ЯФ, 1967, т. 6, в6, с1277-1286.

29/XII-66

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3040

М.И. Широков

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С НЕСТАТИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P2 - 3040

М.И. Широков

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С НЕСТАТИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в ЯФ

Введение

Модель скалярного поля с источником исследовалась с разными целями во многих работах (см., например[1-5], причем рассматривался в основном статический источник. В этой работе обсуждается случай источника, описываемого произвольной действительной функцией $\rho(x,t)$. Целью является построение аппарата, который позволил бы решать не только стационарные задачи типа рассеяния, но и произвольную задачу Коши. Известно, что в теории поля уже описание начального состояния представляет собой отдельную проблему. Состояния с определенным числом "голых" частиц (которыми описываются начальные вектора в теории возмущений), как известно, не имеют свойств реальных физических систем. В частности, "голый вакуум" не является состоянием с наименьшей полной энергией и нестабилен даже для консервативной системы. С течением времени в нем можно обнаружить частицы, что совсем не согласуется с понятием реального вакуума. Аналогичной стабильности мы ожидаем и от реального одночастичного состояния (хотя бы на основании законов сохранения), "голая" же частица может на некоторое время испустить другую частицу. Реальные состояния обычно могут быть построены с помощью in-out -векторов (см.[5], гл. 17, § 4). Оказывается, что, вообще говоря, это не так в рассматриваемой модели. Физический вакуум и одномезонное состояние должны описываться другими векторами. С их помощью и следует задавать начальное состояние. В последующие же времена нас должен интересовать не столько сам вектор состояния системы $\Phi(t)$, подчиняющийся уравнению Шредингера, сколько его проекции на физические состояния. Уравнение для этих проекций, как оказывается, отличается от первоначального уравнения Шредингера. Причина этого заключается в том, что в данной модели физический вакуум есть "вакуум в присутствии источника" и он зависит от времени, как и физическое одномезонное состояние.

Развитый в работе аппарат может быть применен к более реальной модели: электромагнитное поле с внешним током. Важность этой модели состоит в том, что ее решения могут быть использованы как нулевое приближение в квантовой электродинамике, содержащей взаимодействие фотонов с заданным внешним током (помимо взаимодействия с квантованным электронно-позитронным током). сравни известную "картину Фарри" в случае наличия внешнего потенциала [5].

Мы начнем с нахождения операторов, в терминах которых гамильтониан теории принимает вид свободного. Это позволяет легко найти его спектр и собственные вектора (диагонализация гамильтониана) и оказывается удобным математическим введением, облегчающим изложение основной задачи: определения физических состояний (см. § 2) и переформулировки теории в их терминах (см. § 3).

§ 1. In – out формализм и диагонализация полного гамильтониана

Лагранжиан модели в единицах $\hbar = 1$ и $c = 1$ имеет вид (см. [1], § 7):

$$L(\vec{x},t) = \tfrac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial u})^2 - (\vec{\nabla} u)^2 - m_0^2 u^2] - u(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t). \qquad (1.1)$$

Соответствующий полный гамильтониан (или полная энергия – $\int T_{44} d^3x$) в гейзенберговском представлении равен

$$H(t) = \int d^3x \{\tfrac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\vec{\nabla} u)^2 + m_0^2 u^2] + u\rho\}. \qquad (1.2)$$

Выпишем обычное выражение гейзенберговских операторов $u(x,t)$ через in – операторы:

$$u(\vec{x},t) = u_{in}(\vec{x},t) + \int d^3x' dt' \Delta_{ret}(\vec{x}-\vec{x}', t-t')\rho(\vec{x}',t') \equiv$$
$$\equiv u_{in}(\vec{x},t) + r(\vec{x},t). \qquad (1.3)$$

См. (8.10) в [4] или (17.180) в [5] (в этой формуле оператор $J(\vec{x},t)$

заменяется c –числовой функцией $\rho(\vec{x},t)$. Оператор u_{in} должен удовлетворять свободному уравнению Клейна-Гордона и поэтому может быть представлен обычным образом через не зависящие от времени операторы $A_{in}(\vec{k})$ и $A^{+}_{in}(\vec{k})$:

$$u_{in}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \Sigma_k \omega^{-1/2} [A_{in}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} + A^{+}_{in}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}]. \qquad (1.4)$$

Здесь $\omega = \omega(k) = \sqrt{k^2 + m_0^2}$. Поле с источником считается заключенным в ящик объема V , и поэтому k_x , k_y , k_z принимают дискретные значения [1].

Проверим утверждение Хенли и Тирринга, что „ $H(t)$ равно просто $\Sigma_k A^{+}_{in}(k) A_{in}(k) \omega(k)$ плюс некоторое c –число" (см. [4], глава 8.2). Подставляя в (1.2) $u_{in} + r$ вместо u , получаем:

$$H(t) = \tfrac{1}{2}\int d^3x [(\frac{\partial u_{in}}{\partial t})^2 + (\vec{\nabla} u_{in})^2 + m_0^2 u_{in}^2] +$$
$$+ \int d^3x [\frac{\partial u_{in}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t} + (\vec{\nabla} u_{in} \vec{\nabla} r) + m_0^2 u_{in} r + u_{in}\rho] + \qquad (1.5)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int d^3x [(\frac{\partial r}{\partial t})^2 + (\vec{\nabla} r)^2 + m_0^2 r^2 + 2r\rho] \equiv H_0(u_{in}) + H_r + H_c .$$

H_c есть c –числовая функция от t . Если вместо u_{in} подставить (1.4), то $H_0(u_{in})$ действительно приобретает вид $\Sigma_k \omega A^{+}_{in}(k) A_{in}(k)$. Но обращается ли в нуль H_r ?

Разложим $\rho(\vec{x},t)$ и $r(\vec{x},t)$ в интегралы (точнее –ряды) Фурье:

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k \rho_t(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}},$$
$$r(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k r_t(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \qquad (1.6)$$

и вставим разложения (1.4) и (1.6) в H_r :

$$H_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \{-i\sqrt{\omega}[A_{in}(\vec{k}) \dot{r}_t(-\vec{k}) e^{-i\omega t} - A^{+}_{in}(\vec{k}) \dot{r}_t(\vec{k}) e^{i\omega t}] +$$

$$+\omega^{3/2}[A_{in}(\vec{k})r_t(-\vec{k})e^{-i\omega t}+A^+_{in}(\vec{k})r_t(\vec{k})e^{i\omega t}]+ \tag{1.7}$$

$$+\omega^{-1/2}[A_{in}(\vec{k})\rho_t(-\vec{k})e^{-i\omega t}+A^+_{in}(\vec{k})\rho_t(\vec{k})e^{i\omega t}]\}.$$

Чтобы (1.7) обращалось в нуль, надо чтобы обращался в нуль коэффициент при каждом из операторов $A_{in}(k)$ и $A^+_{in}(k)$ в сумме Σ_k (или: из $H_r = 0$ должно следовать $[H_r, A^+_{in}(\vec{k}')] = 0$ и $[A_{in}(\vec{k}'), H_r] = 0$):

$$-i\sqrt{\omega}\, r_t(-\vec{k})+\omega^{3/2} r_t(-\vec{k})+\omega^{-1/2}\rho_t(-\vec{k})=0, \tag{1.8}$$

$$i\sqrt{\omega}\, r_t(\vec{k})+\omega^{3/2} r_t(\vec{k})+\omega^{1/2}\rho_t(\vec{k})=0. \tag{1.9}$$

В (1.8) можно заменить $\vec{k}$ на $-\vec{k}$ (можно было с самого начала рассматривать уравнение $[H_r, A^+_{in}(-\vec{k}')] = 0$). Из разности полученных двух уравнений следует, что $\frac{\partial}{\partial t} r_t(\vec{k}) = 0$, а из суммы $r_t(\vec{k}) + \omega^{-2}\rho_t(\vec{k}) = 0$. Если $\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(\vec{k}) \neq 0$, то уравнения (1.8) и (1.9) несовместны и H_r нельзя обратить в нуль никаким выбором $r(\vec{x},t)$. Хенли и Тирринг проверили свое утверждение только для случая статического источника (см. гл. 9 в /4/). Тогда, действительно, $H_r = 0$ при $r(\vec{k}) = -\rho(\vec{k})/(k^2+m_0^2)$.

Заметим, что конкретный вид $r(\vec{x},t)$ нам не понадобился. Был использован только тот факт, что u_{in} должно подчиняться свободному уравнению (точнее, что u_{in} имеет вид (1.4)). Поэтому проведенное рассмотрение годится и для u_{out}.

Если $H(t)$ в терминах u_{in} содержит член взаимодействия H_r, то in – вакуум Ω_{in}, для которого $N_{in}\Omega_{in} = 0$, не является собственным состоянием $H(t)$ с наинизшей энергией ($N_{in} = \Sigma_k A^+_{in}(\vec{k})A_{in}(\vec{k})$ не коммутирует с $H(t)$). Поэтому Ω_{in} не является физическим вакуумом, как его обычно определяют. Причина обнаруженных разногласий с обычными

выводами in – out формализма (см. главу 17, § 4 в /5/, в частности (17.166) и (17.198)) заключается в том, что последний пригоден только для случая, когда оператор H не зависит явно от времени.

Все же можно указать такие операторы ϕ, в терминах которых $H(t)$ принимает по существу вид свободного гамильтониана. Пусть

$$u(\vec{x},t) = \phi(\vec{x},t) + d(\vec{x},t), \tag{1.10}$$

где $d(\vec{x},t)$ – c – числовая функция. Связь u и ϕ похожа на (1.3), но теперь мы не требуем, чтобы ϕ подчинялось свободному уравнению Клейна–Гордона. Вместо этого полагаем

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\,\omega^{-1/2}[A_t(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}+A^+_t(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}], \tag{1.11}$$

причем операторы $A_t(\vec{k})$ зависят от t так, что

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t) = \dot{\phi}(\vec{x},t)+\dot{d}(\vec{x},t) = \tag{1.12}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\sqrt{\omega}\,[A_t(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} - A^+_t(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}].$$

Тогда $H(t)$ через $\phi(\vec{x},t)$ или $A_t(\vec{k})$ выразится следующим образом:

$$H(t) = \Sigma_k\,\omega(k)A^+_t(\vec{k})A_t(\vec{k}) + \int d^3x[\phi(-\vec{\nabla}^2+m_0^2)d+\phi\rho]+ \tag{1.13}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int d^3x[d(-\vec{\nabla}^2+m_0^2)d+2\rho d].$$

Как видно, второй член обращается в нуль при $(-\vec{\nabla}^2+m^2)d = -\rho$ или, в k-представлении, при

$$d_t(\vec{k}) = -\rho_t(\vec{k})/k^2+m_0^2. \tag{1.14}$$

При этом $\phi = u - d$ подчиняется уравнению

$$(\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2)\,\phi(\vec{x},t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, d(\vec{x},t). \qquad (1.15)$$

Изложенная процедура может быть непосредственно сравнена с in–out формализмом.

Однако конкретный вид $A_t(\vec{k})$ не был установлен. Это может быть проще сделано в шредингеровской картине, которой мы будем придерживаться в остальной части работы. В этой картине гамильтониан имеет тот же вид (1.2), только $\partial u/\partial t$ там должно быть заменено сопряженным к $u(\vec{x})$ оператором $\pi(x)$. Аналогично (1.10) запишем:

$$u(\vec{x}) = \phi_t(\vec{x}) + d(\vec{x},t),$$
$$\pi(x) = \pi_t(\vec{x}) + d_\pi(\vec{x},t). \qquad (1.16)$$

Из (1.16) следует, что шредингеровский оператор ϕ должен зависеть от времени: $\phi = u(\vec{x}) - d(\vec{x},t)$. Это означает, что полная производная по времени от соответствующего гейзенберговского оператора $\phi(\vec{x},t)$ должна вычисляться по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = -i[\phi(\vec{x},t),H(t)] + \frac{\zeta\phi(x,t)}{\zeta t}.$$

Символом $\zeta/\zeta t$ обозначена производная по явной зависимости от t /6/.

В терминах ϕ_t и π_t полный гамильтониан опять принимает вид $H(t) = H_0(t) + H_d + H_o$,

где
$$H_d = \int d^3x\,[\pi_t\, d_\pi - \phi_t(\vec{\nabla}^2 - m_0^2)d + \phi_t\,\rho]. \qquad (1.17)$$

Найдем такие функции d и d_π, чтобы H_d обращалось в нуль. Подставим разложения

$$\phi_t(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\,\omega^{-1/2}[a_t(\vec{k})e^{ikx} + a_t^+(\vec{k})e^{-ikx}]; \qquad (1.18)$$

$$\pi_t(\vec{x}) = \frac{-i}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\sqrt{\omega}[a_t(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} - a_t^+(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}]; \qquad (1.19)$$

$$d(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\Sigma_k\, d_t(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}};\quad d_\pi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\Sigma_k\, d_{\pi t}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} \qquad (1.20)$$

в (1.17) и приравняем нулю полученное выражение. Аналогично предыдущему получим:

$$-i\sqrt{\omega}\, d_{\pi t}(-\vec{k}) + \omega^{-1/2}[(k^2+m_0^2)d_t(-\vec{k}) + \rho_t(-\vec{k})] = 0,$$

$$i\sqrt{\omega}\, d_{\pi t}(\vec{k}) + \omega^{-1/2}[(k^2+m_0^2)d_t(\vec{k}) + \rho_t(\vec{k})] = 0,$$

откуда следует $d_{\pi t}(\vec{k}) = 0$,

т.е. $\pi(\vec{x}) = \pi_t(\vec{x})$ и $d_t(\vec{k}) = -\rho_t(\vec{k})/(k^2+m_0^2)$

в согласии с (1.14).

Можно установить связь между операторами $a_t(\vec{k})$, соответствующими разным t. Для этого выразим их через операторы $a(\vec{k})$ обычного разложения шредингеровских операторов $u(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\,\omega^{-1/2}[a(\vec{k}) + a^+(-\vec{k})]e^{i\vec{k}\vec{x}}, \qquad (1.21)$$

$$\pi(\vec{x}) = \frac{-i}{\sqrt{2V}}\Sigma_k\sqrt{\omega}[a(\vec{k}) - a^+(-\vec{k})]e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Подставим в (1.16) вместо операторов и функции d их фурье-разложения (1.21), (1.18), (1.19) и (1.20). Умножим обе части полученных двух равенств на $\exp(i\vec{k}_0\vec{x})$ и проинтегрируем по x. В результате получим:

$$a_t(\vec{k}) = a(\vec{k}) - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, d_t(\vec{k}), \tag{1.22}$$

$$a_t^+(\vec{k}) = a^+(\vec{k}) - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, d_t(-\vec{k}). \tag{1.23}$$

Поскольку гамильтониан должен быть эрмитовым, то $\rho(\vec{x},t)$ должно быть действительным. Отсюда $d_t^*(\vec{k}) = d_t(-\vec{k})$; так что (1.23) является эрмитово сопряженным к (1.22), как и должно быть.

Собственные вектора $H(t) = \Sigma_k \omega\, a_t^+(\vec{k})\, a_t(\vec{k}) + H_{-c}^{\to}$ теперь могут быть найдены точно так же, как это сделано в /3/. С каждым номером свободы $\vec{k}$ сопоставляется переменная $q_{\vec{k}}$, принимающая сплошной спектр значений от $-\infty$ до $+\infty$. Перестановочные соотношения $[a(\vec{k}), a(\vec{k})] = 1$ удовлетворяются, если $a(\vec{k})$ и $a^+(\vec{k})$ представить как $(q_k + \partial/\partial q_k)/\sqrt{2}$ и $(q_k - \partial/\partial q_k)/\sqrt{2}$ соответственно. В q_k-представлении собственные векторы $H(t)$ имеют вид бесконечного произведения функций $\phi_n^k(q_k)$, выражающихся через нормированные функции Эрмита h_n:

$$\Psi_t(\{n(\vec{k})\}) = \Pi_{k'}\phi^{k'}_{n(k')}(q_{k'}), \qquad \phi_n^k(q_k) = e^{-i\sigma_t(\vec{k})q_k}\, h_n(q_k + r_t(\vec{k})), \tag{1.24}$$

$$r_t(\vec{k}) = -\mathrm{Re}\sqrt{\omega}\, d_t(\vec{k}) = \omega^{-3/2}\mathrm{Re}\,\rho_t(\vec{k}), \qquad \sigma_t(\vec{k}) = \omega^{-3/2}\,\mathrm{Im}\,\rho_t(\vec{k}). \tag{1.25}$$

В (1.24) $\{n(\vec{k})\}$ обозначает совокупность чисел заполнения (число заполнения $n(\vec{k})$ есть номер возбуждения $\vec{k}$-того осциллятора).

Собственные значения $H(t)$ равны $\Sigma_k n(\vec{k})\,\omega(k) + H_0$ и не зависят от t (и от $\rho(\vec{x},t)$). Состояние с наименьшей энергией – все $n(\vec{k})$ равны нулю – имеет вид:

$$\Omega_t = \Pi_k \phi_0^k(q_k). \tag{1.26}$$

Обозначим через $\Psi_t(\vec{k}_0)$ состояние со всеми числами $n(\vec{k})$, равными нулю, кроме одного, k_0-того, равного 1: $n(k_0) = 1$. Его энергия равна $\omega(k_0) = \sqrt{k_0^2 + m_0^2}$, если ее отсчитывать от наименьшей энергии (равной H_0).

Собственные состояния свободного поля (случай $\rho = 0$), конечно, отличаются от собственных состояний с теми же числами заполнения в случае $\rho \neq 0$. В частности, состояние

$$\Omega_0 = \Pi_k h_0^k(q_k) \tag{1.27}$$

может быть даже ортогональным к (1.26) /3,7/.

Операторы $a_t(\vec{k})$ в предыдущем изложении имели только формальное значение: $H(t)$ приобретает диагональный вид в представлении, где диагонален оператор $N_t = \Sigma_k a_t^+(\vec{k})\, a_t(\vec{k})$. С той же целью облегчения решения задач теории аналогичные операторы вводил Фридрихс /2/, называя их модифицированными (modified) операторами. Он не придавал им большего физического смысла, чем $a(\vec{k})$. Сейчас мы переходим к обоснованию употребления именно $a_t(\vec{k})$ в качестве оператора уничтожения реального (физического) мезона.

§ 2. Частичная интерпретация теории с источником.

Представляется очевидным, что вакуумом следует называть состояние с наименьшей полной энергией (см. /5/, глава 17, § 1). В нашей модели таким состоянием является собственный вектор Ω_t оператора $H(t)$ (см. (1.26)).

Он не может быть собственным состоянием оператора числа "голых" частиц $N = \Sigma_k a^+(k)\vec{a}(\vec{k})$, так как N с $H(t)$ не коммутирует. В состоянии Ω_t можно найти любое количество "голых" частиц. Естественно считать, что понятие реальной частицы во всяком случае должно быть таким, чтобы в физическом вакууме реальные частицы не присутствовали бы. Поэтому N нельзя признать оператором числа реальных частиц.

Мы установили, что и $N_{in} = \Sigma_k A^{+}_{in}(\vec{k}) A_{in}(\vec{k})$ тоже не коммутирует с $H(t)$ и тоже не может поэтому описывать реальные частицы.

Можно проверить, что оператор $N_t = \Sigma_k a^{+}_t(\vec{k}) a_t(\vec{k})$ коммутирует с $H(t)$ и аннулирует Ω_t. Подтвердим, что, действительно, $a_t(\vec{k})$ являются операторами уничтожения реального мезона. Пусть E_{min} обозначает следующее после вакуумного собственное значение $H(t)$, отсчитываемое от энергии вакуума. В нашей модели $E_{min} = m_0$ [x/]. Назовем соответствующее собственное состояние $H(t)$ физическим одночастичным состоянием в момент t [xx/] (ср. [/5/], глава 17, фиг. 135). Поскольку после E_{min} начинается непрерывный (при $V \to \infty$) спектр, то состояние с $E = m_0$ описывает покоящуюся частицу, а вектора $\Psi(\vec{k})$ (см. § 1), соответствующие $E = \sqrt{m^2 + k^2}$, $0 < k < \infty$, описывают прочие состояния свободной частицы (ввиду того, что индексы E и $\vec{k}$ связаны соотношением $E^2 - k^2 = m^2$, характерным для свободной частицы). Как и полагается, эти состояния задаются указанием одной массы покоя m_0 и одного вектора $\vec{k}$. Как и Ω_t, состояния $\Psi_t(\vec{k})$ обладают важным свойством стационарности в тех промежутках времени, где H от t не зависит.

Теперь можно непосредственно проверить, что состояние $\Psi_t(\vec{k})$ превращается в Ω_t действием оператора $(q_k + \partial/\partial q_k)/\sqrt{2} - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, d_t(\vec{k}) = a_t(\vec{k})$

---

x/ В других теориях E_{min} может быть некоторой функцией m_0, константы связи и прочих параметров теории.

xx/ Гринберг и Швебер [/8/] определяли "одетое" одночастичное состояние как собственное состояние полного гамильтониана и полного импульса с собственными значениями E и $\vec{p}$, причем такими, что $E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$. Это определение не годится для нашей модели, где оператор импульса еще надо определить (см. ниже), а также для случаев, когда после E_{min} идет дискретный спектр (соответствующий, например, связанным состояниям частицы во внешнем поле).

и что эрмитово сопряженный оператор $a^{+}_t(\vec{k})$ вакуум Ω_t превращает в $\Psi_t(\vec{k})$. Поэтому $a_t(\vec{k})$ следует назвать оператором уничтожения реальной (физической) частицы.

Подчеркнем одну особенность определения вакуума в рассматриваемой модели. Нельзя при определении вакуума требовать, чтобы его импульс равнялся нулю (такое требование было бы и излишним, ибо наинизшей энергии соответствует единственное состояние Ω_t). В модели с источником a priori неясно, есть ли оператор полного импульса. Действительно, нельзя определить такой оператор обычным образом, как представление бесконечно малого пространственного смещения физической системы как целого: такой оператор должен был бы коммутировать с генератором смещения во времени (гамильтонианом), отсюда следовало бы сохранение полного импульса, чего в нашей модели мы вовсе не ожидаем. Покажем, что все же существует оператор импульса реального мезонного поля, который равняется нулю в состоянии Ω_t. Импульс поля мы определим как генератор сдвига оператора $\phi_t(\vec{x})$:

$$[\phi_t(\vec{x}), P_{tz}] = -i \frac{\partial}{\partial z} \phi_t(\vec{x}). \qquad (2.1)$$

Выражение для такого оператора указать нетрудно: ведь коммутационные соотношения $\phi_t(\vec{x})$ и $\pi_t(\vec{x})$ такие же, как и для свободных полей $u(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$.

$$P_{tz} = -\tfrac{1}{2} \int d^3x \left[\pi_t(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial z} \phi_t(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z} \phi_t(\vec{x}) \pi_t(\vec{x})\right]. \qquad (2.2)$$

Ср. (6.10) в [/1/]; заметим, что выражение (7.197) в [/5/] отличается от (6.10) знаком и является ошибочным.

Оператор P_{tz} равен нулю в Ω_t и коммутирует с $H(t)$. Его собственные значения равны $\Sigma_k n(\vec{k})\vec{k}$, так что индекс $\vec{k}$ можно называть импульсом.

Мы не пользуемся термином "одетые частицы" [/8/] потому, что в данной модели есть только одно квантованное поле, нет частиц второго сорта, которые могли бы образовывать "шубу".

Физические или "одетые" операторы не имеют отношения к перенормированным, см.[8]. Было показано, что они не являются также и in–out операторами, вообще говоря (конечно, для задач рассеяния в случае, когда источник выключается при больших $|t|$, in и out – состояния являются физическими и в нашей модели).

§ 3. Уравнение для физических амплитуд

Состояния с определенным числом физических частиц теперь могут быть построены как

$$\Psi_t(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, a_t^+(\vec{k}_1)\dots a_t^+(\vec{k}_n)\Omega_t\,. \qquad (3.1)$$

В нашей модели эти вектора только нормировкой отличаются от (1.24) – состояний с определенными числами заполнения.

Имеющая физический смысл задача Коши должна ставиться следующим образом. Прежде всего начальный вектор $\Phi(t_0)$ должен быть состоянием вида $\Psi_{t_0}(\vec{k}_1,\dots)$. В последующие моменты времени t имеет смысл не сам вектор $\Phi(t) = U(t,t_0)\Phi(t_0)$, а его проекции на физические состояния (3.1), отнесенные к этому моменту t:

$$F_t^{(n)}(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n) = \langle\Psi_t(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n),\ \Phi(t)\rangle = \langle\Omega_t\,,a_t(\vec{k}_1)\dots a_t(\vec{k}_n)\Phi(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Другими словами, состояние должно описываться не только вектором $\Phi(t)$, но и набором векторов (3.1), которые в тот же момент времени описывают вакуум, одночастичное состояние и т.д.

Проекции $F_t^{(n)}$ имеют вид матричных элементов и поэтому не зависят от выбора картины. В гейзенберговской картине их можно было бы определить с помощью постоянного во времени вектора состояния Φ, гейзенберговских операторов $A_t(\vec{k})\exp(-i\omega t)$ (см. (1.11)) и зависящего от времени вектора вакуума (напомним, что он определяется уравнением $H(t)\Omega = E_\Omega\Omega$, а не временным уравнением Шредингера).

Естественно назвать $F_t^{(n)}(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n)$ амплитудами Фока (ср. (7.39) в[5]). Получим уравнение для них:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t = \langle\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t\,,\Phi(t)\rangle + \langle\Psi_t\,,\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)\rangle =$$

$$= \langle\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t\,,\ \Phi(t)\rangle + \frac{1}{i}\sum_{m=1}^{n}\omega(k_m)F_t\,. \qquad (3.3)$$

Использовано уравнение Шредингера $\partial\Phi(t)/\partial t = -iH(t)\Phi(t)$, эрмитовость $H(t)$ и тот факт, что (3.1) является собственным вектором $H(t)$ с собственным значением $[\omega(\vec{k}_1)+\dots+\omega(\vec{k}_n)]$. В тех интервалах времен, где ρ постоянно, Ψ_t от времени не зависит и уравнение для F_t не отличается от уравнения случая $\rho = 0$: нет ни рождения–уничтожения, ни рассеяния физических частиц, несмотря на наличие источника. Этот факт отмечался в литературе (см. гл. 9 в[4]), но только для случая постоянного при всех временах ρ и только по отношению к задаче рассеяния: начальное состояние отнесено к $t\to-\infty$, состояние при $t\to\infty$ должно совпадать с начальным (не разбирается, например, такой вопрос: может ли физическая частица появиться на короткое время и затем исчезнуть).

Сейчас будет показано, что если источник зависит от времени, то через посредство члена $\langle\partial\Psi_t/\partial t\,,\ \Phi(t)\rangle$ одночастичная амплитуда Фока, например, зацепляется с вакуумной и двухчастичной. $\partial\Psi_t/\partial t$ можно найти непосредственным дифференцированием выражения (1.24), пропорционального Ψ_t. Более прост способ, изложенный в § 31 книги[9]. Дифференцируя по времени обе части уравнения $H(t)\Psi_t(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n) = E_n\Psi_t$, получаем $(E_n - H)\dot{\Psi}_t = \dot{H}\Psi_t$, откуда:

$$\dot{\Psi}_t = (E_n - H)^{-1}\dot{H}\Psi_t + \Xi\,, \qquad (3.4)$$

где вектор Ξ должен быть таков, что $(E_n - H)\Xi = 0$, т.е. должен быть пропорциональным Ψ_t. При непосредственном дифференцировании (1.24) из-за действительности источника получается, что $\Xi = 0$, см. также[9]. Поскольку

$$\dot{H}(t) = -\Sigma_k\, \omega \sqrt{\frac{\omega}{2}}\,[\dot{d}_t^*(\vec{k})\, a_t(\vec{k}) + a_t^+(\vec{k})\,\dot{d}_t(\vec{k})]$$

и вектора $a_t(\vec{k})\Psi_t$ и $a_t^+(\vec{k})\Psi_t$ опять являются собственными состояниями $H(t)$ с собственными значениями $E_n - \omega(k)$ и $E_n + \omega(k)$ соответственно, то

$$\dot{\Psi}_t(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n) = -\Sigma_k \sqrt{\frac{\omega}{2}}\,[\dot{d}_t^*(\vec{k})\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\vec{k},\vec{k}_i}\Psi_t(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_{i-1},\vec{k}_{i+1},\dots\vec{k}_n) -$$

$$- \dot{d}_t(k)\sqrt{n+1}\;\Psi_t(\vec{k},\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n)]. \qquad (35)$$

Использованы соотношения (7.42) и (7.45) в [5]. Теперь (3.3) приобретает вид:

$$i\frac{\partial}{\partial t}F_t^{(n)}(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n) = [\omega(k_1) + \dots + \omega(k_n)]F_t^{(n)}(\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n) +$$

$$+ i\Sigma_k \frac{1}{\omega\sqrt{2\omega}}[\dot{\rho}_t^*(\vec{k})\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\delta_{k,k_i}F_t^{(n-1)}(\vec{k}_1\dots\vec{k}_{i-1},\vec{k}_{i+1},\dots\vec{k}_n) - \qquad (3.6)$$

$$-\dot{\rho}_t(\vec{k})\sqrt{n+1}\;F_t^{(n+1)}(\vec{k},\vec{k}_1,\dots\vec{k}_n)].$$

Уравнение для всего столбца Фока $F(t) = \{F_t^{(0)}, F_t^{(1)}(\vec{k}_1), F_t^{(2)}(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\dots\}$ можно записать так:

$$i\frac{\partial}{\partial t}F(t) = \Sigma_k\{\omega(k)\,a^+(\vec{k})\,a(\vec{k}) +$$

$$+ \frac{i}{\omega\sqrt{2\omega}}[\dot{\rho}_t^*(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) - \dot{\rho}_t(\vec{k})\,a(\vec{k})]\}F(t). \qquad (3.7)$$

Сравнение (3.7) с (3.6) определяет действие введенных операторов a и a^+ на $F(t)$ (см. также (6.82) и (6.83) в [5]). Частным следствием (3.7) будет, например, привычный эффект высвобождения "облака виртуальных частиц" при "выключении взаимодействия". Если до некоторого момента времени источник был статическим, а состояние было вакуумным (есть только источник, реальных частиц нет), то после выключения источника это состояние будет выглядеть как суперпозиция многочастичных "голых" состояний (которые в случае отсутствия источника являются реальными).

Возможность рождения и уничтожения реальных частиц в модели с нестатическим источником показывает, что для зависящих от времени гамильтонианов несправедливо утверждение Вентцеля и др. (см. [1] § 7; [5] гл. 12, § 1; [8]): если гамильтониан можно привести унитарным преобразованием к виду свободного, то теория эквивалентна свободной.

Сравним (3.7) с первоначальным уравнением Шредингера

$$i\partial\Phi(t)/\partial t = H(t)\,\Phi(t) =$$

$$= \Sigma_k\{\omega a^+(\vec{k})\,a(\vec{k}) + \frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\rho_t(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) + \rho_t^*(\vec{k})\,a(\vec{k})]\}\Phi(t). \qquad (3.8)$$

Отмечаем, что в (3.7) фигурирует не сама функция источника, но производная по времени от нее. Это, в частности, приводит к вышеупомянутой эквивалентности случая со статическим источником свободному случаю. Кроме того, в (3.7) присутствует дополнительный обрезающий множитель $1/\omega(k)$ в члене взаимодействия[x].

Эти отличия не сводятся к одному только изменению ("облачению") функции источника. Если в операторе взаимодействия в (3.7)

$$\tilde{H}_I(t) = \Sigma_k \frac{1}{\omega\sqrt{2\omega}}[\dot{\rho}_t^*(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) - \dot{\rho}_t(\vec{k})\,a(\vec{k})] \qquad (3.9)$$

ввести вместо a^+ и a операторы u_a и π_a, которые связаны с a^+ и a так же, как u и π связаны с $a^+(\vec{k})$ и $a(\vec{k})$ (см. (1.21)), то он приобретает вид $\int d^3x\,\pi_a(\vec{x})\,\eta(\vec{x},t)$, где $\eta(\vec{x},t) = V^{-1/2}\,\Sigma_k - \exp(i\vec{k}\vec{x})\,\partial\rho_t^*(\vec{k})/\partial t\cdot\omega^{-2}$.

Пусть источник $\rho(\vec{x},t)$ является точечным, расположенным в начале координат: $\rho(\vec{x},t) = \lambda(t)\,\delta(\vec{x})$, $\rho_t(\vec{k}) = \lambda(t)/\sqrt{V}$.
Тогда "источник" η будет размазанным, причем размазка определяется параметром m_0 или комптоновской длиной волны мезона, поскольку фурье-образ η имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}\lambda^*(t)/\sqrt{V}\,(k^2 + m_0^2)$. Таким образом, на реальные частицы действует уже не точечный источник и исчезнут расходи-

x/ Сходное следствие введения физических ("одетых") состояний отмечалось в [10] для модели Ван Хова-Рююжгрока.

мости, появляющиеся при попытке решить (по теории возмущений или точно) первоначальное уравнение Шредингера с точечным $\rho(\vec{x},t)$.

Оператор уравнения (3.7) не совпадает с оператором полной энергии $H(t)$, в который по-прежнему входит исходная функция источника $\rho(\vec{x},t)$. Однако это уравнение такого же типа, что и (3.8), и решать его можно так же. В частности, можно перейти в "гейзенберговское" представление, где операторы a будут зависеть от времени, а столбец F будет постоянным (не путать с первоначальной гейзенберговской картиной). Тогда задачи типа "в момент t_0 имеется n_0 физических частиц, какова вероятность того, что в момент $t > t_0$ будет n частиц" можно решать так же, как решаются в книге Фридрихса /2/ аналогичные задачи для "голых" частиц (заметим, что с точки зрения настоящей работы задачи для "голых" частиц следует рассматривать только как математические упражнения, но не физические задачи).

Литература

1. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ГИТТЛ, Москва, 1947, § 7.
2. K.O. Friedrichs. Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Felds. New York, 1953, Interscience Publishers.
3. L. Van Hove. Physica, 18, 145 (1952).
4. Э. Хенли, В. Тирринг. Элементарная квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1963.
5. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, Москва, 1963.
6. F.A. Kaempffer. Concepts in Quantum Mechanics, sect. 7, Acad. Press, New York, 1965.
7. М.И. Широков. Некоторые вопросы квантовой теории скалярного поля с точечными источниками. Препринт ОИЯИ, Р-2700, Дубна, 1966.
8. O.W. Greenberg, S.S. Schweber. Nuovo Cim., 8, 378 (1958).
9. Л. Шифф. Квантовая механика. ИЛ, Москва, 1957.
10. Th.W. Ruijgrok. Physica, 1958, 24, 211.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1966 г.