ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 2991

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

Рассеяние электронов на поляризованных адронных мишенях

1966

P2 - 2991

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

Рассеяние электронов на поляризованных адронных мишенях

Введение

В последнее время сильно возрос интерес к электромагнитным формфакторам адронов в связи с успехами теории симметрии элементарных частиц и открытием нарушения CP-инвариантности[1].

Так, например, теория SU(6)-симметрии позволяет вычислить на основе нуклонных электромагнитных формфакторов изобарные и переходные[2]. Таким образом, измерение этих формфакторов является хорошей проверкой приближения SU(6)-симметрии.

Предположение о том, что CP-инвариантность нарушена из-за электромагнитных взаимодействий адронов[3], означает возможность существования у адронов T-неинвариантных электромагнитных формфакторов. Поэтому особый интерес вызывают процессы взаимодействия электронов с адронами (упругое и неупругое рассеяние электронов на адронах и адронных системах, аннигилляция пары e^-e^+ с рождением адронов и т.п.), позволяющие экспериментально определять электромагнитные формфакторы адронов[x]. Эти же реакции (наряду с фотоядерными) позволяют изучить электромагнитную структуру ядер.

2. Однофотонное приближение

Так как константа электромагнитного взаимодействия мала, то однофотонное приближение для процесса рассеяния электронов на адронах дает удовлетворительную точность при сравнении с экспериментальными данными[4] (вводятся лишь радиационные поправки[5]).

---

x) Реакции фоторождения и электромагнитных распадов адронов позволяют определить лишь статические мультипольные моменты частиц (т.е. значения формфакторов при нулевом передаваемом импульсе).

Сечение упругого рассеяния электронов на неполяризованных частицах со спином 1/2 в однофотонном приближении с учетом электромагнитных формфакторов впервые было вычислено Розенблутом [6] и недавно обобщено на случай произвольного спина (Гурден [7], Дубовик [8]). Была также учтена T -неинвариантная часть взаимодействия (Гриффи, Валичка [9], Дубовик, Чешков [10]).

В ряде работ (Гурден [3,11], Бьоркен, Валечка [12], Мишели [13], Крист, Ли [14], Кондратюк [15]) получено сечение неупругого рассеяния электронов (рождение изобар, электромагнитное возбуждение ядер) на неполяризованных [11,13] и поляризованных мишенях [14,15].

В настоящей работе дано в однофотонном приближении дифференциальное сечение рассеяния электронов из мишени, состоящей из частиц с произвольным спином j и массой κ. Спин j' и масса κ' конечных частиц также произвольны. Учтены все электромагнитные формфакторы перехода. Спиновое состояние частиц мишени задано матрицей в виде разложения по неприводимым сферическим тензорам. Даны правила отбора формфакторов при наложении условий P и T -инвариантности. Обсужден вклад в сечение от T -инвариантных формфакторов. Отдельно рассмотрен случай поляризованной мишени при нарушении T -инвариантности. Получены основные результаты предыдущих работ как частные и предельные случаи.

3. Параметризация электромагнитного тока

Применим методику параметризации релятивистских матричных элементов локальных операторов, развитую в работах [16,17].

Общая формула для параметризации недиагонального матричного элемента векторного локального оператора I_α в лабораторной системе (л.с.) имеет вид:

$$<\vec{P},\kappa',j',m'|\,I_\alpha(x)\,|\,\vec{0},\kappa,j,m> =$$

$$= 1/(2\pi)^3\,\exp(-q_\lambda x_\lambda)\,a_{\alpha\beta}(w)\,.$$

$$.<\vec{q}/2,\kappa',j',\tilde{m}'|\,I_\beta(0)\,|-\vec{q}/2,\kappa,j,m>\,. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{0}(\vec{P}),\kappa(\kappa'),j(j'),m(m')$ – начальный (конечный) импульс, масса, спин, проекция спина на ось z, $<|T_\beta(0)|>$ – матричный элемент тока в брейтовской системе (б.с.) при $x_\mu = 0$, w – скорость лоренцовского преобразования к ней, и $a_{\alpha\beta}(w)$ – обычная матрица преобразования Лоренца.

В б.с. параметризацию скалярной и векторной частей тока можно записать следующим образом:

$$< \vec{q}/2,\kappa',j',m'|\,I_0(0)|-\vec{q}/2,\kappa,j,m> =$$

$$= \sqrt{4\pi}\, e \sum_{L,M} \frac{(-i)^L [L]^{1/2}}{[L]!!} < j m L M | j' m' > q^L Y^*_{LM}(\vec{n}_q)\cdot$$

$$\cdot \Theta^{(+)}_{L+\omega} \Phi^{0,L}_{jj'}(q^2,\kappa,\kappa') \tag{2}$$

$$<\vec{q}/2,\kappa',j',m'|\,I_1(0)|-\vec{q}/2,\kappa,m> =$$

$$= \sqrt{4\pi}\, e \sum_{J,\Lambda,L,M} a_{1\tilde{1}} \frac{(-i)^{J+1}}{[L]!!} < 1\tilde{1} L M | J \Lambda > [L]^{1/2}\, . \tag{3}$$

$$\cdot < j \tilde{m} J \Lambda | j' m' > q^L Y^*_{LM}(\vec{n}_q)\Theta^{(-)}_{L+\omega}\Phi^{1,L,J}_{jj'}(q^2,\kappa,\kappa'),$$

где $\Phi^{0,L}_{jj'}$ – электрические формфакторы перехода, $\Phi^{1,L,J}_{jj'}$ – магнитные формфакторы перехода, $a_{1\tilde{1}}$ – матрица перехода к каноническому базису, $\Theta^{(\pm)}_{L+\omega} = 1/2[1\pm(-1)^{L+\omega}]$, причем, $(-1)^\omega$ – относительная четность начального и конечного состояний. Этот множитель отбирает лишь P -инвариантные переходы.

$$[L] \equiv 2L+1\,,\ \Theta^{(+)}_{L+\omega} = \Theta^{(-)}_{L+\omega+1}\,,\ (\Theta^{(\pm)}_{L+\omega})^2 = \Theta^{(\pm)}_{L+\omega} \qquad \text{и т.п.}$$

Требование эрмитовости оператора тока приводит к условию для каждого формфактора:

$$\Phi_{jj'}(q^2,\kappa,\kappa') = (-1)^{j+j'}\Phi^*_{j'j}(q^2,\kappa',\kappa)\,\frac{[j]^{1/2}}{[j']^{1/2}}\, . \tag{4}$$

Закон сохранения тока дает соотношение:

$$\sqrt{4/3\pi\, L[L-1][L]}\,[\Phi^{1,L-1,L}_{jj'} - q^2\Phi^{1,L+1,L}_{jj'}\frac{1}{[L]}\sqrt{\frac{(L+1)/L}{[L-1][L+1]}}\,] =$$

$$= -i q_0 \Phi^{0,L}_{jj'}\,, \qquad q_0 = \sqrt{\vec{q}^{\,2}/4+\kappa'^2} - \sqrt{\vec{q}^{\,2}/4+\kappa^2}\, . \tag{5}$$

Требование T-инвариантности налагает на формфактор любого вида следующее условие:

$$\Phi^{\ldots,L,\ldots}_{j\,j'}(q^2,\kappa,\kappa')=(-1)^{L+j+j'}\sqrt{\frac{[j]}{[j']}}\,\Phi^{\ldots,L,\ldots}_{j'\,j}(q^2,\kappa',\kappa). \qquad (6)$$

Отбор формфакторов по P – и T-инвариантности и подсчет их общего числа при данном j сведен для удобства в таблицу (см. приложение 1).

4. Параметризация матрицы плотности

Матрица плотности спиновых состояний частиц ρ обычно разлагается по полному набору тензорных поляризационных операторов $\mathcal{P}^{j}_{LM}$ [18,19]:

$$\rho=\frac{1}{[j]}\sum_{L=0}\sum_{M}T^{j}_{LM}\,\mathcal{P}^{j}_{LM}, \qquad (7)$$

которые удовлетворяют соотношениям ортогональности и нормировки:

$$\mathrm{Sp}\{\mathcal{P}^{j}_{LM}\,\overset{+}{\mathcal{P}}{}^{j}_{L'M'}\}=[j]\,\delta_{LL'}\delta_{MM'}. \qquad (8)$$

С учетом (8), применяя теорему Вигнера-Эккарта, матричные элементы операторов $\mathcal{P}^{j}_{LM}$ можно выразить через коэффициенты Клебша-Гордона с точностью до произвольного фазового множителя:

$$\langle m'|\,\mathcal{P}^{j}_{LM}\,|m\rangle=e^{i\delta}\,[L]^{1/2}\,\langle j\,m\,L\,M\,|\,j\,m'\rangle\,. \qquad (9)$$

Удобно выбирать $\mathcal{P}^{j}_{LM}$ действительными, т.е. $\delta=0$. Коэффициенты T^{j}_{LM} являются тензорами поляризации частиц ранга L. Они определяются как средние значения соответствующих поляризационных операторов в данном состоянии:

$$T^{j}_{LM}=\mathrm{Sp}\{\rho\,\overset{+}{\mathcal{P}}{}^{j}_{LM}\}. \qquad (10)$$

В силу эрмитовости и нормировки матрицы плотности

$$\mathrm{Sp}\,\rho=1$$

тензоры поляризации T^{j}_{LM} удовлетворяют условиям:

$$T^{j}_{00}=1\,,\quad \overset{*}{T}{}^{j}_{LM}=(-1)^{M}\,T^{j}_{L-M}. \qquad (11)$$

Если матрица плотности $\rho(m_0)$ описывает чистое квантовое состояние с проекцией спина на ось z равным m_0, то у тензоров поляризации не исчезают только нулевые компоненты :

$$T^j_{LM}(m_0)=\{\frac{[L]}{4\pi}\}^{1/2}\ T^j_L(m_0)\delta_{M0},$$

где

$$T^j_L(m_0)=(4\pi)^{1/2}<jm_0L0|jm_0>. \quad (12)$$

Например, обычная поляризация принимает значения:

$$T^j_1(m_0)=(-1)^{2j+1}\sqrt{\frac{4\pi m_0}{j(j+1)}}. \quad (13)$$

Поляризация максимальна при максимальности значений проекции спина на направление поляризации:

$$|T^j_1(m_0)|_{max}=|T^j_1(j)|=\sqrt{\frac{4\pi}{j+1}}. \quad (14)$$

Степень поляризации II ранга (степень выстроенности) равна

$$T^j_2(m_0)=(-1)^{2j}\{3m^2-j(j+1)\}\sqrt{\frac{8\pi}{(j+1)[j-1][j+1]}}. \quad (15)$$

Для частиц со спином $j = 1$ максимальное значение выстроенности достигается при нулевой проекции спина на направление выстроенности

$$|T^1_2(m_0)|_{max}=|T^1_2(0)|=4\sqrt{\pi/5}. \quad (15a)$$

Для частиц со спином $j = 2$ выстроенность максимальна при $m_0 = 0$ или 2:

$$|T^2_2(0)|=|T^2_2(2)|=4\sqrt{\frac{2\pi}{7}}. \quad (15в)$$

Для частиц со спином $j>2$ и $j=3/2$ выстроенность максимальна при $m_0=j$:

$$|T^j_2(j)|=\sqrt{\frac{8\pi j^2[j-1]}{(j+1)[j+1]}}. \quad (15c)$$

Тензоры поляризации чистого состояния с проекцией m_0 на направление $\vec{n}_0$ получаются из (12) поворотом системы координат на углы $(\phi,\theta,0)$:

$$T^j_{LM}(m_0,\vec{n}_0)=T^j_L(m_0)Y^*_{LM}(\vec{n}_0), \quad (16)$$

где

$$T^j_L(m_0)=(4\pi)^{1/2}<jm_0L0|jm_0>.$$

Таким образом, в этом случае матрица плотности имеет вид:

$$\rho(m_0,\vec{n}_0)=\frac{1}{[j]}\sum_{L,M}T^j_L(m_0)Y^*_{LM}(\vec{n}_0)\mathcal{P}^j_{LM}. \quad (17)$$

Однако в общем случае чистого состояния матрицу плотности нельзя привести к виду (17). Матрица плотности состояния полной поляризации вдоль $\vec{n}_0$ ранга L имеет вид:

$$\rho(L,\vec{n}_0) = \frac{1}{[j]}\{I + T^j_L \sum_M Y^*_{LM}(\vec{n}_0)\mathcal{T}^j_{LM}. \tag{18}$$

Такое состояние, однако, не является чистым квантовым состоянием, так как для чистого состояния с вектором состояния $|\psi>$:

$$<m'|\rho(\psi)|m> = a^*_m a_{m'},$$

где $a_m = <m|\psi>$, т.е. $\rho(\psi)$ обязательно имеет неисчезающие недиагональные матричные элементы, а $\rho(L,z)$ таких не имеет и не совпадает с (17).

Условия неотрицательности матрицы плотности накладывают на тензоры поляризуемости T^j_{LM} дополнительные условия [20].

Так, в состоянии полной поляризации I ранга (обычная поляризация) степень поляризации T^j_1 удовлетворяет неравенству:

$$(T^j_1)^2 \le \frac{8\pi}{3} j. \tag{19}$$

Тензоры поляризации для произвольной матрицы плотности могут быть представлены в виде [21,22]:

$$T^j_{LM} = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{L+\ell_1+\ell_2} T^j_{L\ell_1\ell_2} <\ell_1 m_1 \ell_2 m_2|LM> \cdot$$

$$\cdot Y^*_{\ell_1 m_1}(\vec{n}_1) Y^*_{\ell_2 m_2}(\vec{n}_2); \quad \ell_1+\ell_2 = L;\ L+1. \tag{20}$$

Здесь $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - произвольные единичные неколлинеарные векторы. (В приложении доказывается полнота и линейная независимость системы L -векторов $\Psi^{\ell_1\ell_2}_{LM} = \sum_{m_1,m_2} \cdot$ $\cdot <\ell_1 m_1 \ell_2 m_2|LM> Y^*_{\ell_1 M_1}(\vec{n}_1) Y^*_{\ell_2 m_2}(\vec{n}_2)$, по которой произведено разложение (20)).

Фазы при коэффициентах поляризаций $T^j_{L\ell_1\ell_2}$ в (20) выбраны таким образом, что условие (11) делает эти коэффициенты действительными.

Коэффициенты $T^j_{L\ell_1\ell_2}$ определяют степень соответствующих поляризаций по трем направлениям $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3 = \frac{[\vec{n}_1\vec{n}_2]}{|[\vec{n}_1\vec{n}_2]|}$ (удобно орты $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ выбирать взаимно-перпендикулярными: $\vec{n}_1 = e_x$, $\vec{n}_2 = e_y$, $\vec{n}_3 = e_z$). Так, например, ортогональные проекции вектора поляризации T^j_{1M} равны:

$$\begin{aligned} T^j_{1x} &= T^j_{1,1,0} \\ T^j_{1y} &= T^j_{1,0,1} \\ T^j_{1z} &= T^j_{1,1,1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Матрица плотности в виде (18) и (20) и ее свойства ниже будут использованы для расчета сечений рассеяния на поляризованных частицах.

5. Вычисление сечения и его общий вид

В общем виде сечение записывается как:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |M^{(e)}|^2 \sum_{m,m'} |M^{(h)}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2q^2}\, Sp.\overset{+}{I}{}^{(e)}_{\mu}\, I^{(e)}_{\nu}\, a_{\mu\alpha}(w)\, a_{\nu\beta}(w)\, Sp\, \overset{+}{I}{}^{(h)}_{\alpha}\, \rho\, I^{(h)}_{\beta}\,, \tag{22}$$

где $I^{(e)}_{\mu}$ и $I^{(h)}_{\alpha}$ – операторы электромагнитного тока электрона (мюона) и адрона соответственно, ρ –матрица плотности спиновых состояний частиц мишени записана в виде (20).

Нахождение первого шпура тривиально:

$$Sp\, I^{(e)}_{\mu}\, I^{(e)}_{\nu} = p_{\mu} p'_{\nu} + p_{\nu} p'_{\mu} - \frac{q^2}{2}\delta_{\mu\nu}\,, \tag{23}$$

где p и p' – начальный и конечный 4-импульсы электрона.

Матрица лоренцова преобразования в б.с. из л.с. имеет вид:

$$a_{00} = w_0 \; (w_0 = \sqrt{\vec{w}^{\,2} - 1}\,),\; a_{i0} = a_{0i} = w_i$$

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \frac{w_i w_k}{w_0 + 1}\,,\quad w_i = \frac{P_i}{2\kappa\sqrt{b}}\,,\; w_0 = \frac{1+a}{\sqrt{b}}\,.$$

Введены следующие кинематические обозначения:

$$(\widehat{\vec{p}\,\vec{p}\,'}) = \theta,\; q^2 = (p-p')^2 > 0 \quad \xi = \frac{q^2}{4\kappa^2}\,,\; \eta = 1+\xi$$

$$x = \frac{\kappa^2}{\kappa'^2} - 1\,,\; a = \xi + x/4,\; b = \eta + x/2,\; c = 1+\sqrt{b}\,,$$

$$d = a^2 + \xi\,.$$

Проделав довольно громоздкие выкладки, получим следующий результат[x)]:

---

x) При расчетах использованы монографии /22,23/.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{МОТТ}} \left[F_{L''=0} + F^{(э)}_{L''} + F^{(эм)}_{L''} + F^{(м)}_{L''} \right], \tag{24}$$

где $F_{L''=0}$ – часть, соответствующая неполяризованному сечению, $F^{(э.)}_{L''}$ – часть, содержащая электрические формфакторы, $F^{(м)}_{L''}$ – часть, содержащая магнитные формфакторы, $F^{(эм)}$ – интерференционная часть.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{МОТТ}} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2} \frac{\mathrm{Ctg}^2\theta/2}{\sin^2\theta/2} \frac{1}{1+(\frac{2E}{\kappa})\mathrm{Sin}^2\theta/2},$$

причем

$$\epsilon = \kappa\left(a + \sqrt{a + \xi/\mathrm{Sin}^2\theta/2}\right), \; E = \kappa(1+2a),$$

$$F_{L''=0} = \frac{[j']}{[j]} \left(\mathcal{G} + \mathcal{B}\,\mathrm{tg}^2\theta/2 \right) \tag{25}$$

$$\mathcal{G} = \sum_{L>0}^{2j} \left(4\xi + \frac{x^2}{4b}\right)^L \frac{|\phi^{0,L}|^2}{\{[L]!!\}^2} + \mathcal{B} \tag{26}$$

$$\mathcal{B} = \sum_{L>1}^{2j} \frac{(4\xi + \frac{x^2}{4b})^L}{\{[L]!!\}^2} \Big\{ \frac{2\pi}{3} |\phi^{1,L,L}_{jj'}|^2 \,\Theta^{(-)}_{L+\omega} + \frac{2\pi}{3}\left(4\xi + \frac{x^2}{4b}\right) \Big[$$

$$\cdot \frac{[L]}{L[L+1]} |\phi^{1,L+1,L}_{jj'}|^2 \Theta^{(+)}_{L+\omega} + \frac{x^2}{(16\xi b + x^2)} \frac{L+1}{4L} |\phi^{0,L}_{jj'}|^2 \Theta^{(+)}_{L+\omega} +$$

$$+ \frac{x}{4b}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{(L+1)[L]}{L[L+1]}}\,\mathrm{Im}\,(\phi^{0,L}_{jj'} \overset{*}{\phi}{}^{1,L+1,L}_{jj'})\,\Theta^{(+)}_{L+\omega} + \tag{27}$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{x^2}{x^2+16\xi b} |\phi^{0,0}_{jj'}|^2 \Theta^{(+)}_{\omega} + \frac{1}{8} A \frac{x^2}{x^2+16\xi b} \left(|\phi^{0,L}|^2 \Theta^{(+)}_{L+\omega} + \right.$$

$$\left. + 4/3\, |\phi^{0,0}_{jj'}|^2 \Theta^{(+)}_{\omega} \right\} .$$

Введем обозначения

$$\chi = \frac{(-1)^{j+j''}[j']}{2[L]!![L']!!} \sqrt{\frac{[L][L'][\ell_1][\ell_2]}{[j][L'']}} \left(4\xi + \frac{x^2}{4b}\right)^{\frac{L+L'}{2}} T^{L''}_{\ell_1 \ell_2} \tag{28}$$

$$\{\phi^{\dots,L,\dots}\phi^{\dots,L,\dots}\}_{(\alpha)} \equiv (-1)^{\alpha}\left[\phi^{\dots,L,\dots}_{jj'} \overset{*}{\phi}{}^{\dots,L',\dots}_{jj'} + (-1)^{\alpha} \overset{*}{\phi}{}^{\dots,L,\dots}_{jj'} \phi^{\dots,L',\dots}_{jj'}\right] \Theta^{(\dots)}_{L+\omega} \Theta^{(\dots)}_{L'+\omega} .$$

Тогда

$$F^{(э)}_{L''} = \sum_{L,L'} (-1)^{\ell_1+\ell_2} [L''] (LL'L'')(\ell_1\ell_2 L'') \begin{bmatrix} L & L' & L'' \\ j & j & j' \end{bmatrix} \chi P_{\ell_2}(0) \{\phi^{0,L} \overset{*}{\phi}{}^{0,L'}\}_{(L-L')} \quad (29)$$

$$F^{(эм)}_{L''} = \sum_{L,L',\ell,\ell'} r^{(эм)} [C P_{\ell_2}(0)(-1)^{\ell_1+\ell_2}(1\ell L'')(L''\ell_1\ell_2) +$$

$$+ D P_{\ell'}(0)[\ell'](\ell\ell_1\ell')(1\ell_2\ell')\left\{\begin{matrix} \ell_1 & \ell_2 & L'' \\ 1 & \ell & \ell' \end{matrix}\right\}], \quad (30)$$

где $r^{(эм)} = 4\sqrt{\frac{\pi}{3}}(-1)^{L''}[J]^{1/2}[L''][\ell](LL'\ell)\chi\left\{\begin{matrix} L & J & L'' \\ j & j & j' \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1 & L'' & \ell \\ L' & L & J \end{matrix}\right\}\{\phi^{0,L'}\overset{*}{\phi}{}^{1,L,J}\}_{(L'-J-1)}$

$$F^{(M)}_{L''} = \sum_{L,L',\ell,\ell',\ell''} r^{(M)} \{[\lambda P_{\ell_2}(0) + \mu P_{\ell''}(0)] \frac{\xi b}{d} +$$

$$+ (2\lambda - \mu) P_{\ell_2}(0)\, b\, \mathrm{tg}^2\theta/2 + (\lambda + \mu) A P_{\ell_2}(0) + \nu B P_{\ell'}(0)\}, \quad (31)$$

где $r^{(M)} = -\frac{4\pi}{9}\sqrt{[J][J']}\chi\left\{\begin{matrix} J & J' & J'' \\ j & j & j' \end{matrix}\right\}\{\phi^{1,L,J}\overset{*}{\phi}{}^{1,L',J'}\}_{(J+J'+L''+\ell_1+\ell_2)}$

$$\lambda = [L''](LL'L'')(L''\ell_1\ell_2)\left\{\begin{matrix} L & J & 1 \\ J' & L' & L'' \end{matrix}\right\},$$

$$\mu = \sqrt{30}(-1)^{L'+J'+\ell_2}[\ell][\ell''][L''](LL'\ell)(2\ell''\ell_2)(\ell\ell''\ell_2)(\ell\ell''\ell_1)\left\{\begin{matrix} \ell_1 & \ell_2 & L'' \\ 2 & \ell & \ell' \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} L & J & 1 \\ \ell & L'' & 2 \\ L' & J' & 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\nu = (-1)^{L''}[\ell'](1\ell_2\ell')^2\lambda + \sqrt{\frac{15}{2}}(-1)^{\ell+\ell_2}[\ell']\frac{(1\ell'\ell'')(1\ell'\ell_2)}{(2\ell_2\ell'')}\left\{\begin{matrix} \ell'' & 2 & L'' \\ 1 & \ell' & 1 \end{matrix}\right\}\mu$$

Кинематические части в формулах (30), (31) имеют вид:

$$A=\frac{a^2b}{d}+d\{1-\frac{2a}{d\sqrt{b}}(\frac{d+c\sqrt{b}}{a+c})+\frac{a^2}{(a+c)^2}+[1-\frac{2\sqrt{b}}{a+c}-\frac{d}{(a+c)^2}]\,\mathrm{tg}^2\theta/2\},$$

$$B=GF,\ C=-1/\xi\, GF^2,\ D=F\sqrt{b/d},$$

$$G=\frac{c\sqrt{b}}{a+c}-\frac{ab}{d},\ F=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\ \sqrt{d+\xi\,\mathrm{ctg}^2\theta/2}\,. \tag{32}$$

6. Частные случаи

Выписанное сечение очень общо. Можно перейти к наиболее важным частным случаям. Пусть, например, поляризация частиц мишени описывается ρ -матрицей в виде (18). Тогда $F_{L''}^{(э)}$, $F_{L''}^{(эм)}$, $F_{L''}^{(м)}$ примут вид:

$$F_{L''}^{(э)}(\vec{n}_1)=\sum_{L,L'}[L'']^{1/2}(LL'L'')\begin{Bmatrix}L & L' & L''\\ j & j & j'\end{Bmatrix}\chi'\{\phi^{0,L}\overset{*}{\phi}{}^{0,L'}\}_{(L-L')}, \tag{33}$$

где

$$\chi'=\chi(\ell_1=L'',\ell_2=0),\ \vec{n}_1=\vec{q}/|\vec{q}|.$$

$$F_{L''}^{(э)}(\vec{n}_2)=F_{L''}^{(э)}(\vec{n}_3)=F_{L''}^{(э)}(\vec{n}_1)\,P_{L''}(0), \tag{33а}$$

где $\vec{n}_3=\frac{[\vec{n}_1\vec{n}_2]}{|[\vec{n}_1\vec{n}_2]|}$ – нормаль к плоскости рассеяния.

$$F_{L''}^{(эм)}(\vec{n}_1)=\sum_{L,L'}r^{(эм)}C, \tag{34а}$$

$$F_{L''}^{(эм)}(\vec{n}_2)=\sum_{L,L',\ell}r^{(эм)}[CP_{L''}(0)+DP_\ell(0)], \tag{34в}$$

где

$$r^{(эм)}=4\sqrt{\frac{\pi}{3}}(-1)^{L''}[\ell]\sqrt{[J][L'']}(1\ell L'')(\ell L L')\chi'\cdot$$

$$\cdot\begin{Bmatrix}1 & \ell & L''\\ L' & J & L\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}J & L & L''\\ j & j & j'\end{Bmatrix}\{\phi^{1,L,J}\overset{*}{\phi}{}^{0,L'}\}_{(L'+J+1)}.$$

$$F^{(\text{эм})}_{L''}(\vec{n}_3)=\sum_{L,L',\ell}\{r^{(\text{эм})}CP_{L''}(0)+\tilde{\tilde{r}}^{(\text{эм})}DP^{(1)}_{L''}(0)\},\tag{34c}$$

где

$$\tilde{\tilde{r}}^{(\text{эм})}=4\sqrt{\frac{\pi[L''][J]}{3L''(L''+1)}}\,(LL'L'')\,\chi'\left\{\begin{matrix}1 & L'' & L'' \\ L' & J & L\end{matrix}\right\}\cdot:$$

$$\cdot\left\{\begin{matrix}J & L' & L'' \\ j & j & j'\end{matrix}\right\}\{\phi^{1,L,J}\ \overset{*}{\phi}^{0,L'}\}_{(L'-J)};$$

$$F^{(M)}_{L''}(\vec{n}_1)=\sum_{L,L',\ell}r^{(M)}[(\lambda-\mu/2)(\frac{\xi b}{d}+2b\,tg^2\theta/2+(\lambda+\mu)A],\tag{35a}$$

$$F^{(M)}_{L''}(\vec{n}_2)=\sum_{L,L',\ell,\ell'}r^{(M)}\{[(\lambda-\mu/2)\,2b\,tg^2\theta/2+(\lambda+\mu)A+$$

(35в)

$$+\lambda\frac{\xi b}{d}]P_{L''}(0)+\mu\frac{\xi b}{d}P_{\ell}(0)+\nu BP_{\ell'}(0)\},$$

где

$$\lambda=(-1)^{L''}[L'']^{1/2}(LL'L'')\left\{\begin{matrix}L & J & 1 \\ J & L' & L''\end{matrix}\right\}$$

$$\mu=(-1)^{L'+J'}\sqrt{30[L'']}\,(\ell)\,(\ell LL')(2\ell L'')\begin{Bmatrix}L & J & 1 \\ \ell & L'' & 2 \\ L' & J' & 1\end{Bmatrix}$$

$$\nu=(-1)^{L''}[\ell'](1\ell'L'')^2\lambda+\sqrt{\frac{15}{2}}\,\frac{(1\ell\ell')(1L''\ell')}{(2\ell L'')}[\ell']\cdot$$

$$\cdot:\left\{\begin{matrix}\ell' & 1 & L'' \\ 2 & \ell & 1\end{matrix}\right\}\mu$$

$$r^{(M)} = -\frac{4\pi}{9}\sqrt{[J][J']}\,\chi'\left\{\begin{matrix} J & J' & L'' \\ j & j & j' \end{matrix}\right\}\left\{\phi^{1,L,J}\ \phi^{1,L',J'}\right\}_{(J-J')},$$

$$F^{(M)}_{L''}(\vec n_3) = \sum_{L,L',\ell,\ell'} r^{(M)}\{[(\lambda-\mu/2)\,2b\,tg^2\,\theta/2+\lambda\frac{\xi b}{d}+$$

$$+(\lambda+\mu)A]\,P_{L''}(0)-\frac{1}{2}[\mu P_\ell(0)+\tilde{\tilde\mu}P^{(2)}_\ell(0)]\frac{\xi b}{d}\}+r^{(эм)}\,\nu P^{(1)}_{L''}(0)B, \quad (35c)$$

где

$$\tilde{\tilde\mu} = \sqrt{\frac{3}{2[\ell-1][\ell][\ell+1][\ell+2]}}\ \frac{\begin{pmatrix}2 & \ell & L''\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}}{(2\ell L'')}\,[1+(-1)^{L''}]\,\mu,$$

$$\tilde{\tilde\nu} = 30(-1)^{L'+J'}\frac{[L'']}{\sqrt{L''(L''+1)}}\,[\ell]\,(1\ell L'')(\ell L L')\begin{Bmatrix}1 & L'' & L''\\ \ell & 1 & 2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L & J & 1\\ \ell & L'' & 2\\ L' & J' & 1\end{Bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde r}^{(M)} = r^{(M)}_{(J-J'+1)}.$$

Рассмотрим еще важный случай $\kappa=\kappa'\ (x=0)$ для полученных выражений (33)-(35). Это соответствует, например, рассеянию электрона на ядре, причем последнее переходит в возбужденное состояние. Формулы (33)-(35) примут более простой вид, так как условие $x=0$ существенно упрощает кинематику: $A=G=0$, $a=\xi$, $b=\eta$, $d=\xi\eta$, $F=\sqrt{\xi}\,tg^2\theta/2\,\sqrt{\eta+ctg^2\,\theta/2}$. Выражение (33а,в) для электрической части останется неизменным. В электромагнитной части (34 а,в,с) $C=0$. Магнитная же часть примет вид:

$$F^{(M)}_{L''}(\vec n_1) = \sum_{L,L',\ell} r^{(M)}(\lambda-\mu/2)[1+2\eta\,tg^2\,\theta/2], \quad (36a)$$

$$F^{(M)}_{L''}(\vec n_2) = F^{(M)}_{L''}(\vec n_1)\,P_{L''}(0)+\sum_{L,L',\ell} r^{(M)}\mu[P_\ell(0)+\frac{1}{2}P_{L''}(0)], \quad (36в)$$

$$F^{(M)}_{L''}(\vec n_3) = F^{(M)}_{L''}(\vec n_1)\,P_{L''}(0)+\frac{1}{2}\sum_{L,L',\ell}\mu[P_{L''}(0)-P_\ell(0)-\frac{1}{2}\tilde{\tilde\mu}P^{(2)}_\ell(0)]. \quad (36c)$$

Можно рассмотреть также в нашей технике некоторые важные случаи, которые уже были получены ранее разными авторами. Случай 1) $L''=0,\ j\neq j',\ \kappa\neq\kappa'$ приведен выше (25)-(27) /11,13/. Случаи 2) $L''=0$, $\kappa=\kappa'$, $j\neq j'$ и 3) $L''=0$, $\kappa\neq\kappa'$; $j\neq j'$ дают очевидные упрощения в формулах (33)-(35), и их можно не выписывать.

Приведем только наиболее важный случай упругого рассеяния: $L''=0$, $\kappa=\kappa'$, $j=j'$. При этом формфакторы действительны и их удобно переопределить так, чтобы они давали при $q^2=0$ значения соответствующих мультиполей /27/. При этом $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в (25) будут иметь вид:

$$\mathfrak{A} = f^2_{0,L} + \sum_{L\geq 1}^{2j} \left[\frac{q^L}{<jjJ0|j\ \ j>[J]!!}\right]^2 \{ f^2_{0,L} + \mathfrak{B} \} \tag{37}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2\pi}{3} \sum_{L\geq 1}^{2j} \left[\frac{q^L}{<jjJ0|j\ \ j>[J]!!}\right]^2 \{ f^2_{1,L,L} + q^2 \frac{[L]}{L[L+1]^2} f^2_{1,L+1,L} \}. \tag{38}$$

7. Корреляционные эффекты при нарушении T-инвариантности

Из выражения (33)-(35) видно, что при нечетных поляризациях ($L''=2n+1$) электромагнитная часть в отсутствие T-инвариантности нечетна при замене $\theta \longrightarrow -\theta$. Рассмотрим наиболее важный случай: $L''=1$, т.е. просто поляризованное состояние частиц мишени.

Легко убедиться, что при этом из единственного условия P-инвариантности $F^{(э)}_{L''=1} = F^{(м)}_{L''=1} = 0$. P - инвариантной, но T - неинвариантной будет лишь интерференционная часть:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(эм)}_{L''=1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{мотт} \frac{[j']}{[j]} T_1 \sum_L \frac{\left(4\xi+\frac{x}{4b}\right)^{1/4}}{\{[L]!!\}^2} \left[\frac{|\vec{j}'|^2}{|\vec{j}||\vec{L}|} - \right.$$

$$- \frac{|\vec{L}|}{|\vec{j}|} - \frac{|\vec{j}|}{|\vec{L}|} \Big] \Theta^{(+)}_{L+\omega} \Big\{ \frac{4\pi}{3} \frac{L+1}{\sqrt{[L+1][L-1]}} \mathrm{Re}\, \phi^{1,L+1,L} \overset{*}{\phi}{}^{0,L} -$$

$$\left. - \sqrt{\frac{L+1}{2L[L-1]}} \frac{x \mathrm{Re}\, \phi^{0,L} \mathrm{Im}\, \phi^{0,L}}{\sqrt{b(16\xi b + x^2)}} \right\} D. \tag{39}$$

При выводе формулы использована связь между формфакторами (5). Из вида выражения (39) следует, что проверку T-инвариантности электромагнитных взаимодействий адронов выгодно производить (а) при достаточно больших значениях, (б) при больших углах рассеяния электронов, (в) на частице (ядре) с аномально большим вкладом квадрупольного формфактора и (г) с малым спином.

Легко видеть, что при $x = 0$ остается лишь первый член в фигурных скобках (39) – интерференция между электрическими и магнитными моментами II рода (сравни с /14,15/). Для случая $j = j' = 1$ (упругое $e - d$ рассеяние) получим результат работы /10/ .

Замечания

В полученных выше сечениях при $\kappa = \kappa'$ можно перейти от случая рассеяния к случаю электромагнитного рождения пар (t -канал). Переход осуществляется следующим изменением кинематики: $\xi \to -\xi$ $\xi > 4\kappa^2$ $\eta = \xi - 1$,

$$\cos\phi = \sqrt{1 - 1/\eta\, \mathrm{tg}^2\theta/2}, \quad D = \sqrt{\xi/\eta}\, \mathrm{ctg}\,\phi ,$$

где ϕ – угол в с.ц.и.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{мотт}} \to \frac{a^2\sqrt{\eta}\,\sin^2\phi}{16\kappa^2\xi} . \qquad (40)$$

Из полученных в работе формул легко получить важные конкретные случаи переходов (NN^*), (NN^{**}) и для прочих резонансных переходов. При этом следует отметить, что непосредственное вычисление любого нетривиального $(j, j'. L'' \neq 0)$ частного случая не упрощает ни расчета, ни окончательных выражений.

Естественно, что все полученные результаты справедливы для случая рассеяния электронов на ядрах. Следует лишь помнить, что борновское приближение более точно для ядер с малым зарядом и при больших энергиях налетающего электрона.

Расходимость полученных сечений при $\theta = 0$ связана с пренебрежением массой электрона. Все выражения для сечений справедливы для случая рассеяния на адронах мюонов, однако, точность уменьшается из-за пренебрежения в кинематических частях массой мюона, что может быть особенно существенным при малых передаваемых импульсах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Правила отбора формфакторов по P – и T – инвариантности

Тип формфакторов \ P / T		P: +1, T: +1	P: +1, T: −1	P: −1, T: +1	P: −1, T: −1	Общее число формфакторов данного типа
$f_j^{0,L}$	j цел.	$j+1$	0	0	j	$2j+1$
	j полуцел.	$j+\frac{1}{2}$	0	0	$j+\frac{1}{2}$	$2j+1$
$f_j^{0,L,L}$	j цел.	j	0	0	j	$2j$
	j полуцел.	$j+\frac{1}{2}$	0	0	$j-\frac{1}{2}$	$2j$
$f_j^{0,L+1,L}$	j цел.	0	j	j	0	$2j$
	j полуцел.	0	$j-\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	0	$2j$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим 2L+1-мерное пространство векторов $\Psi_{\ell\ell'}^{LM}$:

$$\Psi_{\ell\ell'}^{LM} = \sum_{m,m'} \langle \ell m \ell' m' | LM \rangle \, Y_{\ell m}^{*}(\vec{n}) \, Y_{\ell' m'}^{*}(\vec{n}') , \tag{2а}$$

где $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ – произвольные единичные векторы

$$(\vec{n}\vec{n}') = \cos\theta = x \neq \pm 1 , \tag{2б}$$

а $Y_{\ell m}^{*}(\vec{n})$ –сферические гармоники, причем ℓ и ℓ' могут принимать любые значения. Докажем, что векторы $\Psi_{\ell\ell'}^{LM}$ при $L+1 \geq \ell+\ell' \geq L$ линейно независимы и образуют полную систему. Для доказательства линейной независимости этих векторов покажем, что система однородных уравнений

$$\sum_{\ell\ell'} a^{\ell\ell'} \Psi_{\ell\ell'}^{LM} = 0 ; \; L+1 \geq \ell+\ell' \geq L ; \; L \geq M \geq -L \tag{2в}$$

не имеет отличного от нуля решения, т.е. определитель Δ^{L} системы (2в) отличен от нуля. Для вычисления Δ^{L} выберем такую систему координат, в которой $\vec{n}'$ направлен по оси Z , а $\vec{n}$ лежит в плоскости ZX

$$\Delta^{L} = C(L)(\sin\theta)^{L(L+1)} \tag{2г}$$

$C(L)$ отличен от нуля при любом L. Из (2г) видно, что Δ^L не равен нулю при любом допустимом равенством (2б) значении θ. Очевидно, факт линейной независимости векторов $\Psi^{LM}_{\ell\ell'}(\vec{n},\vec{n}')$ не зависит от частного выбора системы координат. Полнота системы рассматриваемых векторов следует из их линейной независимости и из того, что их число равно размерности пространства.

Естественно, что в точках $\theta = 0, \pi$ Δ^L обращается в нуль, при этом $\vec{n} = \pm \vec{n}'$ и все $\Psi^{LM}_{\ell\ell'}$ становятся коллинеарными

$$\Psi^{LM}_{\ell\ell'} = (\ell_0 \ell'_0 L \quad) \sqrt{\frac{[L]}{4\pi}}\, Y_{LM}(\vec{n}). \tag{2д}$$

Литература

1. J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch and R.Turlay. Phys. Rev. Lett., 13, 138 (1964).
2. M.A.B. Beg, B.W. Lee, A. Pais. Phys. Rev. Lett., 13, 515 (1964).
3. G. Bernstein, G. Feinberg, T.D. Lee. Phys. Rev., 139, 1650 (1965).
4. Proc. of the Sienna Int. Conf. on Elemtary Partichles (1964) p. 22–27.
5. Proc. of the Int. Symp. on electron and interactions of high energies, Hamburg, (1965) p. 86– 97.
6. M.N. Rosenbluth. Phys. Rev., 79, 615 (1950).
7. M. Gourdin. Nuovo Cimento, 36, 129 (1965).
8. В.М. Дубовик. Ядерная физика, 2, 487 (1965).
9. T.A. Griffy, J.D. Walecka. Preprint ITP–137 (1964).
10. В.М. Дубовик, А.А. Чешков. ЖЭТФ, 51, 165 (1966).
11. M. Gourdin. Nuovo Cimehto, 37, 208 (1965).
12. J.D. Bjorken, J.D. Walecka. Preprint, ITP–187 (1965).
13. J, Micheli. Nuovo Cimento, 45, 312 (1966).
14. N. Christ, T.D. Lee. Preprint, Columbia (1965).
15. Л.А. Кондратюк. Препринт ИТЭФ (1966).
16. А.А. Чешков, Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 44, 1982 (1965).
17. В.М. Дубовик, А.А. Чешков. ЖЭТФ, 51, 1170 (1966).
18. I. Simon. Phys. Rev., 92, 1050 (1959).
19. А.М. Балдин, М.И. Широков. ЖЭТФ, 30, 784 (1956).
20. М.С. Маринов. Препринт ИТЭФ, № 394 (1965).

21. Л.Д. Пузиков. ЖЭТФ, 34, 947 (1958).

22. А.П. Юцис, И.Б. Левинсон, В.В. Ванагас . Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, 1961.

23. A.R. Edmonds. Preprint, CERN 55–26, Geneva.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 октября 1966 г.