ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 3038

Л.Г. Литвиненко

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА В НЕРЕНОРМИРУЕМОЙ ТЕОРИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P2 - 3038

Л.Г. Литвиненко x/

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА В НЕРЕНОРМИРУЕМОЙ ТЕОРИИ

x/ Институт математики АН МССР.

Введение

Как известно, всякая теория может быть причислена к ренормируемым или неренормируемым в смысле разложения S -матрицы в ряд теории возмущений по степеням константы связи. В ренормируемой теории конечный результат может быть получен введением конечного числа контрчленов. Здесь бесконечности могут быть отождествлены с затравочными зарядом и массой.

В неренормируемых теориях эта процедура не состоятельна. В этом случае стараются использовать иные методы, не прибегая к теории возмущений.

Например, в работе [1] выполняется суммирование графов, которые порождаются уравнением Бете-Солпитера. И хотя суммирование по теории возмущений ведет к расходимостям, формальное суммирование наиболее расходящихся членов дает конечный результат.

С помощью итерационной схемы ("пературизации") вычисляются поправки к сумме наиболее сингулярных членов. Как и в работе Ли[2], эти поправки зависят неаналитически от константы связи.

Представляется интересным применить похожие методы к расчету различных величин.

Мы будем изучать уравнение Дайсона для функции Грина в случае неренормируемой теории.

В использованном нами лестничном приближении это уравнение имеет конечное решение, убывающее во всей плоскости p^2.

2. Уравнение для функции Грина

Рассмотрим взаимодействие векторных частиц $A_\nu(x)$ с массой m и скалярных частиц $\phi(x)$ с массой μ. Лагранжиан взаимодействия выберем в таком виде:

$$L(x) = -ig\left(\phi^*(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi^*(x)}{\partial x_\nu}\phi(x)\right)A_\nu(x). \qquad (1)$$

Эта теория инвариантна относительно преобразований ренормализационной группы /3/. Перенормированное уравнение Дайсона имеет такой вид:

$$G^{c\,-1}(p) = Z S_0^{c\,-1}(p) - \Sigma^{c}(p). \qquad (2)$$

Вводя функцию $\overset{\approx}{G}(p)$, с помощью соотношения $G^{c}(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\overset{\approx}{G}(p)$, получим следующее уравнение:

$$\overset{\approx}{G}^{-1}(p) = Z(p^2-\mu_0^2) - g^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{(p+k)^2 - m^{-2}(p^2-k^2)^2}{(p-k)^2-m^2}\overset{\approx}{G}(k). \qquad (3)$$

Будем решать это уравнение, используя приближение $\overset{\approx}{G}(p) \to S(p)\overset{\approx}{G}^{-1}(p)S(p)$, что соответствует учету лишь диаграмм лестничного типа. Здесь удобно повернуть контур интегрирования по k_0 на угол $\frac{\pi}{2}$ /4/. Мы увидим, что для нашей функции $\overset{\approx}{G}^{-1}(p)$ такой поворот сделать можно. Таким образом будем выполнять интегрирование по евклидову четырехмерному k-пространству. Для $\overset{\approx}{G}^{-1}(p)$ имеем такое линейное уравнение:

$$\overset{\approx}{G}^{-1}(p) = Z(p^2+\mu_0^2) + \frac{g^2}{(2\pi)^{12}}\int d^4k\,\frac{(p+k)^2+m^{-2}(p^2+k^2)^2}{(p-k)^2+m^2}\cdot\frac{\overset{\approx}{G}^{-1}(k)}{(k^2+\mu^2)^2}. \qquad (4)$$

Выделяя наиболее сингулярную часть ядра /5/, имеем:

$$\overset{\approx}{G}^{-1}(p) = Z(p^2+\mu_0^2) + \frac{g^2}{(2\pi)^{12}}\cdot\frac{1}{m^2}\int d^4k\,\frac{(p^2-k^2)^2}{(p-k)^2(k^2+\mu^2)^2}\overset{\approx}{G}^{-1}(k) +$$

$$+\frac{4g^2}{(2\pi)^{12}}\int d^4k\,\frac{p^2k^2-(pk)^2}{[(p-k)^2+m^2](p-k)^2(k^2+\mu^2)^2}\overset{\approx}{G}^{-1}(k). \qquad (5)$$

Исследуем уравнение для наиболее сингулярной части. Перейдем от уравнения интегрального к уравнению дифференциальному. Используя сферические координаты, можно записать:

$$F(x) = Z(x+\mu_0^2) + \frac{g^2}{(2\pi)^{11}}\cdot\frac{1}{m^2}\int_0^x\frac{y\,dy\,(x-y)^2}{(y+\mu^2)^2}F(y)\int_0^\pi\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{x-2\sqrt{xy}\cos\theta+y}. \qquad (6)$$

Мы здесь положили $p^2 = x$, $k^2 = y$, $\cos\theta = \frac{(pk)}{|p|\cdot|k|}$. Это уравнение легко приводится к следующему виду:

$$F(x) = Z(x+\mu_0^2) + \alpha^2 x I_1 + \alpha^2 I_2 - 3\alpha^2 x\int_x^\infty\frac{yF(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2} -$$

$$-3\alpha^2\int_0^x\frac{y^2F(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2} + \frac{\alpha^2}{x}\int_0^x\frac{y^3F(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2} + \alpha^2 x\int_x^\infty\frac{F(y)}{(y+\mu^2)^2}dy, \qquad (7)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{g^2}{4m^2(2\pi)^{10}}, \quad I_1 = \int_0^\infty\frac{yF(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2}, \quad I_2 = \int_0^\infty\frac{y^2F(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2}.$$

Вместо уравнения /7/ удобно рассматривать соответствующее ему дифференциальное уравнение, которое получается из уравнения (7) последовательным дифференцированием его правой и левой части:

$$\frac{d^4}{dx^4}[xF(x)] + 6\alpha^2\frac{F(x)}{(x+\mu^2)^2} = 0. \qquad (8)$$

Нас интересует решение этого уравнения в точках $x = 0$ и $x = \infty$. Точка $x = 0$ для этого уравнения является регулярной особой точкой, точка $x = \infty$ – иррегулярной особой точкой.

В окрестности точки $x = \infty$ решения имеют следующий вид /6/:

$$F_1(x) = x^{-1}\exp(-4\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha'}\,x^{1/4})\cdot U(x),$$

$$F_2(x) = x^{-1}\exp(-4e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha'}\,x^{1/4})U(x),$$

$$F_3(x) = x^{-1}\exp(4e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha'}\,x^{1/4})U(x), \tag{9}$$

$$F_3(x) = x^{-1}\exp(4e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha'}\,x^{1/4})U(x).$$

Здесь $\alpha'^2 = 6\alpha^2$ и $U(x) = \sum_{n=0}^{-\infty} a_n x^n$.

Решения $F_1(x)$, $F_2(x)$ экспоненциально убывают, решения $F_3(x)$, $F_4(x)$ экспоненциально возрастают. Выбираем решение уравнения в виде

$$F(x) = b_1 F_1(x) + b_2 F_2(x). \tag{10}$$

Это обеспечивает нам сходимость интегралов в уравнении (7). Таким образом, решение убывает во всей плоскости комплексного переменного x и имеет разрез на отрицательной действительной оси. Поэтому проделанный ранее поворот контура вокруг оси k_0 возможен. Разложение решений уравнения (8) вблизи точки $x = 0$ имеет такой вид:

$$F_1(x) = x^2 - \frac{\alpha'^2}{\mu^4}\cdot\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + O(x^6),$$

$$F_2(x) = x - \frac{\alpha'^2}{\mu^4}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^4 + O(x^5),$$

$$F_3(x) = 1 - \frac{\alpha'^2}{\mu^4}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^3 + O(x^4),$$

$$F_4(x) = x^{-1} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}x^2 + \frac{1}{3}\frac{\alpha'^2}{\mu^4}x^2\log x + O(x^3).$$

Тогда в окрестности нуля решение уравнения (8) имеет асимптотику

$$F(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + c_4 x^2. \tag{12}$$

Найдем граничное условие, при котором решение дифференциального уравнения удовлетворяет интегральному уравнению. Для этого, используя (8), выполним в (7) интегрирование по частям. Это нам дает:

$$F(x) = Z(x + \mu_0^2) - \frac{c_1}{x} - c_2 + \alpha'^2 x I_1 + \alpha'^2 I_2 + F(x). \tag{13}$$

Отсюда следует, что решение дифференциального уравнения удовлетворяет интегральному уравнению, если:

$$c_1 = 0, \qquad Zx + \alpha'^2 x I_1 = 0,$$

$$Z\mu_0^2 - c_2 + \alpha'^2 x I_2 = 0. \tag{14}$$

Из этих соотношений имеем:

$$Z = -\alpha'^2\int_0^\infty \frac{yF(y)}{(y+\mu^2)^2}dy,$$

$$Z\mu_0^2 - c_2 + \alpha'^2\int_0^\infty \frac{y^2F(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2} = 0. \tag{15}$$

3. Приближение $\mu^2 = 0$

Рассмотрим частный случай уравнения (8), когда $\mu^2 = 0$. Запишем его в таком виде:

$$\left(x\frac{d}{dx} - 2\right)\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\left(x\frac{d}{dx} + 1\right)x\frac{d}{dx}F(x) + \alpha'^2 x F(x) = 0. \tag{16}$$

Решение этого уравнения, которое убывает при $x \to \infty$, есть функция Мейера /7/:

$$F(x) = G^{30}_{04}(\alpha'^2 x \mid 2, 1, 0, -1). \tag{17}$$

При малых значениях аргумента имеем такое разложение:

$$
\begin{aligned}
G^{30}_{04}(\alpha'^2 x|2,1,0,-1) &= 1+\alpha'^2 x\left(\frac{3}{4}+\gamma\right)+\frac{\alpha'^2 x}{2}\log\alpha'^2 x\;+\\
&+\frac{\alpha'^2 x}{2}\log\alpha'^2 x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha'^2 x)^n}{N}\left[\psi_n+\psi_{n+1}+\psi_{n+2}+\psi_{n+3}\right]-\\
&-\frac{\alpha'^2 x^2}{2}\log\alpha'^2 x\sum_{n=0}\frac{(-\alpha'^2 x)^n}{N}-\alpha'^2 x\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(-\alpha'^2 x)^n}{N},
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

где $\Psi = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ и $N = n^3(n+1)^3(n+2)^2(n+1)(n!)^4$.

Согласуя это разложение с выражением, даваемым уравнением (7), получим для $F(x)$ следующее разложение при малых значениях α'^2:

$$
F(x) = c_2\left[1+\alpha'^2 x\left(\frac{3}{4}+\gamma\right)+\frac{\alpha'^2 x}{2}\log\alpha'^2 x + O(\alpha'^2 x)\right]. \qquad (19)
$$

Видим, что функция $F(x)$ имеет логарифмическую точку ветвления при $\alpha'^2 = 0$.

Теперь из соотношений (15) можно оценить константу перенормировки и установить связь между μ^2 и μ_0^2. Будем рассматривать эти соотношения, полагая $\mu^2 = 0$. Интеграл I_1 расходится логарифмически на нижнем пределе. Этот интеграл можно оценить, полагая нижний предел равным μ^2. Действительно, при малых μ^2 этот интеграл можно записать таким образом:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{yF(y)}{(y+\mu^2)^2}\,dy &= \int_0^{\mu^2}\frac{yF(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2}+\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{yF(y)\,dy}{(y+\mu^2)^2}=\\
&= f(\mu^2)+\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{yF(y)}{y^2}\,dy-2\mu^2\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{yF(y)}{y^3}\,dy+\ldots
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Отсюда видно, что при малых μ^2 основной вклад дает интеграл

$$
I_1 = \int_{\mu^2}^{\infty}\frac{yF(y)}{y^2}\,dy .
$$

Соотношения (15) запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&Z+\alpha'^2 c_2\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{G^{30}_{04}(\alpha'^2 y|2,1,0,-1)}{y}\,dy = Z-c_2\alpha'^2\log\alpha'^2\mu^2 ,\\
&Z\mu_0^2-c_2+\alpha'^2 c_2\int_0^{\infty}G^{30}_{04}(\alpha'^2 y|2,1,0,-1)\,dy = Z\mu_0^2+c_2 .
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

Из первого соотношения следует, что $Z = c_2\alpha'^2\log\alpha'^2\mu^2$, т.е. константа перенормировки есть ограниченная величина. С использованием второго соотношения имеем:

$$
\mu^2 = \frac{1}{\alpha'^2}\, e^{-\frac{1}{\mu_0^2\alpha'^2}} . \qquad (22)
$$

Из полученного выражения видно, что при любом фиксированном α'^2 и μ_0^2 можно найти соответствующее значение μ^2 .

4. Заключение

Таким образом, показано, что в случае взаимодействия, которое задается в виде лагранжиана /1/, перенормированное уравнение Дайсона в лестничном приближении имеет конечное решение, убывающее на бесконечности. Это решение имеет неаналитическую зависимость от константы связи, т.к. в разложении (18) содержится член вида $\alpha'^2\log\alpha'^2$, где α' есть константа связи. В рассмотренной модели удалось также найти связь между физической массой μ^2 и затравочной μ_0^2 .

Лестничное приближение, которое мы здесь использовали, не является достаточно хорошим для изучения свойств функции Грина. Интересно было бы в дальнейшем изучить более полную функцию Грина, рассмотрев нелинейное уравнение.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б.А. Арбузову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Литература

1. G. Feinberg, A. Pais. Phys. Rev., 131, 2724 (1963); 133 B, 477 (1964).
2. T.D. Lee. Phys. Rev., 128, 899 (1962).
3. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, 1957.
4. G. Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1954).
5. Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов. Nuovo Cimento, 38, 795 (1965).
6. Э. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ. Харьков, 1939.
7. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. "Наука". Москва, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1966 г.