параметр. Таким образом, однородная функция $f(\xi_i, \xi^i)$ имеет вид $\delta_{44}^{2N}\varphi(z)$.

Отметим здесь, что разложение $g = \zeta\delta z$ невозможно при реализации (1). Поэтому, чтобы пользоваться методом канонического разложения, необходимо перейти к новой реализации (4). В работе /1/, где не было использовано каноническое разложение $g = \zeta\delta z$, такой переход не нужен. Чтобы перейти к новой реализации (4), в формуле (2) нужно делать замену $\xi_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_4)$, $\xi_2 \to \xi_2$, $\xi_3 \to \xi_3$, $\xi_4 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_4 - \xi_1)$ и аналогично для η_i.

Инвариантная мера на группе имеет вид $d\mu(g) = \beta(\zeta\delta)\,d\mu(z)$. Функция $\beta(\zeta\delta)$ определяется формулой

$$\frac{d\mu(z\bar{g}_0)}{d\mu(z)} = \beta^{-1}(\zeta_0\delta_0),$$

где $zg_0 = (\zeta_0\delta_0)z\bar{g}_0$ и g_0 -некоторая матрица группы $SU(2,2)$. Для реализации (4) инвариантная мера $d\mu(g)$ равна $\delta_{44}^6\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5$. Рассмотрим теперь однородные функции $f(\xi_i^{\prime}; \xi_i)$. Они образуют гильбертово пространство с нормой

$$\int f^* f\, \delta_{44}^6\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 . \tag{8}$$

Норма, определенная формулой (8), имеет смысл только тогда, когда $2N + 2N^* + 6 = 0$. Отсюда $N = -\frac{3}{2} + i\rho$. Таким образом, мы доказали, что главная серия представлений группы $SU(2,2)$, найденных в [1], принадлежит серии d_1 работы [2] (вырождение состоит в том, что вместо кронековского произведения $H_\Delta \otimes H_z$ мы взяли только H_z; ниже увидим, что пространство H_z тоже достаточно для применения к теории симметрии элементарных частиц). Для проверки вычислим нормирующий множитель $n_{j_1 j_2 \lambda}$ векторного базиса (2). По определению нормы (8) мы имеем:

$$\langle \lambda j_2 j_2 j_1 j_1 | j_1 j_1 j_2 j_2 \lambda \rangle = |n_{j_1 j_2 \lambda}|^2 \int S^{-3-2(j_1+j_2)} \left|\frac{\xi_1+\xi_4}{\sqrt{2}}\right|^{2a} |\xi_2|^{2\beta} |\xi_3|^{2c} \left|\frac{\xi_4-\xi_1}{\sqrt{2}}\right|^{2\delta} \delta_{44}^6\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 .$$

После громоздких выкладок мы получим следующее выражение для $n_{j_1 j_2 \lambda}$:

$$n_{j_1 j_2 \lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi^3}} 2^{j_1+j_2} \left[\frac{(2j_1+1)!\,(2j_2+1)!}{a!\,\beta!\,c!\,\delta!}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Эта формула точно совпадает с формулой (29) работы [1].

Представляет также интерес установить связь между найденными нами вырожденными представлениями и вырожденными представлениями группы $U(p, q)$, данными в работе [12]. В отличие от нас (мы реализуем представления в гильбертовом пространстве однородных функций, которые тесно связаны с обобщенными тензорами и очень удобны в приложении к теории симметрии элементарных частиц), представления в [12] реализуются в гильбертовом пространстве функций, определяемых на многообразиях, гомеоморфных гиперповерхностям, погруженным в $2(p+q)$ -мерном пространстве Минковского.

2. Главная серия $N=-\frac{3}{2}+i\rho$ и симметрия элементарных частиц

Рассмотрим теперь коротко возможное применение представлений главной серии к теории симметрии элементарных частиц. В работах ряда авторов [4,5] было показано, что группа симметрии G для сильновзаимодействующих элементарных частиц имеет структуру: $G=P.S$, где P - группа Пуанкаре, S - группа внутренней симметрии, а точка обозначает полупрямое произведение. Если оставить пока в стороне унитарную симметрию, то одной из возможных групп симметрии S является группа $SU(2,2)$. Такое рассмотрение очень поучительно для построения квантовой теории поля, учитывающей внутреннюю симметрию элементарных частиц (см. [6,7], там была рассмотрена группа $SL(2,C)$).

Векторный базис (2) можно написать в следующем виде:

$$S^{N-j_1-j_2}\, Z^{f_1\cdots f_\beta\, \hat{h}_1\cdots \hat{h}_\delta}_{e_1\cdots e_a\, \hat{g}_1\cdots \hat{g}_c}, \tag{9}$$

где Z -тензор, построенный из ξ_i, ξ^i, симметричный по индексам e_i, f_i, $\hat{g}_i$, $\hat{h}_i$ в отдельности и равный нулю при свертывании e с f или $\hat{g}$ с $\hat{h}$. Напомним, что $a+\beta=2j_1$, $c+\delta=2j_2$. Для простоты положим $a=\delta=0$ (см. [8]). Пусть теперь $D(N,x)$ -некоторый элемент гильбертова пространства, реализующий представление (N,x); его можно разложить по базисам (9):

$$D(N,x)=\sum_{j_1 j_2}\phi^{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c}_{f_1\cdots f_\beta}\, S^{N-j_1-j_2}\, Z^{f_1\cdots f_\beta}_{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c} \tag{10}$$

Видно, что тензор $\phi^{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c}_{f_1\cdots f_\beta}$, не зависящий от ξ_i, ξ^i, - тоже симметричный по индексам f и $\hat{g}$. Формула (10) дает как раз редукцию $SU(2,2)\supset SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)$. В применении к теории симметрии нас больше интересует редукция $SU(2,2)\supset\{SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)\}_p$, где $\{SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)\}_p$ определяется как подгруппа, полученная в результате применения лоренцева преобразования L_p к $SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ (p - 4-импульс частицы). Для этой редукции нужно получить выражения для базиса (9) и для компонент $\phi^{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c}_{f_1\cdots f_\beta}$ в состоянии с импульсом p, применив к правой части (10) лоренцевы преобразования L_p, для которых $L_p\gamma_0 L_p^{-1}=\frac{\gamma p}{m}$. Тогда вместо тензоров $Z^{f_1\cdots f_\beta}_{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c}$ и $\phi^{\hat{g}_1\cdots\hat{g}_c}_{f_1\cdots f_\beta}$

мы должны взять следующие тензоры[8,9]:

$$Z^{\nu_1\dots\nu_\beta}_{\mu_1\dots\mu_c}(p) = \bar{u}^{\hat{g}_1}_{\mu_1}(p)\dots\bar{u}^{\hat{g}_c}_{\mu_c}(p)\, Z^{f_1\dots f_\beta}_{\hat{g}_1\dots\hat{g}_c}\, u^{\nu_1}_{f_1}(-p)\dots u^{\nu_\beta}_{f_\beta}(-p) \;, \tag{11}$$

$$\phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}(p) = u^{f_1}_{\nu_1}(p)\dots u^{f_\beta}_{\nu_\beta}(p)\, \phi^{\hat{g}_1\dots\hat{g}_c}_{f_1\dots f_\beta}\, \bar{u}^{\mu_1}_{\hat{g}_1}(-p)\dots\bar{u}^{\mu_c}_{\hat{g}_c}(-p). \tag{12}$$

Функция $S=\xi^i(\gamma_0)^j_i\xi_j$ (мы взяли представление Паули для матриц γ) заменяется функцией $S(p)=\xi^i\left(\frac{\gamma p}{m}\right)^j_i\xi_j$. В выражениях (11),(12) u –спиноры, удовлетворяющие определенным уравнениям Дирака. Таким образом, для редукции $SU(2,2)\supset\{SU(2)\otimes SU(2)\otimes U(1)\}_p$ имеем:

$$D_p(N,x) = \sum_{j_1 j_2} \phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}(p)\, S(p)^{N-j_1-j_2}\, Z^{\nu_1\dots\nu_\beta}_{\mu_1\dots\mu_c}(p)\;. \tag{13}$$

Функции $\phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}$ описывают частицы с определенными импульсом и четностью. Четность частиц равна $(-1)^c$[8]. Функции $\phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}$ удовлетворяют следующим уравнениям Баргмана-Вигнера:

$$(\gamma p - m)^{\nu_1'}_{\nu_1}\phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1'\dots\nu_\beta}(p) = 0,$$

$$(\gamma p + m)^{\mu_1}_{\mu_1'}\phi^{\mu_1'\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}(p) = 0.$$

Напишем несколько компонент $\phi^{\mu_1\dots\mu_c}_{\nu_1\dots\nu_\beta}$, описывающих частицы с низшими спинами. Как было показано в работе[1], представления неприводимы при условии $j_1+j_2-2|x| = 0,1,2,\dots$, поэтому для описания мезонов нужно взять представления с $2|x|=0,1,2,\dots$, а для описания барионов – представления с $2|x| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

М е з о н ы

1) При $c=\beta=0$ имеем функцию ϕ, описывающую мезон 0^+.

2) При $c=\beta=1$ имеем[8]:

$$\phi^{\mu}_{\nu} = u^{f}_{\nu}(p)\phi^{g}_{f}\,\bar{u}^{\mu}_{g}(-p) = \left[(\gamma p+m)(\gamma\phi-\gamma_5\phi_5)\right]^{\mu}_{\nu} \;.$$

Эта компонента описывает мезоны 1^- и 0^-.

3) При $c=\beta=2$

$$\phi^{\{\mu_1\mu_2\}}_{\{\nu_1\nu_2\}} = \left[(\gamma p+m)\gamma_\theta C\right]_{\nu_1\nu_2}\phi_{\theta\sigma}\left[C^{-1}\gamma_\sigma(\gamma p-m)\right]^{\mu_1\mu_2} \;,$$

где C -антисимметричный тензор, введенный в работе [10] (см.также [11]). Компонента $\phi^{\{\mu_1\mu_2\}}_{\{\nu_1\nu_2\}}$ описывает мезоны 0^+, 1^+, 2^+.

Б а р и о н ы

1) При $c=0, \beta=1$ имеем функцию ϕ_ν, описывающую частицу $\frac{1}{2}^+$.

2) При $c=1, \beta=0$ имеем функцию ϕ^μ, описывающую частицу $\frac{1}{2}^-$.

3) При $c=0, \beta=3$

$$\phi_{\{\nu_1\nu_2\nu_3\}} = \phi_{\nu_1\mu}(\gamma_\mu C)_{\nu_2\nu_3} + \frac{1}{2}\phi_{\nu_1\mu\nu}(\sigma_{\mu\nu}C)_{\nu_2\nu_3} \;.$$

Эта компонента описывает частицу $\frac{3}{2}^+$.

Рассмотрим теперь простой случай взаимодействия некоторого бесконечного мультиплета со скалярным внешним полем A. В этом случае инвариантная вершинная функция имеет вид:

$$A(p-q)\int D^{*}_{p}(N,x)\,D_{q}(N,x)\,d\mu(g) \;. \qquad (14)$$

Подставив (13) в (14), в случае мезонного мультиплета мы получим для компоненты ϕ ($\beta=c=0$) следующее выражение:

$$A(p-q)\,\phi^{*}(p)\phi(q)F(t) \;,$$

где

$$F(t) = \int S(p)^{-3/2-i\rho}S(q)^{-3/2+i\rho}d\mu(g),\; t=(p-q)^2. \qquad (15)$$

Можно проверить, что $S(p)$ -вещественная величина. В случае взаимодействия барионного мультиплета со скалярным внешнем полем A для компоненты ϕ_ν ($\beta = 1, c = 0$) инвариантная вершинная функция (14) дает

$$4m^2 \frac{u^\mu_f(-q) F^f_{f'}(t) \bar{u}^{f'}_\mu(-p)}{Sp(\gamma p + m)(\gamma q + m)} \bar{\Phi}(p)\phi(q) ,$$

где $\bar{u}^{f'}_\mu(-p)$ и $u^\mu_f(-q)$ -дираковские спиноры, удовлетворяющие уравнениям /8/:

$$(\gamma p - m)^\mu_\nu \bar{u}^{f'}_\mu(-p) = 0 ,$$

$$u^\mu_f(-q)(\gamma q - m)^\nu_\mu = 0 ,$$

$$F^f_{f'}(t) = \int S(p)^{-2-i\rho} S(q)^{-2+i\rho} \xi^f \xi^{*f'} d\mu(g) . \qquad (16)$$

Для других компонент, описывающих частицы с высшими спинами, можно получить аналогичные выражения. Появление кинематических факторов $F(t)$, $F^f_{f'}(t)$, ... в предыдущем примере показывает, что в теории с бесконечным мультиплетом возникают новые обстоятельства. Они могут быть исследованы на основе найденных представлений.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Нгуену Ван Хьеу и И.Т. Тодорову за интерес к работе и ценные указания.

Литература

1. Cao Chi. Preprint, P5-2950, Dubna, 1966.
2. М.И. Граев. Труды Моск. математ. общ., 7, Москва, 1958.
3. Dao Vong Duc et al. Preprint, E2-2951, Dubna, 1966.
4. P. Dudini, C.Fronsdal. Phys.Rev.Lett., 14, 968 (1965).
5. Nguyen van Hieu. High Energy Physics and Theory of Elementary Particles, Naukova Dumka, Kiev.
6. C.Fronsdal. Preprint Trieste, June 1966.
7. Dao vong Duc, Nguyen van Hieu. Preprint, E2-2932, Dubna, 1966.
8. R.Delbourgo, et al. High energy physics and elementary particles, IAEA, Vienna, 1965.
9. G.Feldman, P.T.Mathews. Preprint Imp.Coll.London, ICTP(66)6.

10. A.Salam, et al. Proc.Roy.Soc., 284, 146 (1965).
11. Cao Chi, Nguyen van Hieu, B.Sredniawa. Fortschritte der Physik, 14, 4 (1966).
12. J.Fischer, R.Raczka. Preprint Trieste , IC(66)36.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1966 г.