

22/xv-66

С-323

П-563

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 3009



Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина

ЗАДАЧА ДВУХ ЦЕНТРОВ КВАНТОВОЙ  
МЕХАНИКИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР  
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

**P2 - 3009**

Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина

**ЗАДАЧА ДВУХ ЦЕНТРОВ КВАНТОВОЙ  
МЕХАНИКИ**

4645/1 пр.



## В в е д е н и е

Уравнение Шредингера задачи двух центров, т.е. задачи о движении электрона в поле двух фиксированных кулоновских центров с зарядами  $Z_1$  и  $Z_2$ , удаленных на расстояние  $R$ , имеет вид <sup>/1,2/</sup>

$$\left(-\frac{1}{2} \Delta_{\vec{r}} - \frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2}\right) \Psi_n(R; \vec{r}) = E_n(R) \Psi_n(R; \vec{r}) \quad (1)$$

( $r_1, r_2$  - расстояние электрона до зарядов  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно;  $\hbar = m = e = 1$ ).

Эта классическая задача квантовой механики в теории строения и спектров молекул играет ту же роль, что и задача об атоме водорода в теории строения атомов. В последнее время потребности физики мезонов при низких энергиях вновь возродили интерес к задаче двух центров <sup>/3,4/</sup>.

Однако несмотря на понятный интерес к этой задаче и большое число работ, посвященных ей (см. например, <sup>/1,2,3/</sup>), она до сих пор не решена в общем виде, т.е. при произвольных значениях  $Z_1, Z_2, R$ . Причин тому две: во-первых, при произвольных  $R$  ее нельзя решить аналитически через известные специальные функции; во-вторых, точное численное решение задачи, полученное в работах Бейтса и сотрудников <sup>/5/</sup> для  $Z_1 = 1; Z_2 = 1, 2$ , при дальнейшем увеличении  $Z_2$  наталкивается на своеобразные вычислительные трудности. Суть этих трудностей и способы их преодоления - предмет отдельной математической работы, и мы не будем на них сейчас останавливаться. Отметим также следующее: при разделении переменных в сферических координатах

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{R}; \eta = \frac{r_1 - r_2}{R}; \Psi = X(\xi) Y(\eta) e^{im\phi}$$

уравнение (1) приводится к связанной системе уравнений Штурма-Лиувилля на интервале  $-1 \leq \eta \leq 1, 1 \leq \xi < \infty$ .

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) \frac{dX}{d\xi} + [-p^2(\xi^2 - 1) + b'\xi + \lambda - \frac{m^2}{\xi^2 - 1}] X = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{dY}{d\eta} + [-p^2(1 - \eta^2) + b\eta - \lambda - \frac{m^2}{1 - \eta^2}] Y = 0, \quad (26)$$

где

$$p^2 = -\frac{R^2}{2} E; \quad b' = R(Z_2 + Z_1); \quad b = R(Z_2 - Z_1);$$

$\lambda$  - константа разделения. При этом уравнения (2а) и (26) связаны только через величины  $p^2$  и  $\lambda$ . Решая уравнения (2а) и (26) совместно, определим собственные значения  $E = E_{n\xi n\eta m}(R)$  и  $\lambda = \lambda_{n\xi n\eta m}(R)$  как функции меядерного расстояния  $R$  и эллиптических квантовых чисел  $n\xi, n\eta, m$ . При таком числе параметров табулирование функций и собственных значений затруднительно. В связи с этим, по-видимому, нерационально составлять пространные таблицы для всех величин: при современном состоянии вычислительной математики значительно удобнее иметь разработанный алгоритм для их определения.

Детальному описанию такого алгоритма для вычисления собственных значений и собственных функций уравнений (2), а также методике вычисления матричных элементов по этим функциям будет посвящена отдельная математическая работа.

В данной работе мы остановимся только на результатах расчетов, имеющих непосредственный физический интерес.

$$\text{Термы } E(R) \text{ систем } \text{reLi}^{3+}, \text{reC}^{6+}, \text{reO}^{8+}$$

Обычно для большинства качественных суждений наибольший интерес представляет знание термов  $E(R)$  системы  $Z_1 e Z_2$ . На рис. 1-6 приведены картины термов  $E_{n\xi n\eta m}(R)$  для систем  $Z_1 e Z_2$  при  $Z_1 = 1-p$  и  $Z_2 = Z = 3, \dots, 8$  соответственно. На рис. 1а-6а: приведены также графики полной энергии  $W(R) = E(R) + \frac{Z_1 Z_2}{R}$ , которая включает энергию отталкивания ядер. Классификация термов дана по квантовым числам  $Nl\ell m$  объединенного атома с зарядом  $Z_1 + Z_2$ , в который переходит система  $Z_1 e Z_2$  при  $R \rightarrow 0$ . При этом каждый уровень с главным квантовым числом  $N = N^2 -$ кратно вырожден. При  $R \neq 0$  вырождение снимается и в пределе при  $R \rightarrow \infty$  каждый из уровней объединенного атома  $e(Z_1 + Z_2)$  непрерывно переходит в один из уровней атома  $eZ_1$  или  $eZ_2$  с параболическими квантовыми числами  $(n_1, n_2, m)$  или  $(n'_1, n'_2, m)$  соответственно. Связь этих наборов квантовых чисел между собой, а также с эллиптическими квантовыми числами  $N, n\xi, n\eta, m$  приведена в работе <sup>12/</sup>. На рис. 1а-6а параболические квантовые числа даны в скобках справа от символов термов. На рис. 3б-3г приведены графики  $\lambda(R)$ ,  $p(R)$  и  $A = \lambda - p^2$  для различных термов при  $Z = 5$ .

Проанализируем полученные кривые. Во-первых, из них сразу же следует, что в данном случае теорема Неймана-Вигнера о непересечении термов одинаковой симметрии неверна (в ее обычной формулировке для случая двухатомной молекулы<sup>/8/</sup>). Этот результат подтверждает теоретические выводы работы<sup>/2/</sup> о неприменимости теоремы в случае уравнений с разделяющимися переменными.

В действительности, однако, наличие таких пересечений не противоречит общей формулировке теоремы Неймана-Вигнера: как показано в недавней работе, задача с разделяющимися переменными имеет более высокую симметрию, чем геометрическая. С точки зрения этой более высокой симметрии все термы системы  $Z_1 e Z_2$  различны и могут поэтому пересекаться между собой без ограничений. В частности,  $\sigma$ -термы пересекаются как при равных  $N$  (например, термы  $4p\sigma$  и  $4f\sigma$  для  $Z = 5$ ), так и при различных  $N$  (термы  $5q\sigma$  и  $4d\sigma$  для  $Z = 5$ ). Везде в дальнейшем  $Z_1 = 1; Z_2 = Z$ .

Кривая  $U_{\max}(R)$  на рис. 1-8 соответствует максимуму потенциальной энергии  $U$  электрона в поле двух фиксированных ядер (т.е. высоте потенциального барьера между ядрами  $p$  и  $Z$ )

$$U = -\frac{1}{r_1} - \frac{Z}{r_2}$$

$$U_{\max}(R) = -\frac{(1 + \sqrt{Z})^2}{R} \quad (3)$$

При  $R \gg 1$  энергия термов системы  $peZ$ , соответствующих при  $R \rightarrow \infty$  уровням атома  $ep$ , равна<sup>/2/</sup>

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} - \frac{Z}{R} \quad (4)$$

Приравняв выражения (4) и (3), найдем, что при значении

$$R = R_x = 2n^2(1 + 2\sqrt{Z}) \quad (5)$$

энергия системы  $peZ$  становится равной высоте потенциального барьера между ядрами  $p$  и  $Z$ <sup>/4/</sup>, причем:

$$E_n(R_x) = U_{\max}(R_x) = -\frac{(1 + \sqrt{Z})^2}{2n^2(1 + 2\sqrt{Z})}$$

В точке пересечения  $R_x$  терма  $E_n(R)$  с кривой  $U_{\max}(R)$  уровень  $n$  изолированного атома водорода  $ep$  переходит в общий уровень системы  $peZ$ . Это явление вполне аналогично исчезновению линий при Штарк-эффекте в сильных полях<sup>х)</sup>.

х) Критическое поле  $F$ , при котором линия исчезает, просто найти из формул (3) и (5)

$$F = \frac{(1 + \sqrt{Z})^2}{4n^4(1 + 2\sqrt{Z})^2} \quad /9/$$

При  $Z \rightarrow \infty$  получим классический предел

$$F_0 = -\frac{1}{16n^4}$$

Формула (6) выведена в предположении справедливости метода LCAO . Как показывает точный расчет , из-за явлений псевдопересечения (которые подробно обсуждаются ниже ) она нарушается, причем, действительное  $R_x > 2n^2(1 + 2\sqrt{Z})$  (см. рис.1-6).

### Устойчивые состояния молекулярных ионов $peZ$

Терм с квантовыми числами  $n=1$  ;  $n_1 = n_2 = m = 0$  , соответствующий при  $R \rightarrow \infty$  основному состоянию атома водорода  $1s$  , при  $R \rightarrow 0$  переходит в термы с квантовыми числами  $N=Z$  ;  $\ell=Z-1$  ;  $m=0$  <sup>/2/</sup>. Энергия этих термов зависит от  $R$  следующим образом <sup>/2/</sup>:

$$\text{при } R \gg 1 \quad W \approx -1/2 - \frac{9}{4} \frac{Z^2}{R^4} \quad (6a)$$

$$\text{при } R \ll 1 \quad W \approx -\frac{(Z+1)^2}{2Z^2} + \frac{Z}{R}, \quad (6б)$$

т.е. эти термы должны иметь минимум при конечных значениях  $R = R_0$  <sup>/7/</sup>. Действительно, как видно из рис. 1а-6а, соответствующие минимумы для термов  $3d\sigma$   $Z=3$  ,  $5g\sigma$   $Z=5$  и  $8k\sigma$   $Z=8$  достигаются при  $R_0=6,2$ ;  $R_0=13,8$ ;  $R_0=44,5$ . Это означает, что при больших межядерных расстояниях  $R_0$  существуют устойчивые состояния молекулярных ионов типа  $peZ$  .

Оказалось, однако, что кроме устойчивых состояний молекулярных ионов, в системе  $peZ$  возможны квазистационарные уровни. Они появляются при  $Z > 4$  и связаны с термами  $N=Z-1$  ;  $\ell=Z-2$  ;  $m=0$  (т.е.  $n'=Z-1$  ;  $n'_1=0$  ;  $n'_2=Z-2$  ;  $m=0$  ; например,  $4f\sigma$  для  $Z=5$ ;  $7i\sigma$  и  $6h\sigma$  для  $Z=8$  ). Этот тип термов до сих пор, по-видимому, не был известен.

### Явления псевдопересечения термов

Обратим внимание на своеобразное взаимодействие термов с квантовыми числами:

$$N=Z; \ell=Z-1; m=0; (n=1; n_1=n_2=m=0)$$

и

$$N=Z-1; \ell=Z-2; m=0; (n'=Z-1; n'_1=0; n'_2=Z-2; m=0).$$

Это явление возникает при  $Z \geq 4$  , хотя заметно уже при  $Z=3$  для термов  $3d\sigma$  и  $2p\sigma$  (см. рис. 1а). При увеличении  $Z$  эти термы постепенно сближаются, образуя при этом типичную картину псевдопересечения (например, термы  $5g\sigma$  и  $4f\sigma$  для  $Z=5$  на рис. 3,  $8k\sigma$  и  $7i\sigma$  для  $Z=8$  на рис. 6).

При  $Z \geq 7$  картину псевдопересечения образует еще одна пара термов:

$$N = Z - 1; \ell = Z - 2; m = 0; (n' = Z - 1; n'_1 = 0; n'_2 = Z - 2; m = 0)$$

$$N = Z - 2; \ell = Z - 3; m = 0; (n' = Z - 2; n'_1 = 0; n'_2 = Z - 3; m = 0)$$

(например,  $7i\sigma$  и  $6h\sigma$  для  $Z = 8$  см. рис. 8). С ростом  $Z$  указанная тенденция сохраняется, т.е. число таких "взаимодействующих" пар термов увеличивается.

Отметим характерные признаки описанных термов: все они имеют максимальный момент  $\ell = N - 1$ , что соответствует в теории Бора круговым орбитам, а в Штарк-эффекте - наибольшей плотности электронного облака между ядрами  $Z_1$  и  $Z_2$ , так как при этом  $n_2 - n_1 = \max^{|\theta|}$ ; кроме того, их "радиальная" волновая функция  $X(\xi)$  не имеет нулей во всей области определения  $\xi$ , т.е.  $n_\xi = n_1 = n'_1 = 0$ .

Отметим еще одну особенность этих псевдопересечений: для них при том же значении  $R$ , что и для  $W(R)$  происходит псевдопересечение констант разделения  $\lambda(R)$  соответствующих уровней, в то время как для обычных пересечений константы  $\lambda(R)$  в точке пересечения термов  $W(R)$  сильно различаются (см. рис. 3г, где приведены значения величин  $A = \lambda + p^2$  для различных термов при  $Z=5$ ). Заметим, что в силу невырожденности одномерной краевой задачи кривые  $\lambda(R)$  и  $W(R)$  для различных уровней не могут пересечься при одном и том же значении  $R$  /2/.

Своеобразие "взаимодействия" термов проявляется также в том, что в области псевдопересечения терм с  $N = Z - 1$  обладает свойствами термина с  $N = Z$ . В частности, для термина с  $N = Z$  ( $5g\sigma$  для  $Z = 5$ ) в приближении LCAO при значениях  $R$  справа от точки псевдопересечения справедлива формула (6а) для поляризации основного уровня атома водорода, в который при  $R \rightarrow \infty$  переходит терм  $5g\sigma$ . Оказалось, что слева от точки псевдопересечения формула (6а) хорошо описывает терм с  $N = Z - 1$  ( $4f\sigma$  для  $Z = 5$ ), т.е. формально термы  $5g\sigma$  и  $4f\sigma$  пересекаются. В действительности, конечно, этого не происходит, так как из анализа поведения термов при  $R \rightarrow 0$  (см. рис. 3) следует, что при этом термы  $5g\sigma$  и  $4f\sigma$  не просто пересекутся, а перейдут друг в друга. Последнее невозможно, так как эквивалентно нарушению теоремы о сохранении числа нулей волновой функции  $Y(\eta)$  при изменении параметра  $R$  и таких следствий теоремы как правила соответствия термов при  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  /2/.

В работе /7/ методом LCAO в точке псевдопересечения было получено обычное пересечение термов, что означает неприменимость метода LCAO в этой области значений  $R$ . Это тем более странно, что все указанные псевдопересечения возникают или в области потенциального барьера ( $E(R) \approx U_{\max}(R)$ ), или за барьером, т.е. при  $E(R) < U_{\max}(R)$  (см. рис. 1-8).

Возникает своеобразная ситуация: формулы LCAO, которые хорошо выполняются в широкой области значений  $R$  по обе стороны от точки псевдопересечения,

в окрестности этой точки совершенно непригодны, так как приводят к пересечению термов. Согласно результатам работы<sup>/2/</sup>, не существует общих запретов для любых пересечений термов в системе  $Z_1 \in Z_2$ , поэтому в данном случае должны существовать дополнительные правила отбора, которые отличают термы с  $\nu_1 = \nu'_1 = 0$  от всех прочих.

Рассмотрим это явление более детально.<sup>х)</sup> При  $R \rightarrow \infty$  метод LCAO приводит к следующим выражениям для полной энергии  $W(R)$  системы  $r \in Z$ :

$$W_1 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{4} \frac{Z^2}{R^4} \quad \text{для терма с } N=Z; \ell=Z-1; \quad (7)$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{Z}{Z-1} \right)^2 \frac{Z-1}{R} - \frac{3}{2} \frac{(Z-1)(Z-2)}{ZR^2} \quad \text{для терма с } N=Z-1; \ell=Z-2.$$

Тогда из условия  $W_1 = W_2$  получим пересечение термов в точке  $R = R_0$ :

$$R_0 = 2 \cdot \frac{(Z-1)^3}{2Z-1}. \quad (8)$$

Однако из уравнения (2а) следует, что при любом  $R$  должно выполняться соотношение<sup>/2/</sup> ( $A = \lambda + p^2$ ):

$$(A_1 - A_2) \int_1^\infty X_1 X_2 d\xi = (p_1^2 - p_2^2) \int_1^\infty X_1 \xi^2 X_2 d\xi. \quad (9)$$

Поэтому из условия  $p_1 = p_2$  в точке пересечения следует либо  $A_1 = A_2$ , либо  $\int_1^\infty X_1 X_2 d\xi = 0$ . Первое невозможно, так как задача невырождена. Второе условие для термов  $\nu_1 = \nu'_1 = 0$  также невозможно, так как в этом случае подынтегральное выражение положительно во всей области определения. Следовательно: такие термы не могут пересекаться между собой, хотя сближения между ними возможны. Из соотношения (9) следует, что при  $\Delta p^2 = p_1^2 - p_2^2 \rightarrow 0$  одновременно  $\Delta A \rightarrow 0$ . Последнее можно установить непосредственно, если использовать выражения для  $A$  при  $R \gg 1$ ,  $\nu_1 = \nu'_1 = 0$ , приведенные в работе<sup>/2/</sup>.

В этом случае:

$$\frac{\Delta A}{\Delta p^2} = 1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right). \quad (10)$$

Подчеркнем, что обнаруженное "взаимодействие" термов не имеет динамической природы, так как в системе  $r \in Z$  всего один электрон, а ядра предполагаются фиксированными<sup>хх)</sup>. По существу, мы имеем здесь пример своеобразного взаимодействия

х) Эти соображения принадлежат С.С. Герштейну.

хх) Обычно картина псевдопересечения возникает в точке пересечения уровней при учете возмущений от движения ядер, взаимодействия электронов и т.д.<sup>/8/</sup>.



конфигураций и потому описанное явление можно назвать конфигурационным взаимодействием термов.

### Волновые функции системы $peZ$

На рис. 7 и 8 приведены волновые функции  $X(\xi)$  и  $\Psi(\eta)$  системы  $peZ$  при  $Z=5$  для термов  $5g\sigma$ ,  $4f\sigma$  и  $4s\sigma$ . Как и следовало ожидать, при  $R \rightarrow 0$  они описывают движение электрона в поле ядра с зарядом  $Z+1$ .

Обратим внимание на особенности поведения волновых функций при  $R=7$  и  $R=13$ : в частности, при  $R=13$  волновые функции термов  $5g\sigma$  и  $4f\sigma$  весьма подобны. Далее, несмотря на то, что при  $R \rightarrow \infty$  терм  $4f\sigma$  принадлежит системе  $eZ$ , его волновая функция уже при  $R=7$  сосредоточена вблизи протона. Это как раз и соответствует утверждению, что слева от точки псевдопересечения терм  $4f\sigma$  приобретает свойства терма  $5g\sigma$ . При дальнейшем увеличении  $R$ , справа от точки псевдопересечения ( $R=10$ ), волновые функции системы  $peZ$  переходят в волновые функции изолированных атомов  $ep$  и  $eZ$ .

### Возможные применения

1. Используя результаты данной работы, можно оценить характер и границы применимости различных приближений, в частности, значения  $R$ , при которых справедливы асимптотические формулы. Например, из анализа кривых следует, что при  $R \gg 1$  существует область значений  $R$ , где приближение LCAO неприменимо.

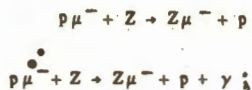
2. Полученные результаты позволяют вычислить вероятности радиационных переходов  $\pi^-$ -мезона, движущегося в кулоновском поле двух фиксированных нуклонов. Такое вычисление представляет физический интерес в связи с экспериментальными<sup>/10/</sup> и теоретическими<sup>/4/</sup> работами по поглощению остановившихся  $\pi^-$ -мезонов в водородосодержащих веществах, а также в связи с экспериментами по изучению мезорентгеновской серии в химических соединениях<sup>/11/</sup>.

3. В теории химической связи и спектров молекул широко применяют метод молекулярных орбит<sup>/7/</sup>, для приближенного нахождения которых обычно используют линейные комбинации атомных функций в сочетании с вариационным принципом. Очевидно, решив уравнения (1), мы получим точную картину молекулярных орбиталей.

4. В некоторых случаях для оценки сечений реакций перезарядки типа  $A + B^+ \rightarrow A^+ + B$  и аналогичных им достаточно знать расстояние  $R$ , на котором происходит пересечение термов, и значения производных  $\partial E / \partial R$  в этой точке<sup>/8/</sup>.

Все эти величины просто определять, зная систему термов.

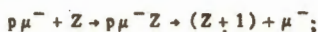
5. Однако основная область применения полученных результатов связана с разнообразными процессами с участием 3-х частиц, взаимодействующих по закону Кулона. В частности, сюда относятся задачи о перехвате и несимметричной перезарядке типа:



процессы образования мезомолекул:



катализ ядерных реакций  $\mu^-$ -мезонами:



рассеяние протонов и позитронов на атомах водорода и другие сходные вопросы.

В заключение выражаем глубокую благодарность С.С. Герштейну за пристальный и стимулирующий интерес в процессе всей работы и С.П. Аллилуеву за ценные обсуждения.

#### Л и т е р а т у р а

1. E. Teller, Z. F. Phys. 61, 458 (1930). W. G. Baher, H. R. Nasse, Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 564 (1938). S. K. Charkavarty, Phil. Mag. 28, 423 (1939).
2. С.С. Герштейн, В.Д. Кривченков. ЖЭТФ, 40, 1481 (1961).
3. С.С. Герштейн, Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина. ЖЭТФ, 48, 692 (1965).
4. Л.И. Пономарев. Ядерная физика, 2, 223 (1965).
5. D. R. Bates, K. Ledsham, A. L. Stewart, Phil. Trans. Roy. Soc. A246, 215 (1953).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз, Москва, 1963.
7. С.С. Герштейн. ЖЭТФ, 43, 706 (1962).
8. Дж. Слэгер. Электронная структура молекул, "Мир", Москва, 1965.
9. Г. Бете. Квантовая механика простейших систем. ОНТИ, 1935.
10. А.Ф. Дунайцев, В.Н. Петрухин, Ю.Д. Прокошкин, В.И. Рыкалин. ЖЭТФ, 42, 1680 (1962). A. F. Dunaitsev, V. I. Petrukhin, Yu. D. Prokoshkin, Nuovo Cim. 34, 521 (1964). M. Charbe, P. Depommier, J. Heintze, V. Sorgel. Phys.-Lett. 5, 67. (1963).
11. В.Г. Зянов, А.Д. Конин, А.И. Мухин. Ядерная физика, 2, 859 (1965). В.Г. Зянов, А.Д. Конин, А.И. Мухин. Преприят ОИЯИ Р-2039, Дубна 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 ноября 1966 г.

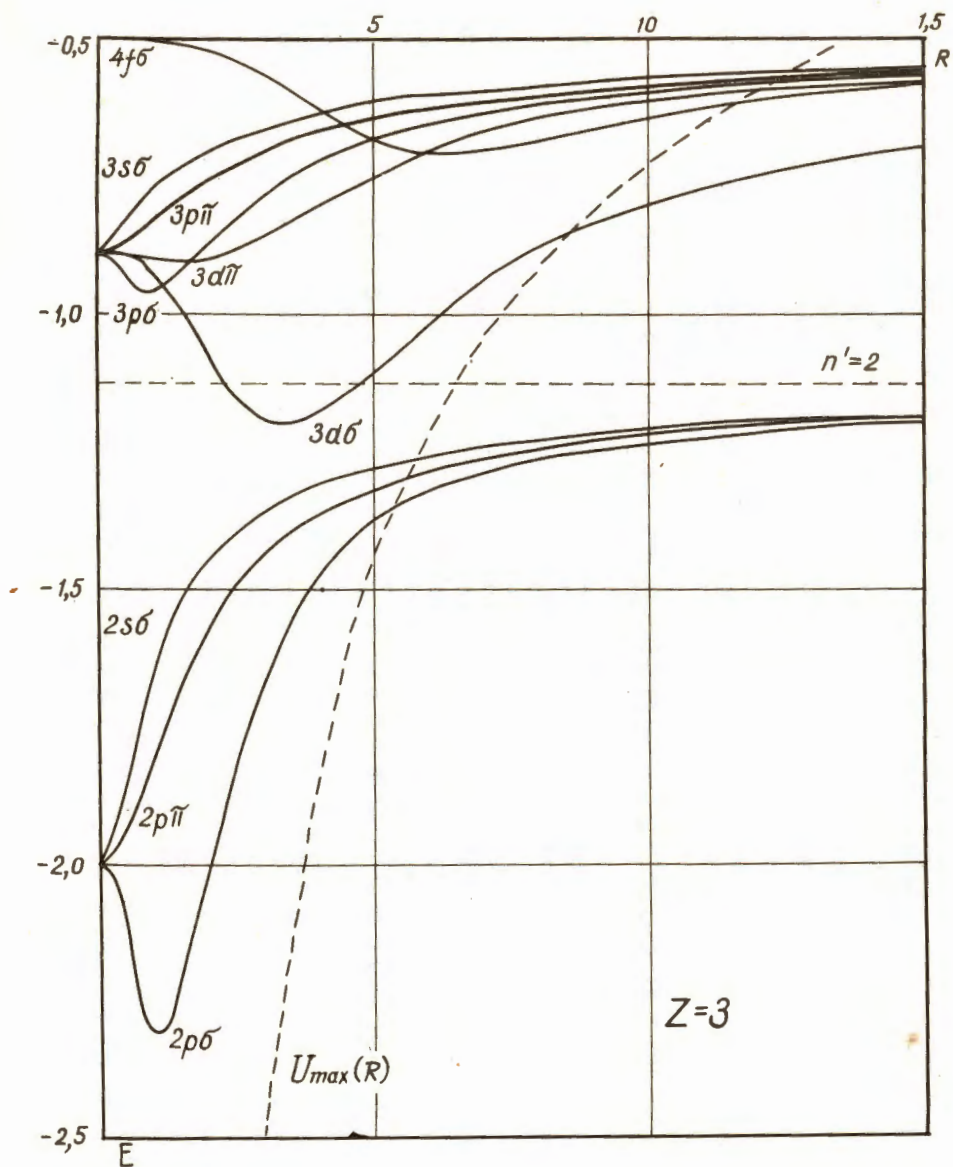


Рис. 1.

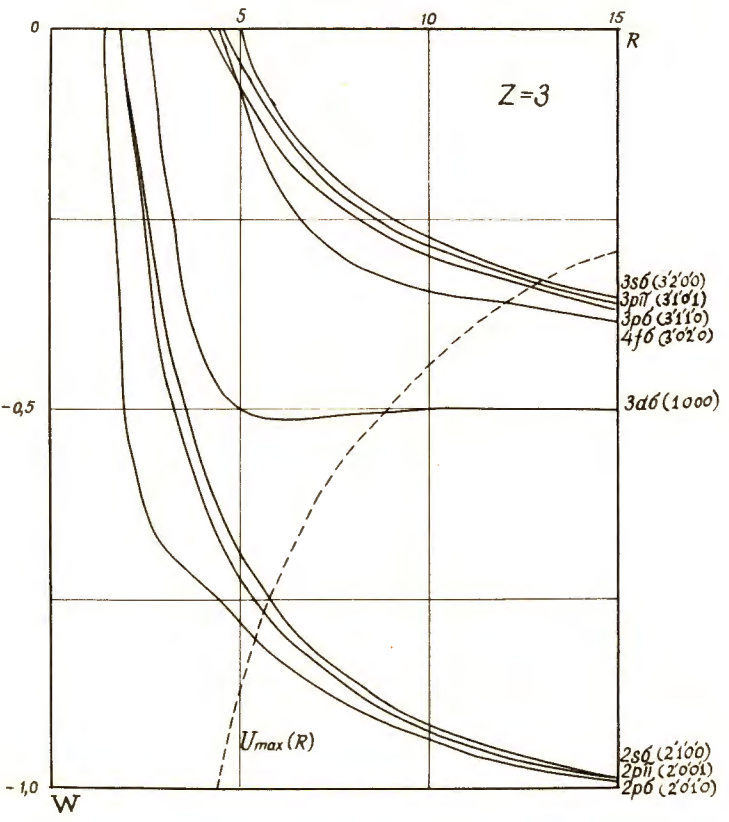


Рис. 1а.

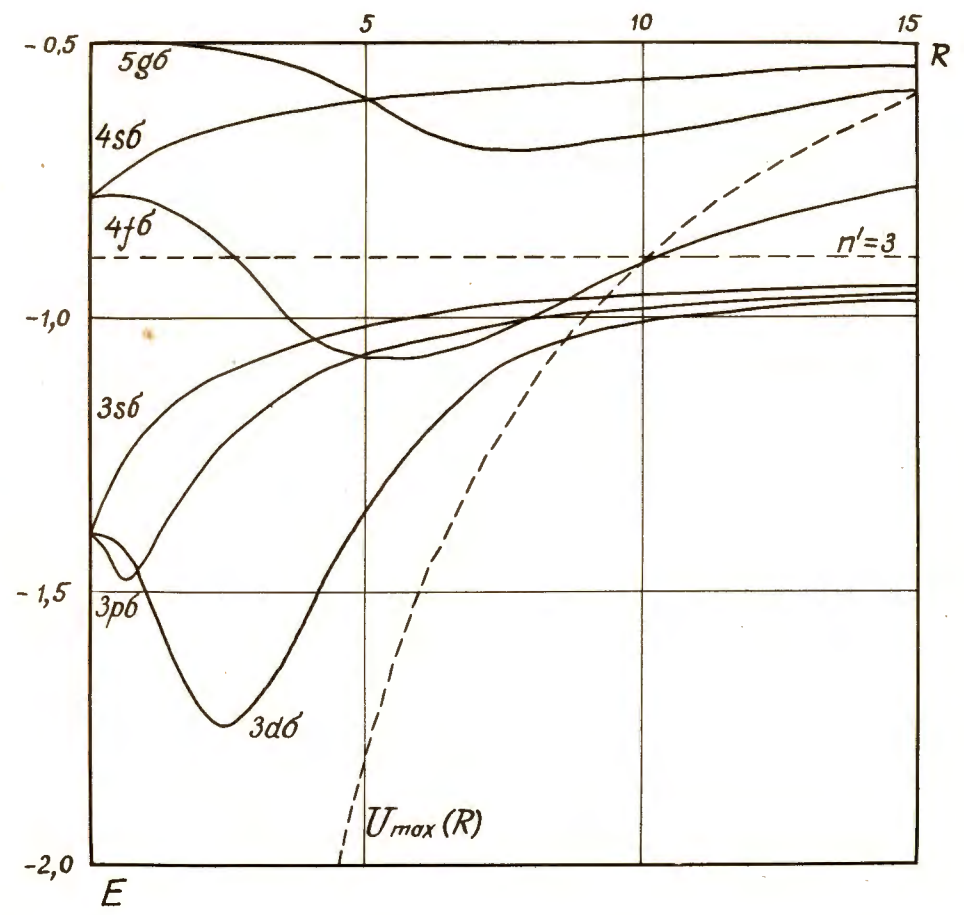


Рис. 2.

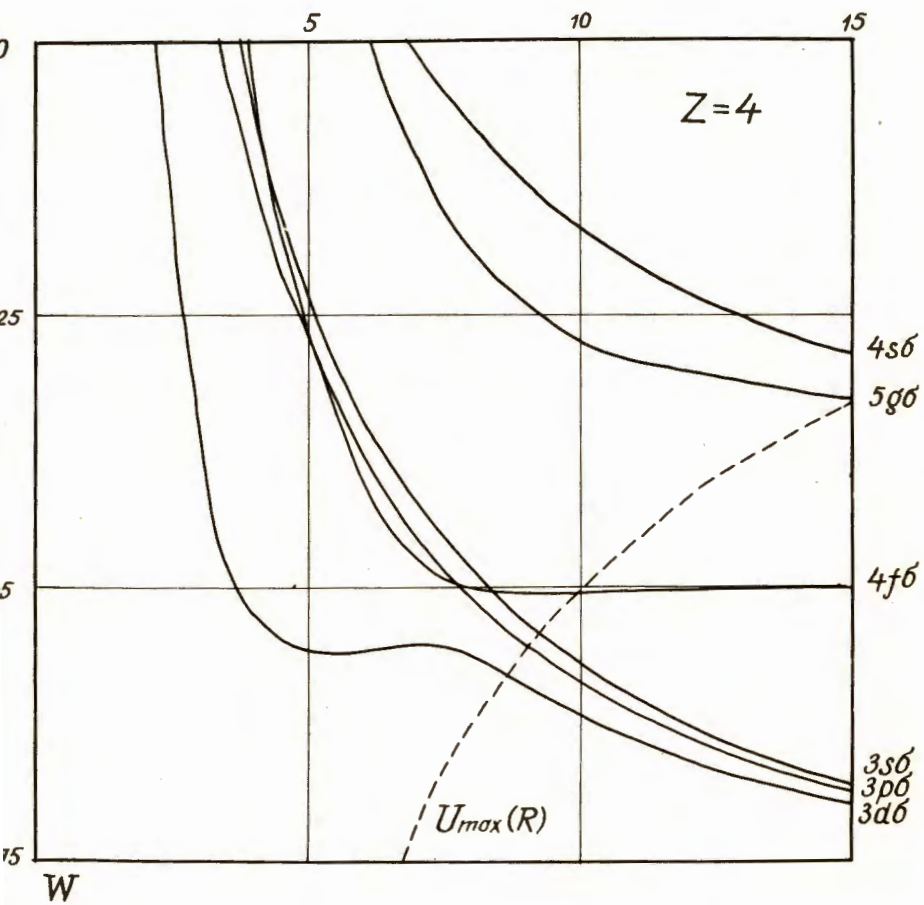


Рис. 2а.

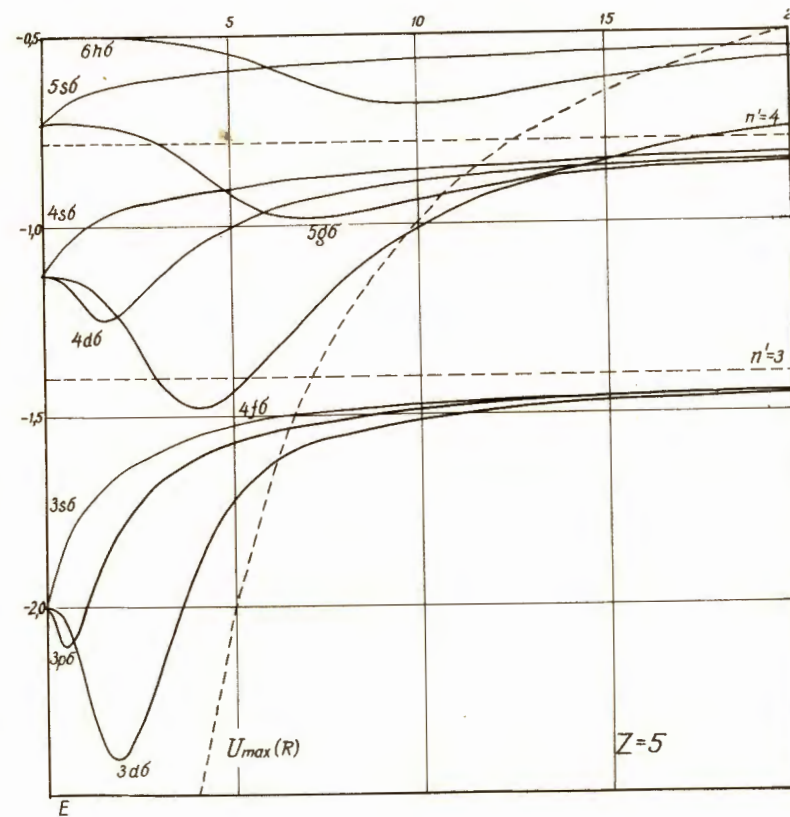


Рис. 3.

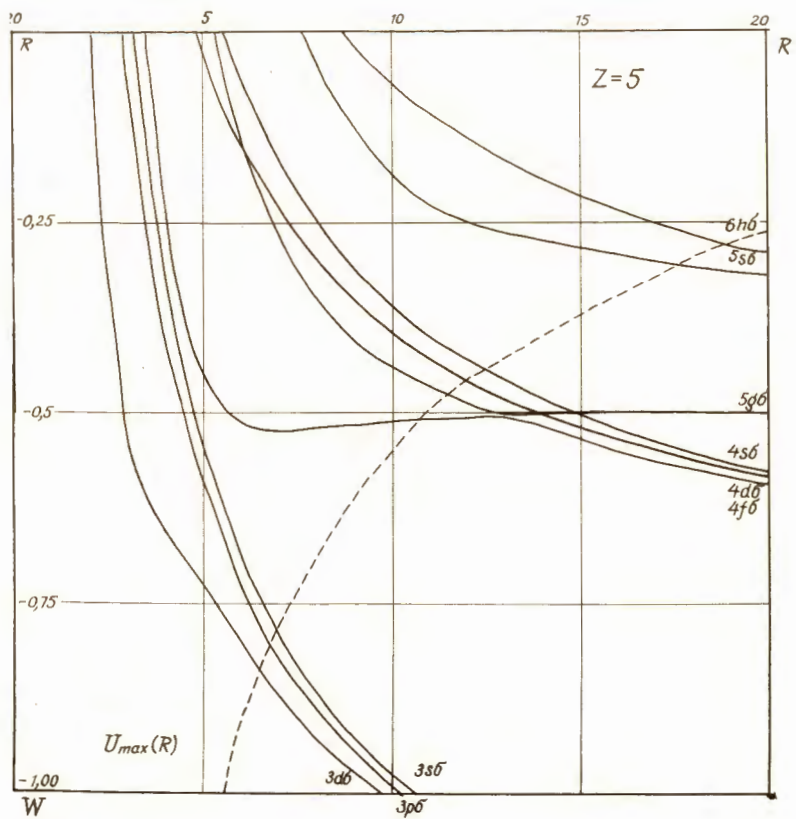


Рис. 3а.

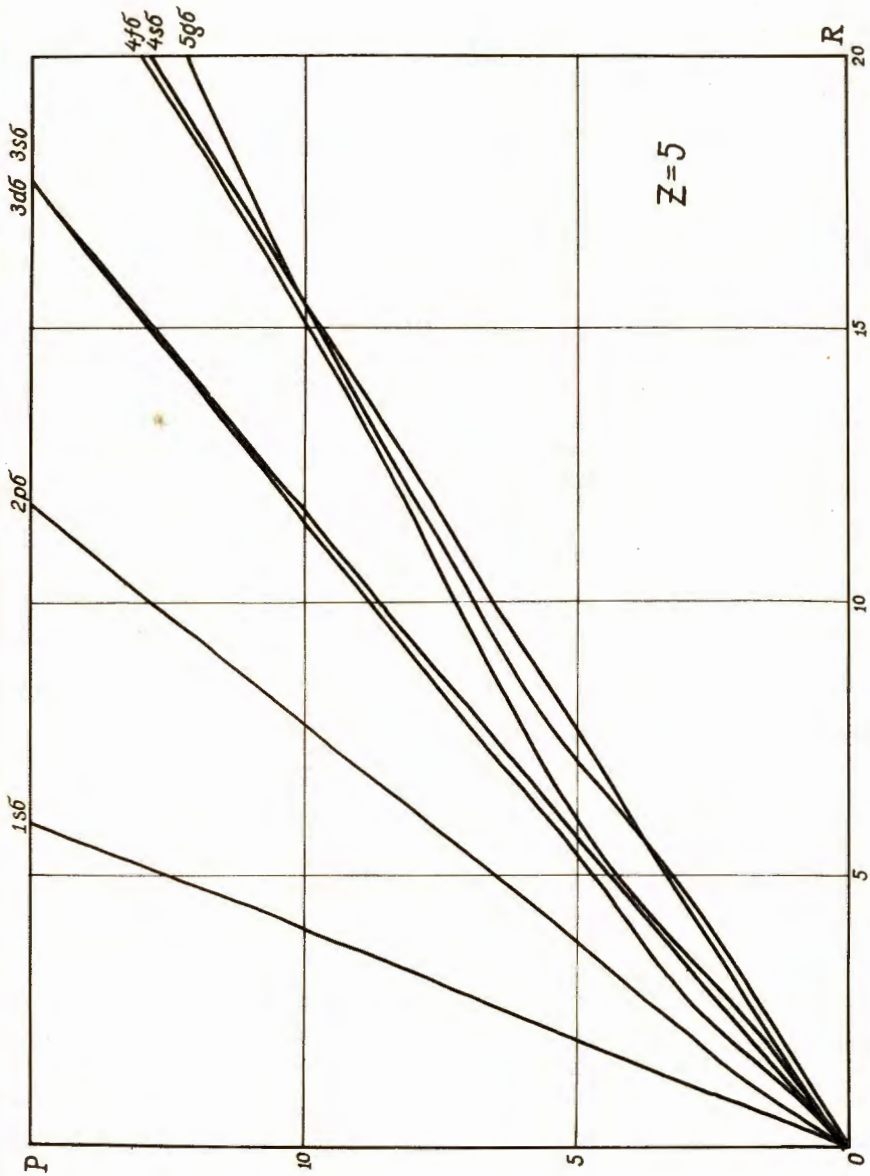


Рис. 3б.

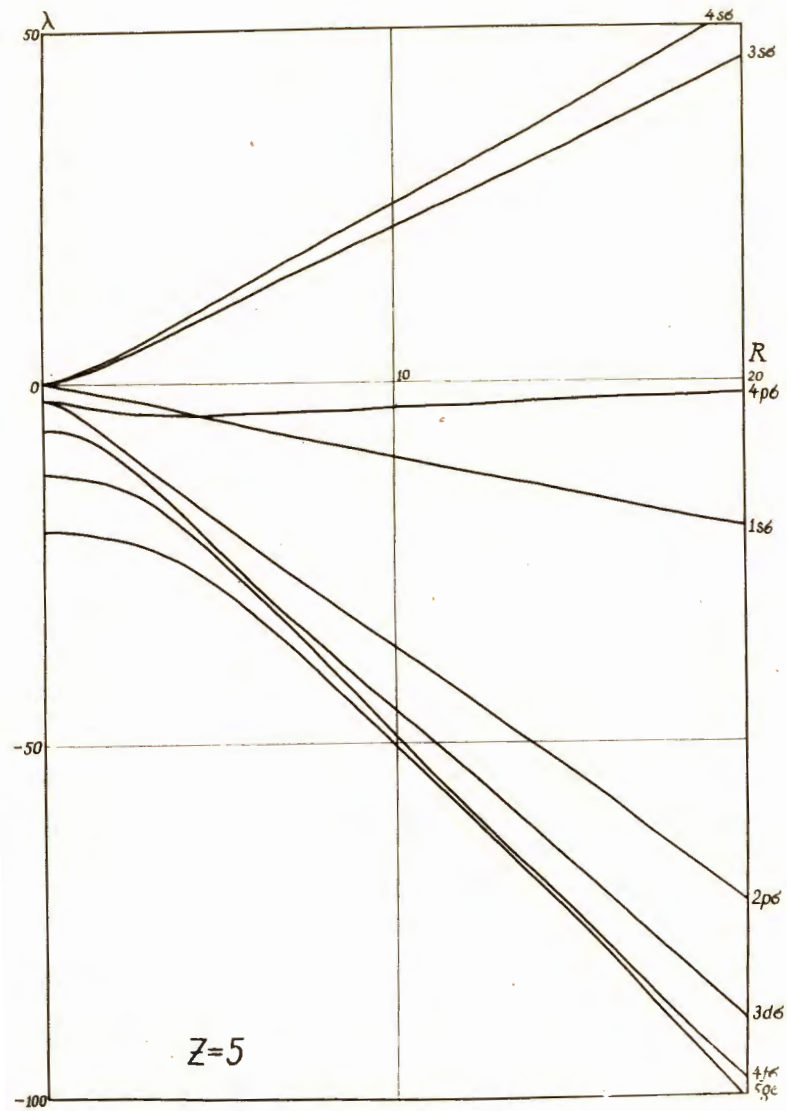


Рис. 3в.

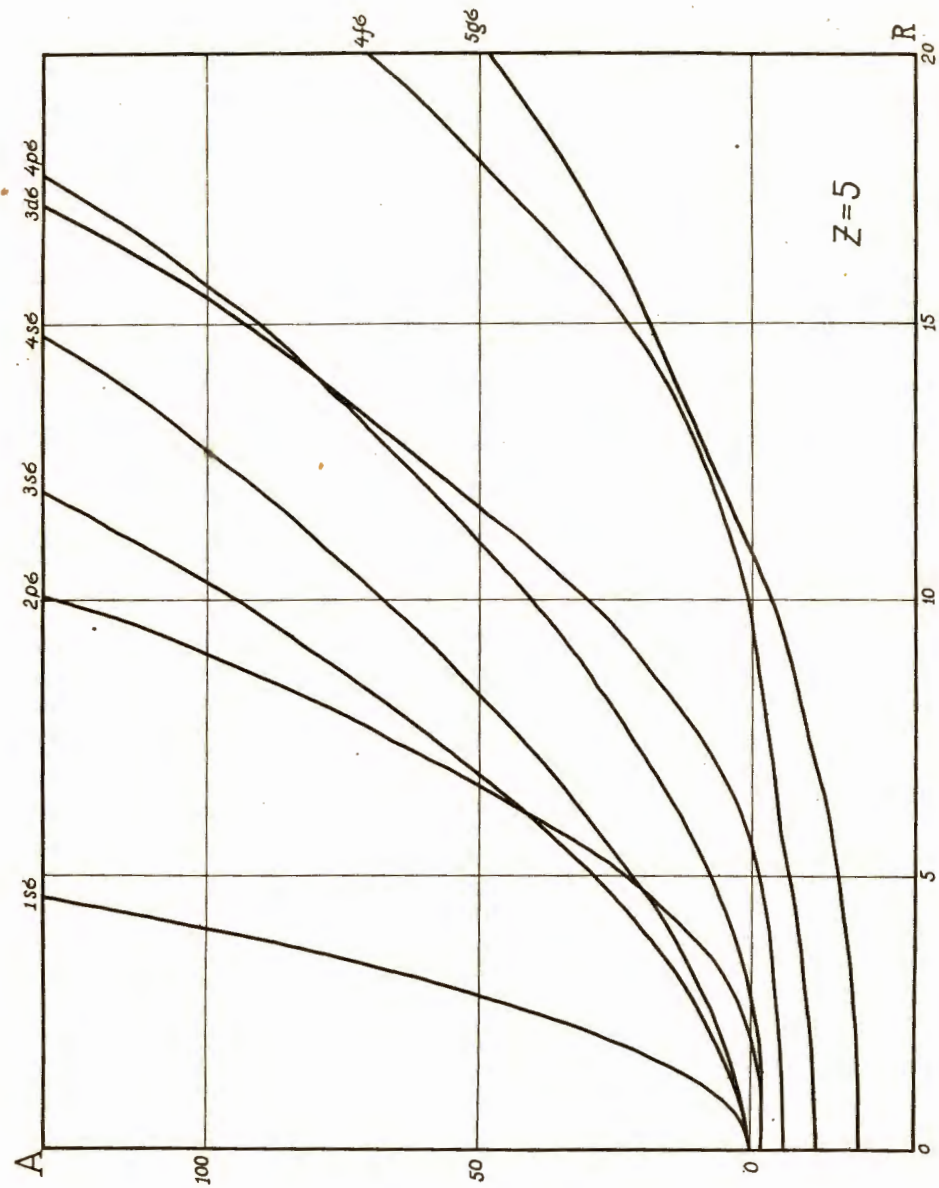


Рис. 3г.

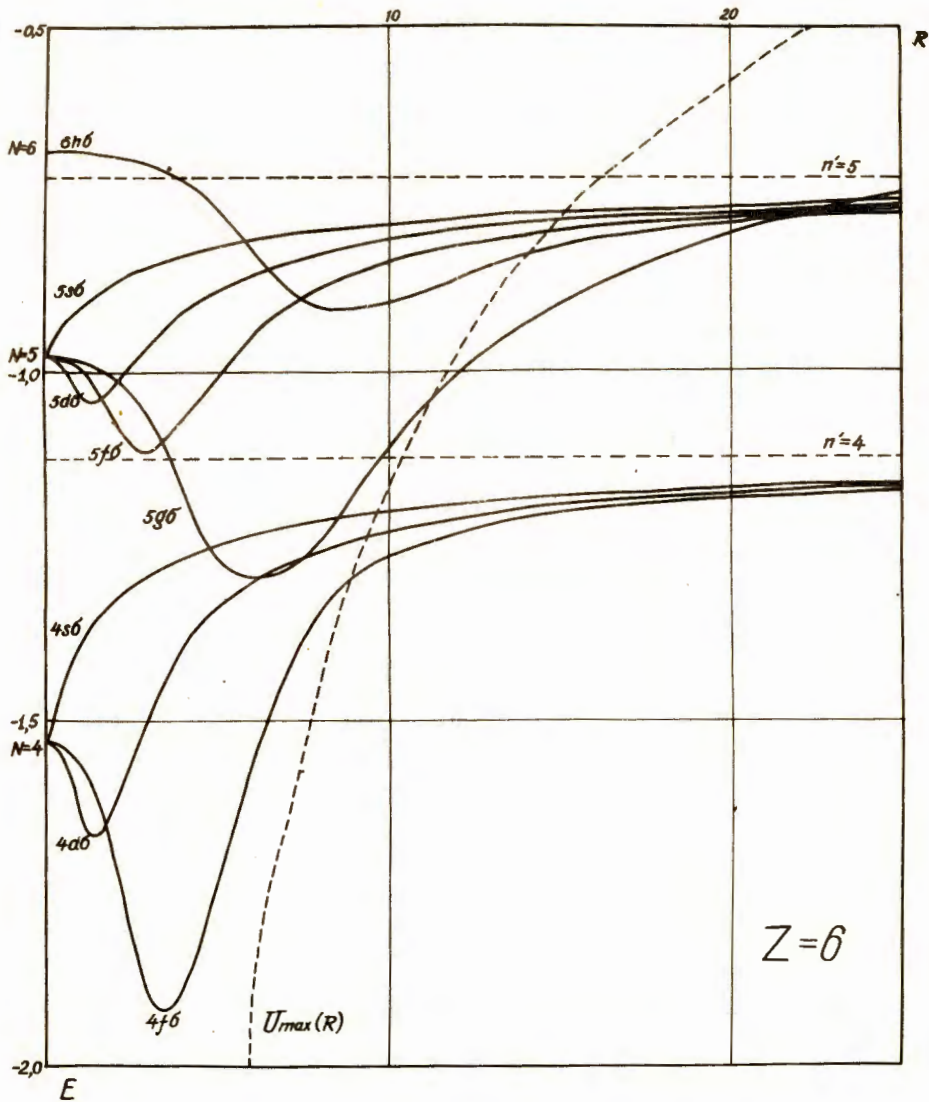


Рис. 4.

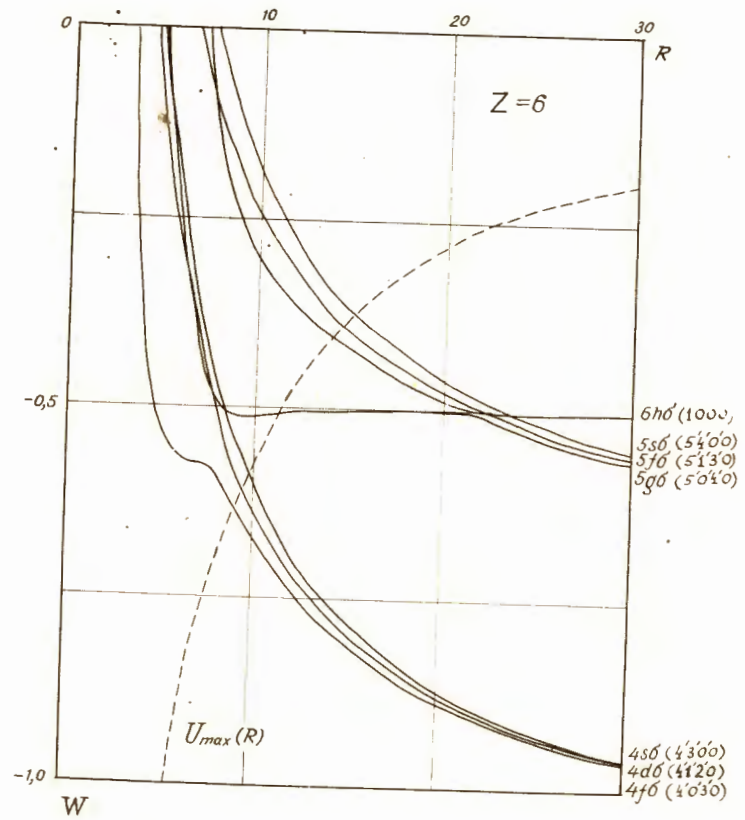


Рис. 4а.



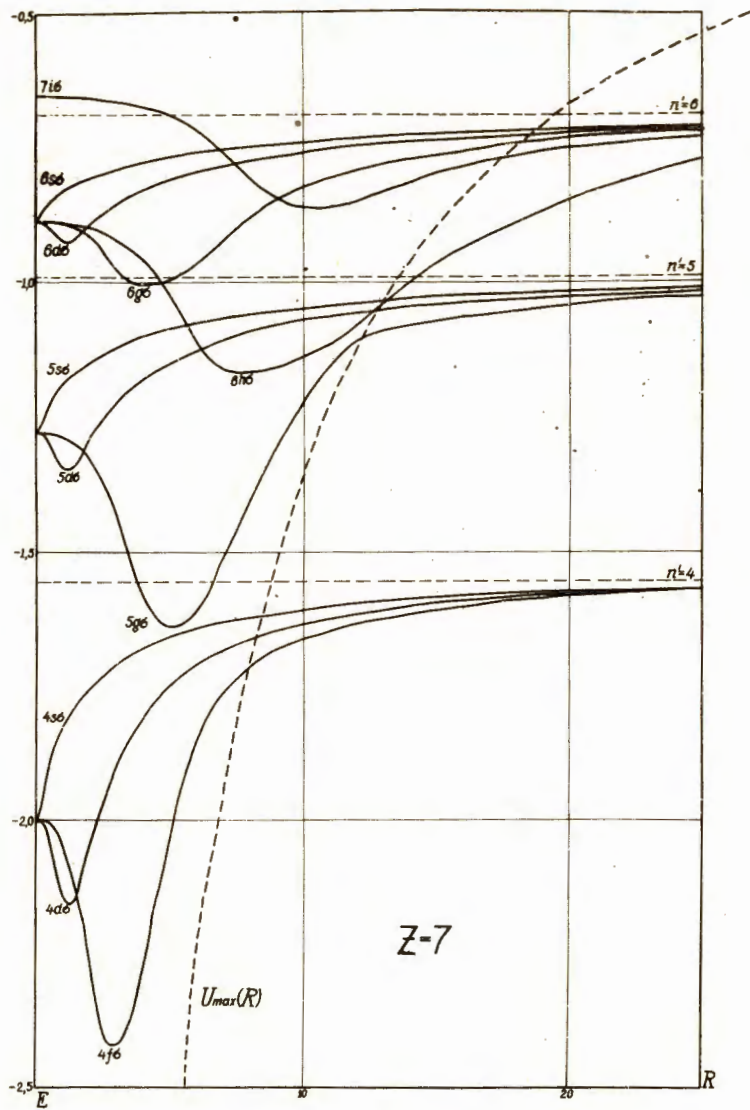


Рис. 5.

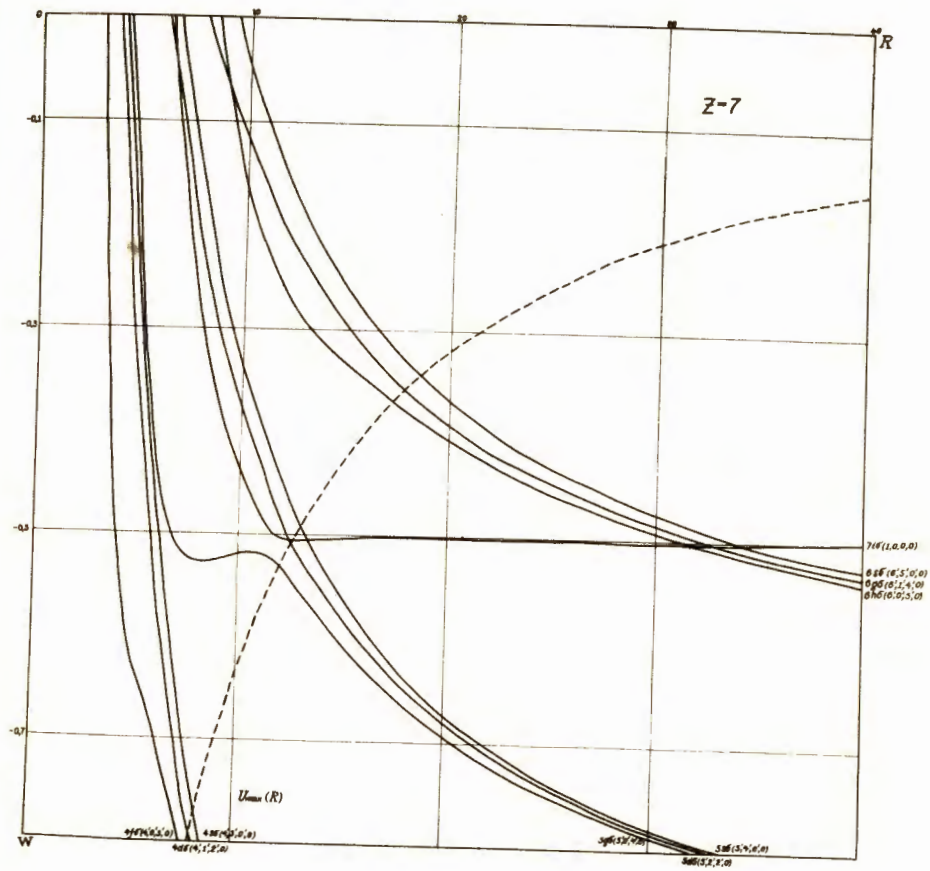


Рис. 5а.

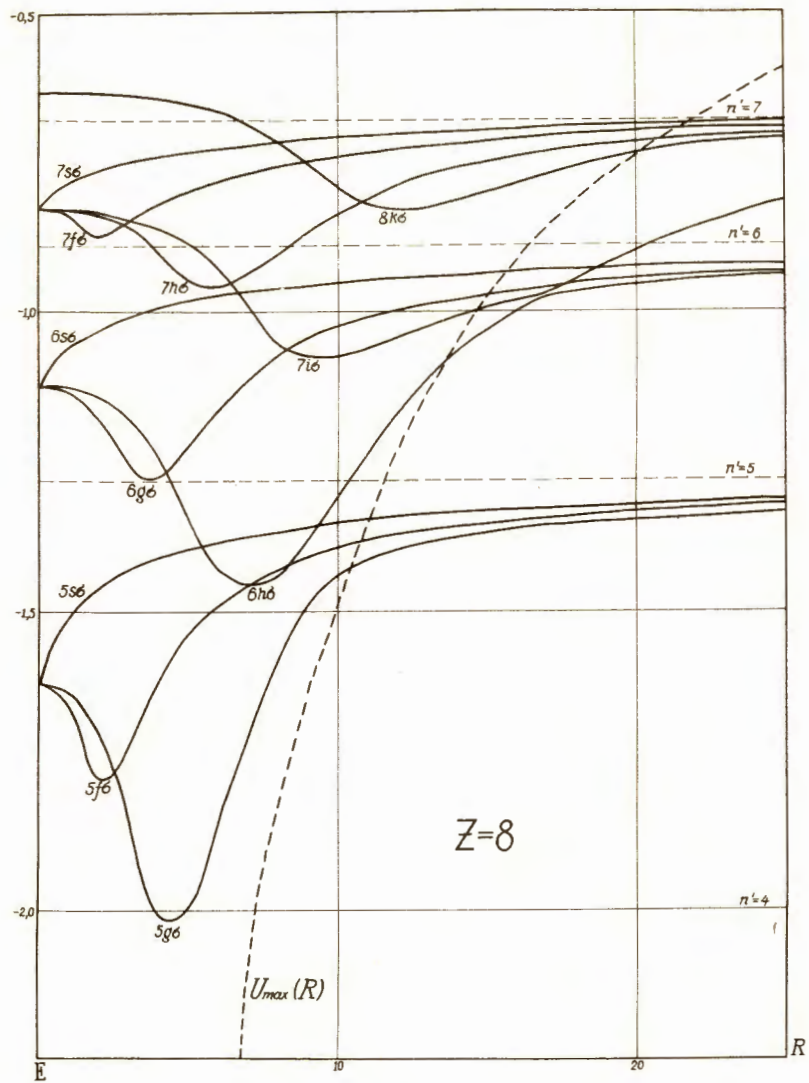


Рис. 6.

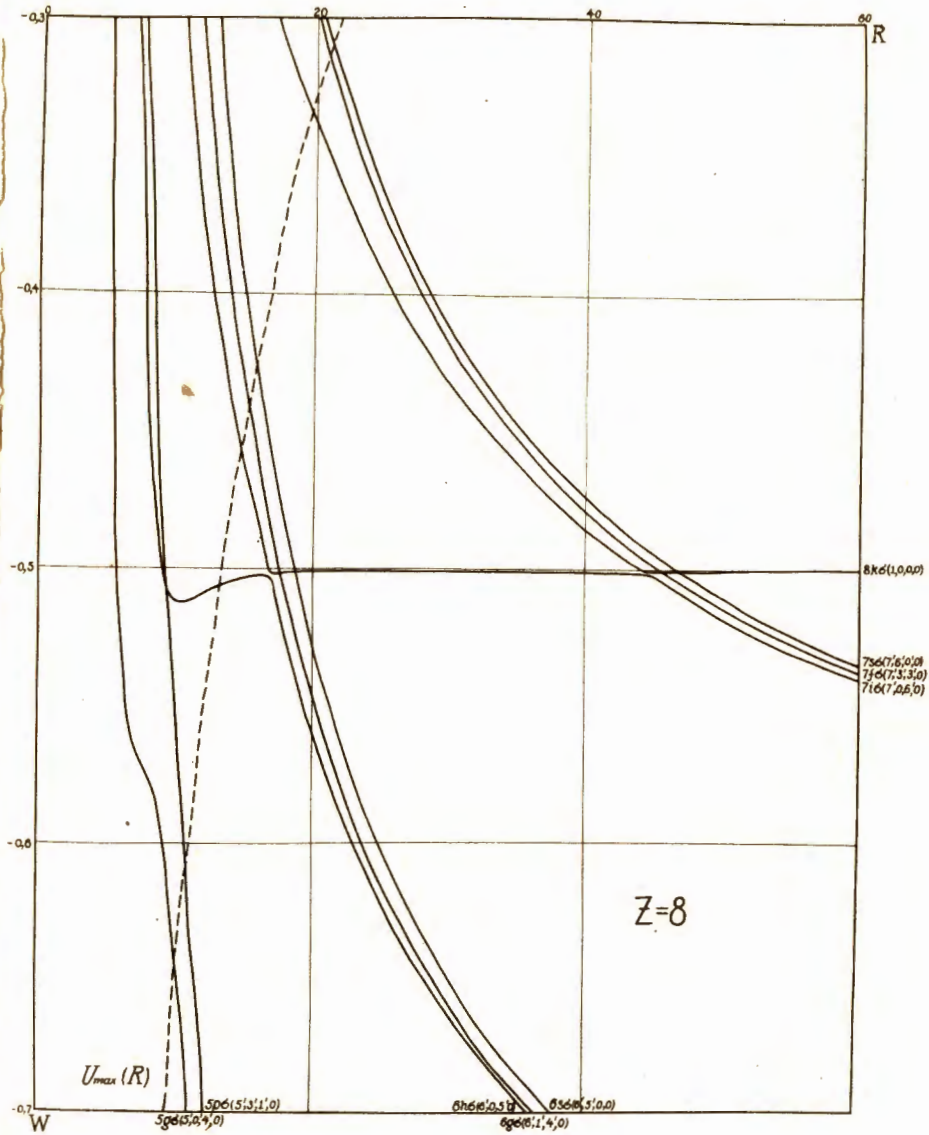


Рис. 6а.

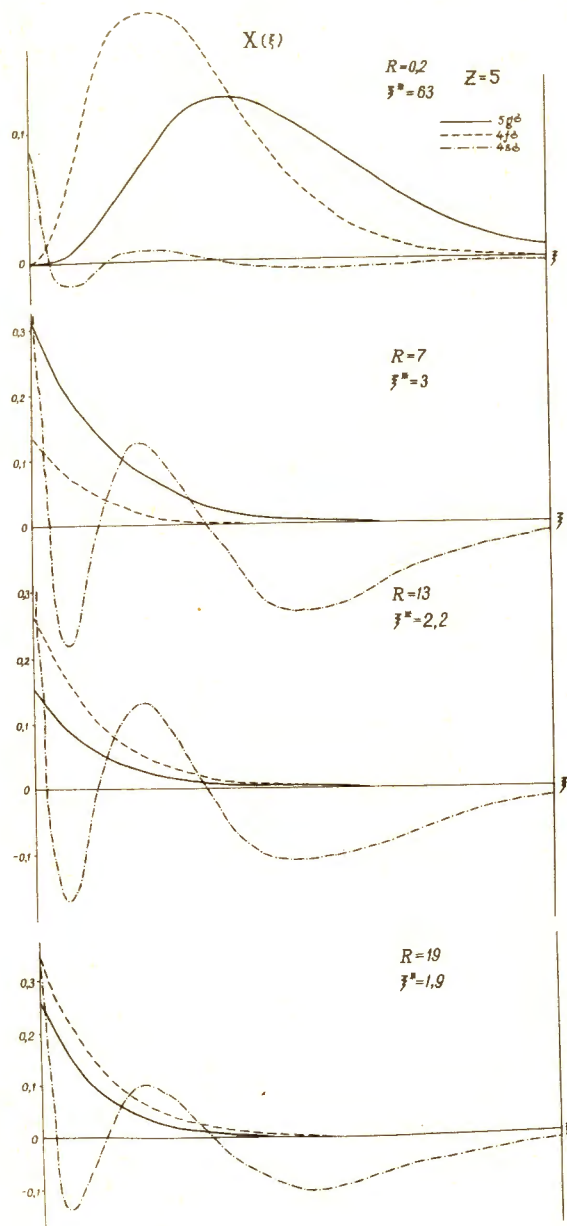


Рис. 7.

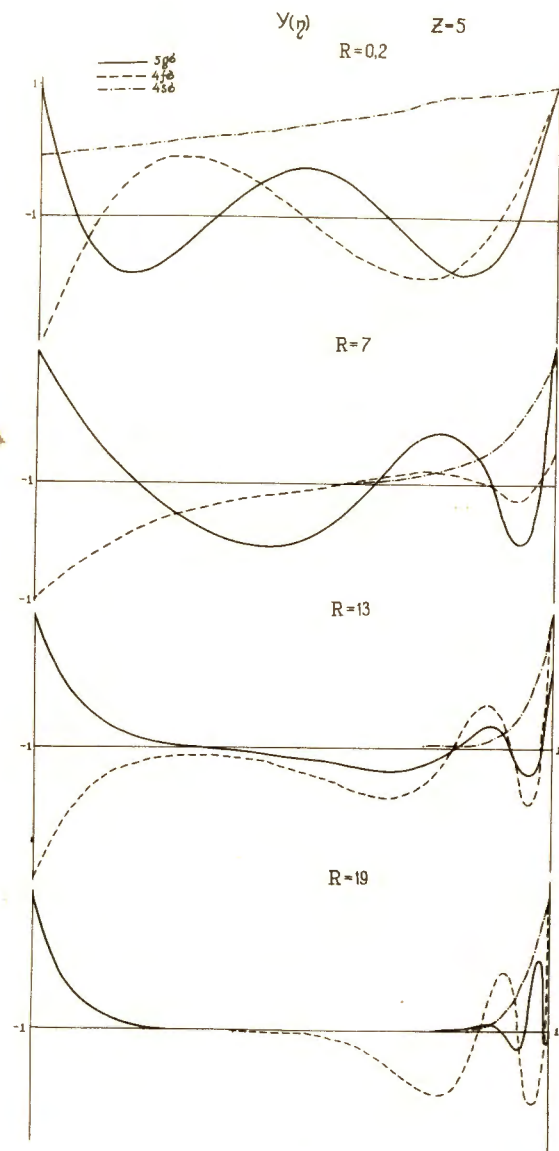


Рис. 8.