ДАН СССР 1968, т 180, №4, с 824-827

22/XII-66

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3010

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Ш. Ходжаев

К ТЕОРИИ $2(2s+1)$ -КОМПОНЕНТНЫХ СВОБОДНЫХ КВАНТОВАННЫХ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

I

1966

P2 - 3010

Л.Ш. Ходжаев

К ТЕОРИИ $2(2s+1)$ -КОМПОНЕНТНЫХ СВОБОДНЫХ КВАНТОВАННЫХ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

I

В настоящей работе мы дадим теоретико-групповую и функциональную формулировку формализма $2(2s+1)$ -компонентных свободных квантованных спинорных полей [1,2] с целью изучения в дальнейшем ковариантной структуры элементов причинной S - матрицы.

1. Оснащенное гильбертово пространство

Обозначим через $D_S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} D^{(n)}_{S(\Omega^+_n)}[ms]_n$ ядерное пространство [3] Фока с элементами

$$\Phi = \{\Phi^0, \Phi^{s_1 m_1}(p_1), \ldots, \Phi^{s_1 m_1, \ldots s_n m_n}(p_1, \ldots, p_n), \ldots\}_0^{\infty} = \{\Phi^{(sm)_n}(p)_n\}_0^{\infty} . \qquad (1.1)$$

Для всех спинов $s_i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \; i = \overline{1,n}$ n - частичное ядерное подпространство Фока $D^{(n)}_{S(\bar\Omega^+_n)}[ms]_n$ состоит из элементов

$$\Phi^{(sm)_n}(p)_n = \{\Phi^{s_1 m_1}_{s^1_3}(p_1), \ldots, \Phi^{s_1 m_1, \ldots, s_n m_n}_{s^1_3, \ldots, s^n_3}(p_1, \ldots, p_n)\} = \{\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n\}, \quad s^i_3 = \overline{-s_i, s_i} , \qquad (1.2)$$

принадлежащих пространству основных функций $S(\bar\Omega^+_n)$, определенных в области $\bar\Omega^+_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \bar\Omega^+_{m_i}$, где $\bar\Omega^+_{m_i}$; $\{p_i^2 = (p_i^0)^2 - (\vec p_i)^2 = m_i^2, \; p_i^0 > 0\}$. Предполагается, что все элементы $\Phi^{(sm)_n}_{(p)_n} = 0$ при $n > N$, где N -некоторое целое положительное число. Пространство $D^{(n)}_{S(\bar\Omega^+_n)}[ms]_n$ натянуто на ортонормированную систему функций $\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n \in S(\bar\Omega^+_n)$, симметрическую по всем аргументам $p_1, \ldots, p_n$ и индексам $s^1_3, \ldots, s^n_3$ при целых спинах s_i и антисимметрическую при полуцелых спинах.

Ядерное пространство Фока D_S является топологическим. Говорят, что последовательность векторов $\Phi_h \subset D_S$ сходится к нулю в D_S, если 1) функции $\Phi^{(sm)_n}_h(p)_n \to 0$ для всех n в смысле сходимости в пространстве основных функций $S(\bar\Omega^+_n)$ и 2) функции $\Phi^{(sm)_n}_h(p)_n = 0$ для всех $n > N$ независимо от h

Относительно унитарного оператора $U(a, A)$ спинорной группы Пуанкаре $\tilde P_+ = T \boxtimes SL(2, C)$, где $a \in T$, $A \in SL(2, C)$, функции $\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n \in D^{(n)}_{S(\bar\Omega^+_n)}[sm]_n$ преобразуются согласно

$$(U(a,A)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n = e^{i\sum_{j=1}^{n} a\cdot p_j} \sum_{(s_3')^n} \times \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{D}^{s_j m_j}_{s_3^j\, s_3'^j}[R^{-1}(A,p_j)]\Phi^{(sm)_n}_{(s_3')^n}(A^{-1}p)_n, \quad (1.3)$$

где
$$R^{-1}(A,p) = (p\cdot\tilde\sigma|m)^{1/2} A^{-1}(A^{-1}p\cdot\sigma|m)^{1/2} \in SU(2,C) -$$

так называемое "вигнеровское вращение", а
$$(p\cdot\sigma|m)^{1/2} = [2m(p^0+m)]^{-1/2}[(m+p^0)+\vec p\vec\sigma] \in SL(2,C) -$$

преобразование Лоренца в системе покоя, т.е.

$(p\cdot\sigma|m)^{1/2}\tilde p = p$, где $\tilde p = (m,\vec 0)$, $\sigma = (\sigma_0,\vec\sigma)$, $\tilde\sigma = (\sigma_0, -\vec\sigma)$ — матрицы Паули, $\mathfrak{D}^{sm}[R^{-1}(A,p)]$ —обычное $(2s+1)\times(2s+1)$ —мерное матричное представление вращения $R^{-1}(A,p) \in SU(2,C)$. В формуле (1.3) мы полагаем $(Ap)^\mu = \Lambda(A)^\mu_\nu\, p^\nu$ для $A\in SL(2,C)$ и $\Lambda(A)\in L_+$. В D_S скалярное произведение определяется согласно

$$\langle\psi|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\psi^{(sm)_n}|\Phi^{(sm)_n}\rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(s_3)^n}\int_{\bar\Omega_n^+}\!\!\cdots\int\Big(\prod_{i=1}^{n} d^4p_i\,\delta(p_i^2-m_i^2)\Big)\bar\psi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n\,\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n \qquad (1.4)$$

для любых элементов $\psi,\Phi\in D_S$.

Пусть H_{L_2} –гильбертово пространство, полученное путем пополнения D_S по невыраженному скалярному произведению (1.4). Тогда, по определению, $D_S\subset H_{L_2}\subset D_S'$ – оснащенное гильбертово пространство, где D_S является плотным в H_{L_2} и H_{L_2} – плотным в D_S'.

Состояние произвольной системы частиц массы $m_i>0$ и спина $s_i = 0, 1/2, 1, \ldots$, $i = 1,2,\ldots$ будем описывать при помощи векторов пространства $D_S' = +_{n=0}^{\infty} D'^{(n)}_{S(\bar\Omega_n^+)}[ms]_n$ – пространства линейных непрерывных функционалов в ядерном пространстве Фока D_S, имеющих вид:

$$|\rho(\Phi)\rangle = \sum_{n=0}\sum_{(s_3)^n}|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}\rangle \qquad (1.5)$$

для любого элемента $\Phi = \{\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n\}_0^\infty \in D_S$, где $|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}>$ – обобщенные базисные вектора канонической системы неприводимого представления $[ms]_n = \prod_{i=1}^{n}[m_i\ s_i]$ спинорной группы Пуанкаре $\tilde{P}_+$, описывающие обобщенные состояния системы n-невзаимодействующих частиц массы $m_i > 0$, спина s_i, где $s_3^i = \overline{-s_i, s_i}$, $i = \overline{1,n}$ – собственные значения 3-ей компоненты проекции оператора спина. На эти обобщенные базисные вектора натягивается n-частичное подпространство $D^{(n)'}_{s(\overline{\Omega}^+_n)}[ms]_n$ – гильбертово пространство обобщенных состояний. Трансформационные свойства обобщенных канонических базисных векторов $|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}>$ относительно унитарного преобразования $U(a,A)$ группы Пуанкаре $\tilde{P}_+$ определяются согласно

$$(U(a,A)\rho)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n} = \rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}((U(a,A)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}),$$

где $(U(a,A)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n$ определяются согласно (1.3).

Заметим, что многочастичные обобщенные базисные вектора $|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}>$ в канонической системе получаются на основании ядерной теоремы Шварца /4/ путем прямого произведения одночастичных обобщенных базисных векторов $|\rho^{s_i m_i}_{s_3^i}(\Phi)^{s_i m_i}_{s_3^i}>$ для любого $\Phi^{s_i m_i}_{s_3^i}(p_i) \in D^{(1)}_{s(\overline{\Omega}^+_{m_i})}[m_i\ s_i]$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$1^\circ.\quad \hat{P}^\mu|\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}> = |\rho^{sm}_{s_3}(\hat{P}^\mu\Phi)^{sm}_{s_3}>,\quad \mu = \overline{0,3},$$

где

$$(\hat{P}^\mu\Phi)^{sm}_{s_3}(p) = p^\mu\,\Phi^{sm}_{s_3}(p),\quad p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2;$$

$$2^\circ.\quad \hat{S}_3(p)|\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}> = s_3|\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}>,\quad s_3 = \overline{-s,s},$$

где $\hat{S}_3(p)$ – 3-я компонента проекции оператора спина для частицы, определяемой формулой

$$\hat{S}_j(p) = \frac{1}{2m}\sum_{\mu,\nu,\sigma,\lambda=0}^{3}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}\,(\rho p\cdot\sigma\text{-}|m)^{1/2\,\mu}_{\ j}\,p^\nu\cdot M^{\sigma\lambda},$$

$$\hat{S}_\pm(p)|\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}> = \{(S \mp S_3)(S \pm S_3 + 1)\}^{1/2}|\rho^{sm}_{s_3\pm1}(\Phi)^{sm}_{s_3\pm1}>,$$

где

$$\hat{S}_{\pm}(p) = \hat{S}_1(p) + i\hat{S}_2(p) ;$$

3°. $$\langle\eta^{sm}_{s_3}(\psi)^{sm}_{s_3} | \rho^{sm}_{s'_3}(\Phi)^{sm}_{s'_3}\rangle =$$

$$= \delta_{s_3 s'_3}\int_{\Omega^+_m} d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\bar{\psi}^{sm}_{s_3}(p)\Phi^{sm}_{s'_3}(p) = \delta_{s_3 s'_3}\langle\psi^{sm}_{s_3}|\Phi^{sm}_{s'_3}\rangle ;$$

4°. $$U(a,A)(\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}\rangle = |\rho^{sm}_{s_3}((U(a,A)\Phi)^{sm}_{s_3})\rangle ,$$

где

$$(U(a,A)\Phi)^{sm}_{s_3}(p) = e^{iap}\sum_{(s'_3)}\mathfrak{D}^{sm}_{s_3 s'_3}[R^{-1}(A,p)]\Phi^{sm}_{s'_3}(A^{-1}p). \tag{1.6}$$

Таким образом, гильбертово пространство обобщенных состояний $D^{(1)'}_{s(\bar{\Omega}^+_m)}[ms]$ – пространство неприводимых представлений спинорной группы Пуанкаре $\tilde{P}_+$, натянутое на каноническую систему обобщенных базисных векторов $|\rho^{sm}_{s_3}(\Phi)^{sm}_{s_3}\rangle$, удовлетворяющих условиям 1° – 4°.

Элементы пространства D'_S в спинорном базисе представляются в виде:

$$|\rho(\Phi)] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(\alpha)_n}|\rho^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}(\Phi)^{(\alpha)_n}_{(sm)_n})] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(\alpha)_n}|\rho^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}] \tag{1.7}$$

для любого

$$|\Phi] = \{\Phi^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}[p)_n\}_0^{\infty} = \{\Phi^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}(p]_n\}_0^{\infty} \in D_S ,$$

$$\alpha_i = \overline{-s_i, s_i}, \quad s = 0, ½, 1, 3/2, \quad i = \overline{1,n} .$$

Многочастичные обобщенные спинорные базисные вектора $|\rho^{(sm)_n}_{\alpha}]$, $|\rho^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}]$ и т.д. преобразуются согласно

$$U(a,A)|\rho^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}(\Phi)^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}] = |\rho^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}((U(a,A)\Phi)^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}] . \tag{1.8}$$

Здесь

$$(U(a,A)\Phi)^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}[p)_n = e^{i\sum_{j=1}^{n} a\cdot p_j} \sum_{(\beta)_n} \mathfrak{D}^{s_j m_j}_{\alpha_j \beta_j}(A)\Phi^{(\beta)_n}_{(sm)_n}[A^{-1}p)_n \ , \qquad (1.9)$$

где $\mathfrak{D}^{sm}(A)$ – $(2s+1)\times(2s+1)$ -мерное неунитарное конечное представление группы $SL(2,C)$. Аналогично

$$U(a,A)|\rho^{(\dot{\alpha})_n}_{(sm)_n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(\dot{\alpha})_n}] = |\rho^{(\dot{\alpha})_n}_{(sm)_n}((U(a,A)\Phi)^{(sm)_n}_{(\dot{\alpha})_n}] \ , \qquad (1.10)$$

где

$$(U(a,A)\Phi)^{(sm)_n}_{(\dot{\alpha})_n}[p)_n = e^{-i\sum_{j=1}^{n} a\cdot p_j} \sum_{(\beta)_n} \mathfrak{D}^{s_j m_j}_{\beta_j \alpha_j}(A)^{-1+}\Phi^{(sm)_n}_{(\beta)_n}[A^{-1}p). \qquad (1.11)$$

Заметим, что если многочастичные обобщенные канонические базисные вектора $|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)}>$ преобразуются по унитарным представлениям $\mathfrak{D}^{sm}[R^{-1}(A,p)]$ группы $SU(2,C)$, определенным на массовой поверхности $p^2 = m^2$, то многочастичные обобщенные спинорные базисные вектора $|\rho^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}]$, $|\rho^{(\dot{\alpha})_n}_{(sm)_n}]$, $[\rho^{(sm)_n}_{(\dot{\alpha})_n}|$ и $[\rho^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}|$ преобразуются соответственно по неунитарным конечным представлениям $\mathfrak{D}^{sm}(A)$, $\mathfrak{D}^{sm}(A)^{-1+}$, $\mathfrak{D}^{sm}(A)^{-1T}$ и $\mathfrak{D}^{sm}(A)^{*}$ группы $SL(2,C)$, определенным вне массовой поверхности. Одночастичные обобщенные спинорные базисные вектора удовлетворяют соотношениям 1°–4°, при этом в условии 1° предполагается, что $p^2 \neq m^2$. Между обобщенными базисными векторами в канонических и спинорных системах можно установить связь, например:

$$\sum_{(\alpha)_n} |\rho^{(sm)_n}_{(\alpha)_n}(\Phi)^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}] = \sum_{(s_3)^n} |\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}> \ , \qquad (1.11)$$

где

$$\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n = \sum_{(\alpha)_n} \mathop{\times}_{j=1}^{n} \mathfrak{D}^{s_j m_j}_{s_3^j \alpha^j}[(p_j\cdot\vec{\sigma}|m_j)^{1/2}]\Phi^{(\alpha)_n}_{(sm)_\alpha}[p)_n \qquad (1.12)$$

для любого $\Phi^{(\alpha)_n}_{(sm)_n}[p)_n \in D^{(n)}_{s(\bar{\Omega}^+_n)}[ms]_n$.

2. $2(2s+1)$- компонентные спинорные поля, рассматриваемые как операторнозначные обобщеные функции

Теперь мы введем операторнозначные обобщенные функции рождения $a^{*sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})$ и уничтожения $a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})$ частиц массы $m>0$ и спина s, $s=0,½,1,\ldots$, $s_3=-s, s$, для любой функции $\tilde{f}_{s_3}(p)\in S(\bar{\Omega}^+_m)$, где $\bar{\Omega}^+_m:\{p^2=(p^0)^2-(\vec{p})^2=m^2,\ p^0>0\}$, в канонической системе обобщенных базисных векторов:

$$a^{*sm}_{s_3}(f_{s_3}) = |\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}> = |\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(a^{*sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}>,$$

где

$$(a^{*sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(-)^j\delta_{s_3 s_3'}\delta_{ss_j}\delta_{mm_j}\times \tag{2.2}$$

$$\times\tilde{f}_{s_3}(p_j)\Phi^{s_1m_1,\ldots,\Lambda_j,\ldots,s_nm_n}_{s_3',\ldots,\Lambda_j,\ldots,s_3^n}(p_1,p_{j-1},\Lambda_j,p_{j+1},\ldots,p_n)$$

и

$$a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})|\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}> = |\rho^{(sm)_n}_{(s_3)^n}((a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}>, \tag{2.3}$$

где

$$(a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n = \sqrt{n+1}\int_{\bar{\Omega}^+_n}d^4p\,\delta(p^2-m^2)\tilde{f}_{s_3}(p)\Phi^{sm,(sm)_n}_{s_3(s_3)^n}(p_1(p)_n). \tag{2.4}$$

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутативным соотношениям:

$$[a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3}),a^{*sm}_{s_3'}(\tilde{g}_{s_3'})]_\pm = \delta_{s_3s_3'}\int_{\bar{\Omega}^+_m}d^4p\,\delta(p^2-m^2)\tilde{f}_{s_3}(p)\tilde{g}_{s_3}(p),$$

$$[a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3}),a^{sm}_{s_3'}(\tilde{g}_{s_3'})]_\pm = [a^{*sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3}),a^{*sm}_{s_3'}(\tilde{g}_{s_3'})]_\pm = 0 \tag{2.5}$$

при любых $\tilde{f}_{s_3}(p)$, $\tilde{g}_{s_3}(p)\in S(\bar{\Omega}^+_m)$ и преобразуются по унитарному представлению группы $\tilde{P}_+$ согласно

$$U(a,A)a^{*sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})U^{-1}(a,A) = a^{*sm}_{s_3}((U(a,A)\tilde{f})_{s_3}). \tag{2.7}$$

Здесь

$$(U(a,A)\tilde{f})_{s_3}(p)=e^{iap}\sum_{s'_3}\mathfrak{D}^{sm}_{s_3 s'_3}[R^{-1}(A,p)]\tilde{f}_{s'_3}(A^{-1}p) \tag{2.8}$$

и

$$U(a,A)\,a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})U^{-1}(a,A)=a^{sm}_{s_3}((U(a,A)\tilde{f})_{s_3}), \tag{2.9}$$

где

$$(U(a,A)\tilde{f})_{s_3}(p)=e^{-iap}\sum_{s'_3}\mathfrak{D}^{sm}_{s'_3 s_3}[R(A,p)]\tilde{f}_{s'_3}(A^{-1}p) \tag{2.10}$$

для любой $\tilde{f}_{s_3}(p)\in S(\bar{\Omega}^+_m)$.

Аналогично вводятся операторы рождения $b^{*sm}_{s_3}(\tilde{g}_{s_3})$ и уничтожения $b^{sm}_{s_3}(\tilde{g}_{s_3})$ античастиц неприводимого представления $[ms]$ по формулам

$$b^{sm}_{s'_3}(\tilde{g}_{s'_3})=\sum_{s_3}\mathfrak{D}^{sm}_{s'_3 s_3}(\epsilon)a^{*sm}_{s_3}(\tilde{g}_{s_3}) \tag{2.11}$$

и

$$a^{sm}_{s_3}(\tilde{f}_{s_3})=\sum_{s'_3}\mathfrak{D}_{s_3 s'_3}(\epsilon^{-1})b^{*sm}_{s'_3}(\tilde{f}_{s_3}), \tag{2.12}$$

удовлетворяющие тем же коммутативным соотношениям, что и (2.5) и (2.6), и преобразующиеся по (2.7) и (2.9). Здесь $\mathfrak{D}^s(\epsilon)$ – $(2s+1)\times(2s+1)$ -мерная вещественная униатарная матрица с элементами

$$\mathfrak{D}^s_{s'_3 s_3}(\epsilon)=(-)^{s+s'_3}\delta_{s'_3,-s_3};\quad s_3,s'_3=\overline{-s,s}. \tag{2.13}$$

Теперь можно ввести операторы рождения и уничтожения частиц и античастиц в спинорном базисе:

$$\sum_{\alpha}\hat{a}^{sm}_{\alpha}(\tilde{f}^{\alpha})=\sum_{s_3}a^{sm}_{s_3}(g_{s_3}), \tag{2.14}$$

где

$$g_{s_3}(p)=\sum_{\alpha}\mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3}[(p\cdot\sigma/m)^{1/2}]\tilde{f}^{\alpha}(p); \tag{2.15}$$

$$\sum_{\alpha} \hat{b}^{*sm}_{\alpha} (\tilde{f}^{\alpha}_{-}) = \sum_{s_3} b^{*sm}_{s_3} (h_{s_3}), \tag{2.16}$$

где

$$h_{s_3}(p) = \sum_{\alpha} \mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3} [(p\cdot\sigma/m)^{1/2} \epsilon^{-1}] \tilde{f}^{\alpha}(-p) \tag{2.17}$$

для любых $\tilde{f}^{\alpha}(p)$, $\tilde{f}^{\alpha}_{-}(p) = \tilde{f}^{\alpha}(-p) \in S(\bar{\Omega}^{+}_{m})$.

Эти операторы преобразуются по неунитарным конечным некомпактным представлениям группы $\tilde{P}_{+}$ согласно

$$U(a,A)\hat{a}^{sm}_{\alpha}(\tilde{f}^{\alpha})U^{-}(a,A) = \hat{a}^{sm}_{\alpha}((U(a,A)\tilde{f})^{\alpha}), \tag{2.18}$$

где

$$(U(a,A)\tilde{f})^{\alpha}(p) = e^{-iap} \sum_{\beta} \mathfrak{D}^{sm}_{\beta\alpha}(A)^{-1} \tilde{f}^{\beta}(A^{-1}p); \tag{2.19}$$

и

$$U(a,A)\hat{b}^{*sm}_{\alpha}(\tilde{g}^{\alpha})U^{-1}(a,A) = \hat{b}^{*sm}_{\alpha}((U(a,A)\tilde{g})^{\alpha}), \tag{2.20}$$

где

$$(U(a,A)\tilde{g})^{\alpha}(p) = e^{iap} \sum_{\beta} \mathfrak{D}^{sm}_{\beta\alpha}(A)^{-1} \tilde{g}^{\beta}(A^{-1}p) \tag{2.21}$$

для любых $\tilde{f}^{\alpha}(p)$, $\tilde{g}^{\alpha}(p) \in S(\bar{\Omega}^{+}_{m})$, где $\mathfrak{D}^{sm}(A)$ – $(2s+1)\times(2s+1)$–мерное неунитарное конечное матричное представление группы $SL(2,C)$.

Для того, чтобы сформулировать условие причинности или локальности, очевидно, необходимо определить величины с причинно-независимыми носителями. С этой целью поле, соответствующее массе $m>0$ и спину S , мы характеризуем при помощи операторнозначной обобщенной функции

$$\phi^{sm}(f) = \sum_{\alpha=-s,s} \phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha}) = \sqrt{2\pi} \sum_{\alpha=-s,s} [\hat{a}^{sm}_{\alpha}(\tilde{f}^{\alpha}_{-}) + \hat{b}^{*sm}_{\alpha}(\tilde{f}^{\alpha})] = \tag{2.22}$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{s_3} [a^{sm}_{s_3}(g_{s_3}) + b^{*sm}_{s_3}(h\quad)] \text{ в } D_S$$

для любой функции $f(x)=\{f^{\alpha}(x)\}_{\alpha=-s,s}\in S(R^4)$, где функции $g_{s_3}(p)$ и $h_{s_3}(p)$ определяются соотношениями (2.16) и (2.17) $\tilde f^{\alpha}(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4x e^{ipx} f^{\alpha}(x)$.

Значение $(2s+1)$ -компонентного полевого оператора $\phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha})$ в $D^{(n)}_{s(\bar\Omega^+_n)}[ms]_n$ определяется соотношением:

$$(\phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n=\sqrt{2\pi}\,\{\sqrt{n+1}\int_{\bar\Omega^+_m} d^4p\,\delta(p^2-m^2)\tilde f^{\alpha}(-p)\times$$

$$\times\sum_{s_3}\mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3}[(p\sigma/m)^{1/2}]\,\Phi^{sm,(sm)_n}_{s_3,(s_3)^n}(p,(p)_n)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt n}\sum_{j=1}^{n}(-)^j\,\tilde f^{\alpha}(p_j)\,\mathfrak{D}^{s_j m_j}_{\alpha s^j_3}[(p_j\cdot\sigma/m)^{1/2}\epsilon^{-1}]\times\tag{2.23}$$

$$\times\Phi^{s_1m_1,\ldots,\Lambda_j,\ldots,s_nm_n}_{s'_3,\ldots,\Lambda_j,\ldots,s^n_3}(p_1,\ldots,p_{j-1},\Lambda_j,p_{j+1},\ldots,p_n)\}$$

для любых $\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n\in D^{(n)}_{s(\bar\Omega^+_n)}[ms]_n$ и $f^{\alpha}(x)\in S(R^4)$.

Наряду с $(2s+1)$ -компонентным спинорным полем $\phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha})$ в $(s,0)$ -представление введем еще $(2s+1)$ -компонентные поля $\chi^{\alpha}(g_{\alpha})$ в $(0,s)$ - представление соотношением:

$$(\chi^{\alpha}_{sm}(g_{\alpha})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n=\sqrt{2\pi}\,\{\sqrt{n+1}\int_{\bar\Omega^+_m} d^4p\,\delta(p^2-m^2)\tilde g_{\dot\alpha}(-p)\times$$

$$\times\sum_{s=-s,s}\mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3}[(p\cdot\tilde\sigma|m)^{1/2}]\,\Phi^{sm,(sm)_n}_{s_3,(s_3)^n}(p,(p)_n)+(-)^{2s}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{j=1}^{n}(-)^j\mathfrak{D}^{s_jm_j}_{\alpha s_3}\cdot\times\tag{2.24}$$

$$\times[(p_j\cdot\tilde\sigma|m_j)^{1/2}\epsilon^{-1}]\,\tilde g_{\alpha}(-p_j)\times\Phi^{s_1m_1,\ldots\Lambda_j\ldots,s_nm_n}_{s^1_3\ldots\Lambda_j,\ldots,s^n_3}(p_1,\ldots,p_{j-1},\Lambda_j,p_{j+1},\ldots,p_n)\}$$

для любых

$$\Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n\in D^{(n)}_{s(\Omega^+_n)}[ms]_n \quad\text{и}\quad g_{\dot\alpha}(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p\,e^{ipx}\,\tilde g_{\dot\alpha}(p)\in S(R^4).$$

Полевые операторы $\phi_{\alpha}(f^{\alpha})$ и $\chi^{\dot\alpha}(g_{\dot\alpha})$ преобразуются по неунитарному конечному представлению группы Пуанкаре $\tilde P_+$ согласно

$$U(a,A)\,\phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha})\,U^{-1}(a,A) = \phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha}_{(a,A)}) , \tag{2.25}$$

где

$$f^{\alpha}_{(a,A)}(x) = \sum_{\beta=-s,s} \mathfrak{D}^{sm}_{\beta\alpha}(A)^{-1}\, f^{\beta}[A^{-1}(x-a)] \; ; \tag{2.26}$$

и

$$U(a,A)\,\chi^{\dot\alpha}_{sm}(g_{\dot\alpha})\,U^{-1}(a,A) = \chi^{\dot\alpha}_{sm}(g^{(a,A)}_{\dot\alpha}) , \tag{2.27}$$

где

$$g^{(a,A)}_{\dot\alpha}(x) = \sum_{\beta} \mathfrak{D}^{sm}_{\beta\alpha}(A)^{+}\, g_{\dot\beta}(A^{-1}(x-a)) \tag{2.28}$$

для любых $f^{\alpha}(x)$, $g_{\dot\alpha}(x) \in S(R^4)$.

Эти $(2s+1)$ -компонентные спинорные поля ϕ_{α} и χ^{α} удовлетворяют следующим "волновым уравнениям" :

$$(-i)^{2s}\,\phi_{\alpha}(\hat\partial^{\alpha\dot\alpha}_{ss}\, g_{\alpha}) = \chi^{\dot\alpha}(g_{\dot\alpha}) , \tag{2.29}$$

$$(-i)^{2s}\chi^{\dot\alpha}(\hat\partial^{ss}_{\dot\alpha\alpha}\, f^{\alpha}) = \phi_{\alpha}(f^{\alpha}) , \tag{2.30}$$

$$\phi_{\alpha}((\Box + m^2)f^{\alpha}) = 0 , \quad \chi^{\dot\alpha}((\Box + m^2)\,g_{\dot\alpha}) = 0 , \tag{2.31}$$

$$\hat\partial^{\alpha\dot\alpha}_{ss} = \overline{\mathfrak{D}^{sm}_{\alpha\dot\alpha}(\sigma\cdot\partial\,|\,m)} , \qquad \hat\partial^{ss}_{\dot\alpha\alpha} = \overline{\mathfrak{D}^{sm}_{\alpha\dot\alpha}(\tilde\sigma\cdot\partial\,|\,m)} \tag{2.32}$$

для любых функций $f^{\alpha}(x)$, $g_{\dot\alpha}(x) \in S(R^4)$.

Имея в виду, что всякое взаимодействие, сохраняющее четность, должно включать в себя как ϕ_{α} -, так и $\chi^{\dot\alpha}$ – поля вместе, мы введем в рассмотрение $2(2s+1)$ -компонентные спинорные поля ψ^{sm} и $\bar\psi^{sm}$ определяемые как операторнозначные обобщенные функции

$$\psi^{sm}(\bar F) = \sum_{\kappa=(\alpha,\dot\alpha)} \psi^{sm}_{\kappa}(\bar F_{\kappa}) = \sum_{\alpha=-s,s} [\phi^{sm}_{\alpha}(f^{\alpha}) + \chi^{\dot\alpha}_{sm}(g_{\dot\alpha})] \tag{2.33}$$

и

$$\bar\psi^{sm}(F) = \sum_{\kappa=(a,\dot a)} \bar\psi^{sm}_{\kappa}(F_\kappa) = \sum_{a=-s,s} [\phi^{sm}_{\dot a}(f^{\dot a}) + \chi^{a}_{sm}(g_a)], \tag{2.34}$$

определенные в D_S и удовлетворяющие волновым уравнениям:

$$(-i)^{2s}\psi^{sm}(\bar F\partial^{ss}) = \psi^{sm}(\bar F), \quad \psi^{sm}((\Box + m^2)\bar F) = 0, \tag{2.40}$$

$$i^{2s}\chi\bar\psi^{sm}(\hat\partial *^{ss} F) = \bar\psi^{sm}(F), \quad \bar\psi^{sm}((\Box + m^2)F) = 0, \tag{2.41}$$

где

$$\partial^{ss} = \begin{pmatrix} 0 & \hat\partial^{ss}_{a\dot a} \\ \partial^{\dot a a} & 0 \end{pmatrix}$$

для любых $2(2s+1)$ -компонентных регулярных классических спиноров

$$F_\kappa(x) = \begin{pmatrix} g_a(x) \\ f^{\dot a}(x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar F_\kappa(x) = F^*_\kappa(x)B = (f^a(x)\ g_{\dot a}(x)), \tag{2.42}$$

$$\kappa = (a, \dot a), \quad a = -s,s, \quad s = 0, ½, 1, \dots$$

с компонентами $g_a(x)$, $f^{\dot a}(x) \in S(R^4)$.

Действие $2(2s+1)$ -компонентных полей, например $\psi^{sm}(\bar F)$, на элементы $D^{(n)\prime}_{S(\bar\Omega^+_n)}[ms]_n$, определяется согласно

$$\psi^{sm}(\bar F)|\rho^{(sm)_n}_{(s_8)^n}(\Phi)^{(sm)_n}_{(s_8)^n}> = |\rho^{(sm)_n}_{(s_8)^n}(\psi^{sm}(\bar F)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_8)^n}> . \tag{2.43}$$

Здесь

$$(\psi^{sm}(\bar F)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_8)^n}(p)_n =$$

$$= \sum_{a=-s,s} [(\phi^{sm}_a(f^a)\Phi)^{(sm)_n}_{(s_8)^n}(p)_n + (\chi^{\dot a}_{sm}(g_{\dot a})\Phi)^{(sm)_n}_{(s_8)^n}(p)_n], \tag{2.44}$$

где операторнозначные обобщения функции ϕ^{sm}_a и $\chi^{\dot a}_{sm}$ определяются согласно (2.23) и (2.24).

Отметим, что поля ψ^{sm} и $\bar\psi^{sm}$ являются локально наблюдаемыми, т.е.

$$[\psi^{sm}_\kappa(\bar F_\kappa), \bar\psi^{sm}_\rho(G_\rho)]_\pm = 0 \tag{2.45}$$

для любых $\bar{F}_\kappa(x)$, $G_\rho(y) \in S(R^4)$, удовлетворяющих условию $\bar{F}_\kappa(x)\, G_\rho(y) = 0$ при $(x-y)^2 \geq 0$.

Можно определить функции Грина этих полей. Например,

$$< 0 | \psi^{sm}_\kappa(\bar{F}_\kappa) \bar{\psi}^{sm}_{\kappa'}(\sigma_{\kappa'}) | 0 > = S^{(-)sm}_{\kappa\kappa'}(\bar{F}_\kappa, \sigma_{\kappa'}), \tag{2.46}$$

где

$$S^{(-)sm}_{\kappa\kappa'}(\bar{F}_\kappa, G_{\kappa'}) = \int_{\bar{\Omega}^+_m} d^4 p\, \delta(p^2 - m^2)\, \tilde{\bar{F}}_\kappa(p)\, A_{\kappa\kappa'}(p)\, \tilde{G}_{\kappa'}(p). \tag{2.47}$$

Здесь

$$A_{\kappa\kappa'}(p) = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha'}_{\alpha} & \sum\limits_{s_3} \mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3}[(p\cdot\sigma|m)^{1/2}]\, D^{sm}_{s_3\alpha'}[(p\cdot\sigma|m)^{1/2}] \\ \sum\limits_{s_3} \mathfrak{D}^{sm}_{\alpha s_3}[(p\cdot\tilde{\sigma}|m)^{1/2}]\, \mathfrak{D}^{sm}_{s_3\alpha'}[(p\cdot\sigma|m)^{1/2}]^{+} & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}'} \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

$$\kappa = (\alpha, \dot{\alpha}), \quad \alpha = -s, s, \quad s = 0, 1/2, \ldots,$$

$$\tilde{\bar{F}}_\kappa(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4 p\, e^{ipx}\, \bar{F}_\kappa(x), \quad \tilde{G}^{(x)}_\kappa(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4 p\, e^{ipx}\, G_\kappa(x). \tag{2.49}$$

Таким образом, $2(2s+1)$ -компонентные спинорные поля ψ^{sm} и $\bar{\psi}^{sm}$, рассматриваемые как операторнозначные обобщенные функции, образуют неприводимые представления перестановочных соотношений для свободного поля.

3. Трансформационные свойства ψ^{sm}- и $\bar{\psi}^{sm}$- полей

Можно указать на свойства симметрии $2(2s+1)$ -компонентных спинорных полей ψ^{sm} и $\bar{\psi}^{sm}$ относительно полной группы Пуанкаре $\tilde{P}$.

Относительно унитарного оператора $U(a,A)$ группы $\tilde{P}_+$, где $a \in T$, $A \in SL(2,C)$ преобразуется согласно

$$U(a,A)\, \psi^{sm}(\bar{F})\, U^{-1}(a,A) = \psi^{sm}((U(a,A)\bar{F})), \tag{3.1}$$

где

$$(U(a,A)\bar{F})(x) = \{(U(a,A)\bar{F})_\kappa(x)\}_{\kappa=(\alpha,\dot{\alpha})} = \{\sum_{\kappa'} \bar{F}_{\kappa'}[A^{-1}(x-a)]\, D^{sm}_{\kappa'\kappa}(A)\},$$

$$D^{sm}(A) = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{sm}(A)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}^{sm}(A)^{+} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

(3.3)

для любых $\bar{F}(x) \in S(R^4)$ и $A \in SL(2,C)$.

π, T и C-инвариантности этих полей можно выразить при помощи следующих функциональных соотношений:

$$U_\pi \psi^{sm}(\bar{F}) U_\pi^{-1} = \xi_\pi \psi^{sm}(U_\pi \bar{F}), \tag{3.4}$$

где

$$(U_\pi \bar{F})(x) = \{(U_\pi \bar{F})_\kappa (x)\}_{\kappa=(a,\dot{a})} = \{\sum_{\kappa'} \bar{F}_{\kappa'}(\pi x) R_{\kappa'\kappa}\}, \tag{3.5}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{F}(x) \in S(R^4)$$

(π -инвариантность; для $F(\xi_\pi)^2 = 1$ $U_\pi^2 = 1$),

$$\bar{U}_T \psi^{sm}(\bar{F}) \bar{U}_T^{-1} = \xi_T \bar{\psi}^{sm}(\bar{U}_T F), \tag{3.6}$$

где

$$(\bar{U}_T F)(x) = K^T R^T \bar{F}^T (Tx) \in S(R^4), \tag{3.7}$$

$$K^T = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^s(\epsilon) & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}^s(\epsilon) \end{pmatrix}, \qquad \bar{F}(x) \in S(R^4)$$

(T -инвариантность; для $|\xi_T|^2 = 1$ $\bar{U}_T^2 = (-)^{2s}$)

$$U_C \psi^{sm}(\bar{F}) U_C^{-1} = \xi_C^* \bar{\psi}^{sm}(U_c F), \tag{3.8}$$

где

$$(U_C F)(x) = \{(U_C F_\kappa)(x)\}_{\kappa=(a,\dot{a})} = \{\sum_{\kappa'} C^T_{\kappa'\kappa} \bar{F}^T_{\kappa'}(x)\},$$

$$
C = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{s}(\epsilon) & 0 \\ 0 & (-)^{2s}\, \mathfrak{D}^{s}(\epsilon) \end{pmatrix} \tag{3.9}
$$

(C -инвариантность; для $|\xi_0|^2 = 1 \quad U_0^2 = 1$).

Заметим, что при выводе этих свойств симметрии мы пользовались следующими представлениями операторнозначных обобщенных функций ϕ_a и $\chi^{\dot a}$, несколько отличных от представления (2.23) и (2.24). Например,

$$
(\phi_a(f^a)\, \Phi^{(sm)_n}_{(s_3)^n}(p)_n =
$$

$$
= \sqrt{2\pi}\, \{ \sqrt{n+1} \int_{\tilde\Omega^+_m} \frac{d^3 p}{2\sqrt{\vec p^{\,2} + \vec m^{\,2}}}\, \tilde f^a(-\sqrt{p^2+m^2}, -\vec p) \sum_{s_3} \mathfrak{D}^{sm}_{a s_3}\left(\frac{1}{m}(\sqrt{p^2+m^2} + \vec p \vec\sigma)\right)^{1/2}] \times
$$

$$
\times\, \Phi^{sm,(sm)_n}_{s_3,(s_3)^n}(\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2}, \vec p, (p)_n) +
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n} (-)^j f^a(-\sqrt{\vec p_j^{\,2} + \vec m^2}, \vec p_j) \times
$$

$$
\times\, \mathfrak{D}^{s_j m_j}_{a s_3^j}\left[\frac{1}{m_j}(\sqrt{p_j^2 + m_j^2} - \vec p_j \vec\sigma_j))^{1/2} \epsilon^{-1}\right] \times
$$

$$
\times\, \Phi^{s_1 m_1 \dots, \Lambda_j \dots, s_n m_n}_{s_3^1, \dots, \Lambda_j \dots, s_3^n}(p_1, \dots, p_{j-1}, \Lambda_j, p_{j+1}, \dots p_n)\} .
$$

Аналогично и для $\chi^{\dot a}(g_{\dot a})$.

Пользуясь случаем, я хочу выразить мою глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, Нгуену Ван Хьеу, Бялыницкому-Бируле, М.С. Поливанову, А.В. Ефремову за стимулирующие обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. H. Joos. Fortschr. d. Phys., 10, 65 (1962).
2. S. Weinberg.-Phys. Rev., 133, B 13318 (1966).
3. И.М. Гельфанд, Н.Ф. Виленкин. Обобщенные функции, том IV. Москва, 1961.
4. L. Schwartz. Theory des Distributions I.II. Paris, 1957, Herman et C[ie] .

Рукопись поступила в издательский отдел
4 ноября 1966 г.