ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3054

В.А. Мещеряков

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ И ПРОИСХОЖДЕНИИ ФУНКЦИИ ОБРЕЗАНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р2 - 3054

В.А. Мещеряков

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ И ПРОИСХОЖДЕНИИ ФУНКЦИИ ОБРЕЗАНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Направлено в ЖЭТФ

Введение

Уравнения Чу-Лоу были впервые установлены в рамках специальной модели πN -рассеяния, описывающей взаимодействие с фиксированным источником [1,2]. Эти уравнения сыграли большую роль при изучении пион-нуклонного взаимодействия в области низких энергий. В последнее время проявляется интерес к уравнениям типа уравнений Чу-Лоу в связи с изучением как симметрий сильно взаимодействующих частиц, так и поведения амплитуд рассеяния в области высоких энергий [3]. Поэтому представляет интерес вопрос о выводе уравнений Чу-Лоу на более общей основе, чем специальный вид гамильтониана взаимодействия [1,2]. Первые шаги в этом направлении были предприняты в работах Оме [4] и ЧГЛН [5]. Авторы [5], исходя из дисперсионных соотношений по энергии при фиксированном значении передачи импульса, установили в статическом пределе уравнения Чу-Лоу. Они также впервые указали на трудности такого вывода, одна из которых состоит в необходимости введения функции обрезания, связанной в гамильтоновой формулировке с конечными размерами источника. Остановимся ниже на этом вопросе.

Рассеяние нейтральных пионов на бесспиновых нуклонах

Рассмотрим для простоты модельный пример рассеяния нейтральных пионов (π) на бесспиновых нуклонах (N). Способ введения в рассмотрение переменных, принимающих дискретные значения (спин, изотопический спин и т.д.), будет указан ниже. Амплитуда перехода этого процесса выражается через S - матрицу следующим образом:

$$\langle q_2, p_2 | S-1 | q_1, p_1 \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta(p_1+q_1-p_2-q_2) \frac{1}{(2\pi)^6} \cdot \qquad (1)$$

$$\cdot \frac{M}{(4q_1^0 q_2^0 p_1^0 p_2^0)^{1/2}} T(p_1, q_1; p_2, q_2).$$

Здесь $q_1(p_1)$– 4-импульсы пиона (нуклона). Для удобства перехода к случаю реального πN рассеяния у нуклонов сохранена фермионная нормировка. Лоренц-инвариантная амплитуда $T(p_1, q_1; p_2, q_2)$ зависит от двух переменных, в качестве которых можно выбрать любые из двух мандельстамовских переменных s, u, t:

$$s=(p_1+q_1)^2, \quad s=M^2+\mu^2+2q^2+2\sqrt{(M^2+q^2)(\mu^2+q^2)},$$

$$u=(p_1-q_2)^2, \quad t=-2q^2(1-\cos\theta), \qquad (2)$$

$$t=(p_1-p_2)^2.$$

Здесь q –импульс, W –полная энергия, а θ – угол рассеяния в с.ц.м. Для амплитуды рассеяния имеет место разложение

$$T(s,t)=4\pi \frac{W}{M} \sum_{\ell \geq 0} (2\ell+1) f_\ell(s) P_\ell\left(1+\frac{t}{2q^2}\right). \qquad (3)$$

Двухчастичное условие унитарности имеет вид

$$\operatorname{Im} f_\ell(s)=q(s)\,|f_\ell(s)|^2. \qquad (4)$$

Запишем дисперсионное соотношение (д.с.) по s при фиксированном значении t:

$$T(s,t)=g^2\left(\frac{1}{M^2-s}+\frac{1}{M^2-u}\right)+\frac{1}{\pi}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \operatorname{Im} T(s',t)\left[\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{s'-u}\right] ds'. \qquad (5)$$

Д.с. (5) предполагает, что $|T(s,t)| \to 0$ при $|s| \to \infty$. Из дальнейшего будет видно, что это ограничение не существенно. Получим из д.с. (5) уравнения Чу-Лоу методом ЧГЛН [5]. Для этого сделаем ряд предположений: во-первых, пренебрежем в д.с. (5) всеми неупругими процессами; во-вторых, ограничимся низшими парциальными волнами в разложении (3), положив $f_\ell(s)=0, \ell>1$; в-третьих, в уравнениях для парциальных волн осуществим переход к статическому пределу ($\frac{\mu}{M} \to 0, \frac{s}{M^2} \to 1$). Второе предположение приводит к тому, что для нахождения уравнений для S- и P-волн достаточно знать д.с. для $T(s,0)$ и $T'_t(s,0)$, так как

$$T(s,t) = 4\pi \frac{W}{M} [f_0(s) + 3(1+\frac{t}{2q^2}) f_1(s)],$$

$$T(s,0) = 4\pi \frac{W}{M} [f_0(s) + 3 f_1(s)], \tag{6}$$

$$T'_t(s,0) = 4\pi \frac{W}{M} \frac{3}{2q^2} f_1(s).$$

Дифференцируя д.с. (5) по t, легко найти д.с. для $T'_t(s,0)$. Ниже вместо s удобно перейти к новой переменной E -энергии мезона в лабораторной системе отсчета:

$$s = M^2 + \mu^2 + 2ME,$$

$$q^2 = \frac{E^2 - \mu^2}{1 + (\frac{\mu}{M})^2 + (\frac{E}{M})^2}. \tag{7}$$

Далее д.с. для $T'_t(s,0)$ нужно скомбинировать с д.с. (5) так, чтобы согласно формулам (6), получить д.с. для парциальных волн. После перехода в уравнениях для парциальных волн к статическому пределу получим:

$$f_0(\omega) = 2\frac{f^2}{\mu^2} + \frac{3}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \mathrm{Im} \frac{f_1(\omega')}{q'^2} d\omega'^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f_0(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'^2, \tag{8}$$

$$f_1(\omega) = -\frac{2}{3}\,\frac{f^2}{\pi}\,\frac{q^2}{\omega^2} + \frac{q^2}{\pi}\int\limits_{\mu^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f_1(\omega')}{q'^2(\omega'^2-\omega^2)}\,d\omega'^2, \tag{9}$$

где $\omega = \lim\limits_{M\to\infty} E$ и $f = g\,\frac{\mu}{2M}$.

Уравнения (8), (9) обладают всеми особенностями задачи о πN -рассеянии в статическом пределе, которые были установлены в /5/. Во-первых, условие перекрестной симметрии $T(s,u,t)=T(u,s,t)$, которое связывает между собой различные парциальные волны, сводится к ряду не связанных между собой уравнений вида

$$f_\ell(-\omega) = f_\ell(\omega). \tag{10}$$

Во-вторых, связь между отдельными парциальными волнами осуществляется за счет полюсного члена. Кроме того, уравнение для S -волн содержит аддитивную постоянную, зависящую от $\operatorname{Im} f_1(\omega)$.

В одном пункте уравнения (8) и (9) существенно отличаются от обычных уравнений Чу-Лоу. Так, для гамильтониана взаимодействия нейтральных скалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\,g\int U(|\vec r|)\,\phi(\vec r)\,d\vec r \tag{11}$$

уравнение Чу-Лоу имеет вид:

$$h_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mu^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} h_0(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega'^2, \tag{12}$$

где $h_0(\omega) = f_0(\omega)/v(q^2)$ и $v(q^2)$ есть квадрат фурье-образа функции источника $U(|\vec{r}|)$. Взаимодействие (11) приводит только к S -рассеянию. Из условия унитарности (4) следует неравенство

$$|h_0(\omega)| < \frac{1}{q\, v(q^2)}, \tag{13}$$

из которого видно, что для быстро убывающих функций $v(q^2)$ уравнение Чу-Лоу (12) нужно писать с рядом вычитаний.

Относительно функции $v(q^2)$ известно очень мало. Предполагают обычно, что $U(|\vec{r}|)$ отлична от нуля в конечной области $|\vec{r}| < R$. Тогда о функции $v(q^2)$ можно сказать, что

$$v(q^2) \approx 0, \; q^2 \gg \frac{1}{R^2} . \tag{14}$$

Соотношение (14) ничего не говорит об аналитических свойствах функции обрезания. При конкретных расчетах для нее предпочитают использовать аналитически продолжимые функции. Например, считают /6,7/

$$v(q^2) = \frac{q^2_{max}}{q^2 + q^2_{max}}, \; v(q^2) = e^{-\frac{q^2}{q^2_{max}}}, \; v(q^2) = \left(\frac{q^2_{max}}{q^2 + q^2_{max}}\right)^n . \tag{15}$$

Правда, иногда используют ступенчатое обрезание /6/

$$v(q^2) = \begin{cases} 1 & q^2 \le q^2_{max} , \\ 0 & q^2 > q^2_{max} . \end{cases} \tag{16}$$

Сравнивая уравнения (8) и (12), видим, что в них одинаковыми аналитическими свойствами по ω обладают разные функции: $f_0(\omega)$ и $h_0(\omega)$ соответственно. Если получать аналитические свойства парциальной волны $f_0(\omega)$ из уравнений Чу-Лоу (12), то они могут существенно отличаться от таковых в уравнении (8) за счет функции обрезания. Более того, если функция обрезания не аналитична, то и парциальная волна $f_0(\omega)$ не аналитична.

Для выяснения указанного противоречия, впервые отмеченного в /5/, обратимся к выводу уравнений (8), (9). Они были получены из д.с. (5), т.е. на основе аналитических свойств амплитуды $T(s,t)$ по s при фиксированном t. Следующим шагом в направлении изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния явилось представление Мандельстама /8/, которое постулировало положение особенностей амплитуды как функции двух комплексных переменных. Оно не доказано до настоящего времени, однако в последнее время был получен ряд важных результатов /9/, значительно приблизивших аналитические свойства T к тем, которые предполагаются в /8/. Для рассматриваемого случая представление Мандельстама имеет вид:

$$T(s,u,t)=g^2\left(\frac{1}{M^2-s}+\frac{1}{M^2-u}\right)+\frac{1}{\pi^2}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty}ds'\int_{(M+\mu)^2}^{\infty}du'\,\frac{\rho(s',u')}{(s'-s)(u'-u)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty}dx\int_{4\mu^2}^{\infty}dt'\rho_1(x,t')\left[\frac{1}{(x'-s)(t'-t)}+\frac{1}{(x'-u)(t'-t)}\right]. \qquad (17)$$

Двойное спектральное представление (17) одновременно описывает три процесса:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I. } \pi+N\to\pi'+N' & s\\[2ex] \text{II. } \bar{\pi}'+N\to\bar{\pi}+N' & u\\[2ex] \text{III. } \pi+\bar{\pi}'\to\bar{N}+N' & t\end{array}\right\}\ \text{энергетические переменные.} \qquad (18)$$

Из спектрального представления (17) легко получается д.с. (5). Причем $\mathrm{Im}\,T(s,t)$ как функция переменной t имеет разрезы, расположенные вне физической области I процесса:

$$c(t) = \sum_i c_i \delta(t - t_i).$$

Даже если $c(t)$ –плавная функция, то влияние последнего интеграла в (21) на процессы I и II, для которых $t < 0$, может быть хорошо учтено системой полюсов. Поэтому, имея в виду получить уравнения Чу–Лоу для процессов I – II, преобразуем (21) к виду

$$T(s,u,t) = g^2 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \{ \mathrm{Im}\, T(s,t') \}_{\text{упр}} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - u} \right)] \, ds' + \sum_i \frac{c_i}{t - t_i}.$$

Выделение парциальных волн из (22) проведем дифференциальной методикой, предложенной в /11/, т.е. комбинируя спектральное представление (22) для рассеяния вперед и назад:

$$4\pi \frac{W}{M} f_0(s) = \frac{T(s,0) + T(s,-4q^2)}{2},$$

$$4\pi \frac{W}{M} f_1(s) = \frac{T(s,0) - T(s,-4q^2)}{6}. \tag{23}$$

Из формул (23) видно, что $f_0(s)$ и $f_1(s)$ обладают одной и той же системой полюсов t_i. Переходя затем к статическому пределу в (23), получим, что функции $f_0(\omega)$ и $f_1(\omega)$ удовлетворяют уравнениям (8), (9), правая часть которых содержит одну и ту же систему полюсов по ω. Эта система полюсов симметрична относительно линии $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ (мнимая ось). Если бы мы учитывали высшие волны, то разные парциальные волны могли бы иметь различные системы полюсов, которые возникают, однако, от одной и той же совокупности полюсов по t у амплитуды $T(s,u,t)$. Последний шаг в выводе уравнений Чу–Лоу из представлений (17) состоит в том, что строится вспомогательная функция

$$\omega = \lim_{M \to \infty} E \tag{27}$$

Система разрезов парциальной волны $f_i(s)$ в плоскости ω изображена на рис. 1в. Далее смоделируем разрез $-\infty i, +i\infty$ от третьего процесса системой полюсов $\omega_{i,n}$ (рис. 1с). Полюса должны быть расположены симметрично относительно мнимой оси. Очевидно, что для различных парциальных волн $f_i(\omega)$ системы полюсов $\omega_{i,n}$, вообще говоря, не совпадают. Составим объединение ω_n всех $\omega_{i,n}$, парциальные волны которых связаны соотношением перекрестной симметрии

$$f_i(-\omega) = A_{ij} f_j(\omega), \tag{28}$$

где A_{ij} –матрица перекрестной симметрии. По объединению построим функцию

$$v(q^2) = \frac{V(q^2)}{V(-1)}, \quad V = \prod_n \frac{1}{\omega - \omega_n}. \tag{29}$$

Тогда очевидно, что функции $h_i(\omega) = \frac{f_i(\omega)}{v(q^2)}$ имеют аналитические свойства, изображенные на рис. 1d, т.е. для них справедливы уравнения Чу–Лоу

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{A_{ij} \operatorname{Im} h(\omega')}{\omega' - \omega} \right] d\omega', \tag{30}$$

которые записаны, как обычно, без вычитаний. Необходимое число вычитаний всегда легко ввести.

Заключение

Нами была предложена схема вывода уравнений Чу–Лоу, основанная на аналитических свойствах амплитуды рассеяния, заданных представлением Мандельстама. Она является развитием работы ЧГЛН /5/, в которой уравнения Чу–Лоу выводятся из д.с. при фиксированном t. В процессе вывода было показано, что функция обрезания $v(q^2)$ статической модели аппроксимирует разрез от третьего процесса. Представление функции $v(q^2)$ в виде (29) является, вероятно, одним из возможных, но не единственным способом учета разреза от третьего процесса. С другой стороны, поскольку сильная зависимость амплитуды рассеяния $T(s,u,t)$ от переменной t (разрез по t от $t=4\mu^2$) возникает от учета неупругих процессов (20), то ясно, что функцию обрезания можно рассматривать также и как некоторую модель последних. Заметим, что неупругими процессами пренебрегалось в /5/, ввиду чего вывод уравнений Чу-Лоу в этой работе носил более формальный характер.

Вывод уравнений Чу-Лоу базируется в сущности только на аналитических свойствах парциальных волн. Последние обоснованы лучше /9/, нежели представления Мандельстама /8/. При этом в двух из каналов, описываемых амплитудой рассеяния $T(s,u,t)$, можно ограничиться несколькими низшими парциальными волнами и не нарушать ни аналитичности, ни перекрестной симметрии. Но правило подстановок, конечно, нарушается, так как амплитуда представляется полиномом по t, значит, не имеет разреза, начиная с порога оставшейся третьей реакции. Наличие этого разреза учитывается в рамках статической модели функцией обрезания $v(q^2)$. Из изложенного ясно, что предложенный метод учета разреза от III процесса, вероятно, может применяться не только в рамках статических моделей.

Автор глубоко благодарен академику Н.Н. Боголюбову за интерес к работе.

Литература

1. *G. Chew, F. Low. Phys. Rev., 101, 1570 (1956).*
2. *G. Wick. Rev. of Mod. Phys., 27, 339 (1955).*
3. *F. Low. Материалы XIII международной конференции по физике высоких энергий, Беркли, 1966. Препринт ОИЯИ, Р - 2942, Дубна, 1966.*
4. *R. Oehme. Phys. Rev., 102, 1174 (1956).*
5. *G. Chew, M. Goldberger, F. Low, Y. Namby. Phys. Rev., 106, 1335 (1957).*
6. *Э. Хэнли. В. Тирринг. Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, Москва, 1963.*

7. F. Low, K. Huang. J. Math. Phys., 6, 795 (1965).

8. S. Mandelstam. Phys. Rev., 112, 1344 (1958).

9. A. Martin. Analytic properties from local field theory. Preprint CERN 66/1119/5 – Th 702 (1966).

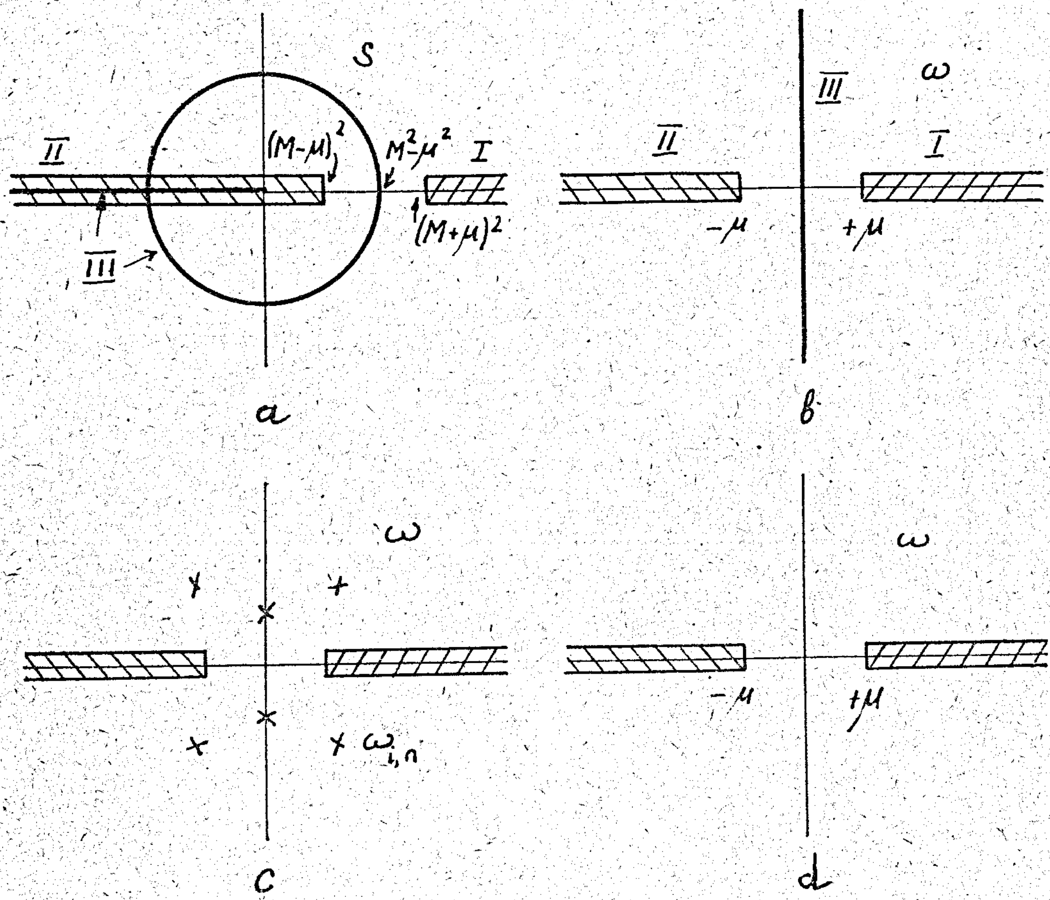
10. M. Cini, S. Fubini. Ann. of Phys., 3, 352 (1960).

11. A. Efremov, V. Meshcheryakov, D. Shirkov, H. Y. Tzu. Nucl. Phys., 22, 206 (1961).

12. Mc Dowells S. W. Phys. Rev., 116, 774 (1959).

13. Чжу Хун-юань. ЖЭТФ, 40, 227 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1966 г.


S
II
$(M-\mu)^2$
$M^2-\mu^2$
I
III
$(M+\mu)^2$
a
ω
III
II
I
$-\mu$
$+\mu$
b
ω
$\omega_{i,n}$
c
ω
$-\mu$
$+\mu$
d