Acta Phys. Polon., 1967,
v. 31, N5, p. 875-881

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 2957

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О.Г. Боков, Э. Михул, Б. Средниава

О распадах частиц в теории симметрии с некомпактными группами

1966

P2 - 2957

О.Г. Боков, Э. Михул, Б. Средниава

О распадах частиц в теории симметрии с некомпактными группами

Направлено в Acta Physica Polonica

1. В в е д е н и е

В последнее время в работах Будини и Фронсдаля[1], Фронсдаля[2,3], Рюла[4], Салама и др.[5], Нгуен Ван Хьеу[6,7], Дао Вонг Дыка и Нгуен Ван Хьеу[8,9] были рассмотрены симметрии элементарных частиц с применением некомпактных групп. Некомпактная группа G является полупрямым произведением группы Пуанкаре P и некомпактной группы внутренней симметрии S :

$$G = P \circledS S.$$

В данной теории частицы классифицируются по неприводимым унитарным (бесконечномерным) представлениям группы внутренней симметрии S . В качестве группы S могут быть выбраны группы $SL(6,C)$, $U(6,\sigma)$ и т.п.[x)]. Появляется принципиальная возможность вычислить матричные элементы процессов в теории, сохраняющей унитарность. Однако вопрос о технике вычислений является нетривиальным, поскольку используемые группы некомпактны.

Попытки проведения подобных вычислений были сделаны некоторыми авторами. В частности, в работе Биссиаччи и Фронсдаля[10] получены коэффициенты векторного сложения для группы $SL(2,C)$ при определенных ограничениях на параметры, определяющие неприводимые представления группы.

В настоящей работе предложен другой метод вычисления коэффициентов векторного сложения для группы $SL(2,C)$ без каких-либо ограничений на параметры неприводимых унитарных бесконечномерных представлений. Используя матричные элементы перехода от нефизического базиса к физическому базису малой группы $SL(2,C)_p$, полученные в работе Дао Вонг Дыка и Нгуен Ван Хьеу[9], мы находим с точностью до некоторой скалярной функции выражение для матричных элементов процессов распадов. В последнем пункте настоящей работы в качестве приложения

[x)] В работе[7] показана возможность ввести унитарную S-матрицу в теории с бесконечными мультиплетами.

рассмотрен случай распада частицы со спином 1 на две бесспиновые частицы.

Вычисляя более высокие порядки по энергии, чем в работе [10], мы убеждаемся, что распад $\rho \to 2\pi$ не запрещен.

Метод настоящей работы может быть использован для изучения любой вершины, в которую входят частицы, соответствующие неприводимым представлениям группы $SL(2,C)$ как для основной, так и для дополнительной серии. Настоящий метод можно применить для любой группы $SL(n,C)$, мы используем группу $SL(2,C)$ как модель для демонстрации метода.

2. Коэффициенты векторного сложения для группы SL(2,C)

Обозначим параметры ν, ρ, характеризующие неприводимые унитарные представления группы $SL(2,C)$, через α. Для основной серии ν -неотрицательное целое или полуцелое, ρ -действительное, для дополнительной серии $\nu = 0$, $-1 \leq i\rho \leq 0$, т.е. теперь ρ-мнимое. Векторный базис неприводимого унитарного представления группы $SL(2,C)$ будем обозначать через $|\alpha j m\rangle$, где j - характеризует конечномерные неприводимые представления максимальной компактной подгруппы группы $SL(2,C)$. Этот базис будем называть каноническим базисом.

Для того, чтобы найти коэффициенты векторного сложения, необходимо построить инвариант группы. Напишем прежде формальное выражение для инварианта в случае трех векторов состояния в группе $SU(2)$:

$$I = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |\alpha_1 j_1 m_1\rangle |\alpha_2 j_2 m_2\rangle |\alpha_3 j_3 m_3\rangle, \qquad (1)$$

где $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}_{m_1+m_2+m_3=0}$ - 3j-символы Вигнера. Инвариант группы $SL(2,C)$ получается умножением (1) на коэффициент векторного сложения $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix}$ и суммированием по j_1, j_2, j_3:

$$J = \sum_{j_1, j_2, j_3} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \qquad (2)$$

$$\cdot |\alpha_1 j_1 m_1\rangle |\alpha_2 j_2 m_2\rangle |\alpha_3 j_3 m_3\rangle.$$

Из определения инварианта группы для любого генератора X_i данной группы имеем:

$$X_i J = 0.$$

Естественно, что для компактных генераторов H_i группы $SL(2,C)$ это условие выполняется. Поскольку некомпактные генераторы $F_\pm$ выражаются через коммутаторы $[H_\pm, F_3]$, нам достаточно использовать только условие

$$F_3 J = 0, \qquad (3)$$

где по определению оператор F_3 действует следующим образом (см. книгу Наймарка [11])

$$F_3 |\alpha j m\rangle = C^\alpha_m (j, j-1) |\alpha, j-1, m\rangle +$$

$$+ C^\alpha_m (j,j) |\alpha j m\rangle + C^\alpha_m (j, j+1) |\alpha, j+1, m\rangle. \qquad (4)$$

В применении к (2) F_3 означает сумму:

$$F_3 = F_3^{(1)} + F_3^{(2)} + F_3^{(3)}, \qquad (4')$$

где $F_3^{(i)}$ действуют в пространстве векторов $|\alpha_i j_i m_i\rangle$.

Используя (4) и (4'), получим из уравнения (3) следующую рекуррентную формулу для коэффициентов векторного сложения:

$$C^{\alpha_1}_{m_1}(j_1+1, j_1) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1+1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1+1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_1}_{m_1}(j_1, j_1) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_1}_{m_1}(j_1-1, j_1) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1-1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1-1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_2}_{m_2}(j_2+1, j_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2+1 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2+1 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_2}_{m_2}(j_2, j_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_2}_{m_2}(j_2-1, j_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2-1 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2-1 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_3}_{m_3}(j_3+1, j_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3+1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3+1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ C^{\alpha_3}_{m_3}(j_3, j_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} +$$

$$+\, C^{\alpha_3}_{m_3}(j_3-1, j_3)\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3-1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3-1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$C^{\alpha}_{m}(j-1, j) = \sqrt{j^2 - m^2}\; C_j\,,$$

$$C^{\alpha}_{m}(j+1, j) = -\sqrt{(j+1)^2 - m^2}\; C_{j+1}\,,$$

$$C^{\alpha}_{m}(j, j) = -m A_j\,, \tag{6}$$

$$A_j = \frac{\nu\rho}{j(j+1)}\,, \qquad C_j = \frac{i}{j}\sqrt{\frac{(j^2-\nu^2)(j^2+\rho^2)}{4j^2-1}}\,.$$

Из соотношения (5) мы можем принципиально получить явное выражение для любого коэффициента векторного сложения $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix}$. Ввиду громоздкости вычислений приведем только некоторые коэффициенты для низших значений j_i. Отметим, что из условия нормировки следует, что коэффициент $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ ½ & ½ & 0 \end{bmatrix}$ можно считать равным 1.

$$\Delta_i(j) = \sqrt{(j^2-\nu_i^2)(j^2+\rho_i^2)}\,; \qquad [\,j_1\, j_2\, j_3\,] \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix}$$

$$[\,0\,1\,1\,] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{[\Delta_1(1)]^2 - [\Delta_2(1)]^2 - [\Delta_3(1)]^2}{\Delta_2(1)\,\Delta_3(1)}$$

$$[\,1\,0\,1\,] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{[\Delta_2(1)]^2 - [\Delta_3(1)]^2 - [\Delta_1(1)]^2}{\Delta_3(1)\,\Delta_1(1)}$$

$$[\,1\,1\,0\,] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{[\Delta_3(1)]^2 - [\Delta_1(1)]^2 - [\Delta_2(1)]^2}{\Delta_1(1)\,\Delta_2(1)}$$

$$[\,1\,1\,1\,] = \frac{i}{2\sqrt{2}}\Big\{\frac{\rho_2\nu_2-\rho_3\nu_3}{\Delta_2(1)\Delta_3(1)}\Delta_1(1) + \frac{\rho_3\nu_3-\rho_1\nu_1}{\Delta_3(1)\Delta_1(1)}\Delta_2(1) + \frac{\rho_1\nu_1-\rho_2\nu_2}{\Delta_1(1)\Delta_2(1)}\Delta_3(1)\Big\}$$

$$[\,2\,1\,1\,] = \Big\{-\frac{i\sqrt{3}}{2}(\nu_2\rho_2-\nu_3\rho_3)[\,1\,1\,1\,] + \frac{3}{2\sqrt{2}}\big[\Delta_2(1)[\,1\,0\,1\,] + \Delta_3(1)[\,1\,1\,0\,] - \frac{1}{3}\Delta_1(1)[\,0\,1\,1\,]\big]\Big\}\frac{1}{\Delta_1(2)}\,;$$

$$[\,1\,2\,1\,] = \Big\{-\frac{i\sqrt{3}}{2}(\nu_3\rho_3-\nu_1\rho_1)[\,1\,1\,1\,] + \frac{3}{2\sqrt{2}}\big[\Delta_3(1)[\,1\,1\,0\,] + \Delta_1(1)[\,0\,1\,1\,] - \frac{1}{3}\Delta_2(1)[\,1\,0\,1\,]\big]\Big\}\frac{1}{\Delta_2(2)}\,;$$

$$[\,1\,1\,2\,] = \Big\{-\frac{i\sqrt{3}}{2}(\nu_1\rho_1-\nu_2\rho_2)[\,1\,1\,1\,] + \frac{3}{2\sqrt{2}}\big[\Delta_1(1)[\,0\,1\,1\,] + \Delta_2(1)[\,1\,0\,1\,] - \frac{1}{3}\Delta_3(1)[\,1\,1\,0\,]\big]\Big\}\frac{1}{\Delta_3(2)}\,;$$

$$[\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,1\,] = \frac{i}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\nu_2\rho_2-\nu_1\rho_1)}{\Delta_3(1)}[\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0\,].$$

3. Матричный элемент распадов

Применим полученные результаты к изучению распадов частиц из бесконечных мультиплетов группы $SL(2,C)$. Мы показали, что базисные векторы неприводимых унитарных представлений группы S могут быть представлены как $|\alpha j m\rangle$. Поскольку полная группа симметрии G есть полупрямое произведение группы Пуанкаре P и группы внутренней симметрии S, вектор состояния частицы можно представить в виде /7/:

$$|ps, \alpha j m\rangle = |ps\rangle \times |\alpha j m\rangle.$$

Настоящий базис, названный в /7/ каноническим, является нефизическим базисом. Перейдем в систему покоя с помощью преобразования Лоренца $\lambda_{p\leftarrow\hat{p}}$

$$|ps, \alpha j m\rangle = U(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\hat{p}s, \alpha j m\rangle = U^{P}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\hat{p}s\rangle \times U^{s}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\alpha j m\rangle.$$

Векторы в правой части этого уравнения обозначим через $|ps, \alpha\tilde{\tilde{j}}\tilde{\tilde{m}}\rangle$. Будем рассматривать только случай $s=0$. Тогда физический базис выражается через векторы $|p, \alpha j m\rangle$ следующим образом:

$$|p, \alpha\tilde{\tilde{j}}\tilde{\tilde{m}}\rangle = D^{\alpha}_{jm, j'm'}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|p, \alpha j'm'\rangle.$$

Поскольку векторы состояния $|p, \alpha\tilde{\tilde{j}}\tilde{\tilde{m}}\rangle$ имеют вид описанного выше прямого произведения, имеем окончательно:

$$|\alpha\tilde{\tilde{j}}\tilde{\tilde{m}}\rangle = D^{\alpha}_{jm, j'm'}(\lambda_{p\leftarrow\hat{p}})|\alpha j'm'\rangle. \tag{7}$$

Коэффициенты $D^{\alpha}_{jm, j'm'}$ были получены в работе Дао Вонг Дыка и Нгуен Ван Хьеу /9/ и имеют следующий вид:

$$D^{\nu\rho}_{jm, j'm'}(\epsilon) = \frac{\delta_{mm'}}{(j+j'+1)}\{(2j+1)(2j'+1)(j+m)!$$

$$\cdot (j-m)!(j+\nu)!(j-\nu)!(j'+m)!(j'-m)!(j'+\nu)!(j'-\nu)!\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot \sum_{d,d'} (-1)^{d+d'} \cdot \frac{(d+d'+m+\nu)!(j+j'-d-d'-m-\nu)!}{d!\,d'!(j-m-d)!(j'-m-d')!(\nu+m+d)!(\nu+m+d')!(j-\nu-d)!(j'-\nu-d')!} \cdot \tag{8}$$

$$\cdot \epsilon^{2(2d'+m+\nu+1+\frac{i\rho}{2})} \cdot F(j'+1+\frac{i\rho}{2},\, d+d'+m+\nu+1;\, j+j'+2;\, 1-\epsilon^4).$$

Учитывая вышесказанное , запишем матричный элемент распада частицы на две других, входящих в бесконечный мультиплет группы G , в следующем виде:

$$\langle q_1\nu_1\rho_1 j_1 m_1;\, q_2\nu_2\rho_2 j_2 m_2 | T | \hat{p}\nu_3\rho_3 j_3 m_3\rangle =$$

$$= \sum_{j',j''} \sum_{m',m''} D^{\nu_1\rho_1}_{j_1 m_1, j' m'}(q_1)\, D^{\nu_2\rho_2}_{j_2 m_2, j'' m''}(q_2)\,\cdot \tag{9}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} (\nu_1\rho_1) & (\nu_2\rho_2) & (\nu_3\rho_3) \\ j' & j'' & j_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j' & j'' & j_3 \\ m' & m'' & m_3 \end{pmatrix} F(s,t).$$

Рассмотрим в качестве примера распад частицы со спином 1 на две одинаковые частицы со спином 0. Обозначим через I_0 вклад в матричный элемент при $\nu_3=0$, а через I_1 – вклад при $\nu_3 = 1$. Тогда имеем:

$$I_0 = D^{0\rho_1}_{00,00}\, D^{0\rho_1}_{00,00} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ D^{0\rho_1}_{00,10}\, D^{0\rho_1}_{00,00} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ D^{0\rho_1}_{00,20}\, D^{0\rho_1}_{00,00} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ D^{0\rho_1}_{00,00}\, D^{0\rho_1}_{00,10} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tag{10}$$

$$+ D^{0\rho_1}_{00,00}\, D^{0\rho_1}_{00,20} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

+ члены более высокого порядка по j , которые мы рассматривать не будем. I_1 получается из I_0 заменой значения $\nu_3 = 0$ на $\nu_3 = 1$.

Производя вычисления в (10), получим:

$$I_0 = \left(\frac{1+\rho_3^2}{1+\rho_1^2}\right) \Big[\epsilon^{4(1-\frac{i\rho_1}{2})} F(2+\frac{i\rho_1}{2},\, 1;\, 3;\, 1-\epsilon^4)\,\cdot$$

$$\cdot F(1+\frac{i\rho_1}{2},\, 1;\, 2;\, 1-\epsilon^4) +$$

$$+ \epsilon^{2(3-\frac{i\rho_1}{2})} F(2+\frac{i\rho_1}{2},\, 2;\, 3;\, 1-\epsilon^4) \cdot F(1+\frac{i\rho_1}{2},\, 1;\, 2;\, 1-\epsilon^4)\Big] + \ldots \tag{11}$$

$$I_1 = 0.$$

4. Заключение

Полученная в п. 2 рекуррентная формула (5) позволяет с помощью простых алгебраических выкладок вычислить точно любой коэффициент векторного сложения для группы $SL(2,C)$. Единственное неудобство заключается в громоздкости этих расчетов.

Функции D (см. (8)) , которые были использованы в п. 3 при построении матричного элемента, аналитически выражаются через гипергеометрические функции. Однако ряд в (9) плохо сходится при любых энергиях ϵ . Поэтому, для того чтобы рассматриваемая теория была применима к исследованию физических процессов, необходимо рассматривать только те процессы, в которых выделяемая энергия мала. Однако те же самые условия необходимы для выполнения точной симметрии. Поэтому мы и ограничились в выражении (11) первыми двумя членами.

Отметим, что если бы мы использовали в качестве группы внутренней симметрии группу $SU(2)$,распад $\rho \to 2\pi$ был бы запрещен. Однако мы использовали в качестве группы симметрии малую группу $SU(2)_p$, поэтому распад $\rho \to 2\pi$ разрешен. Это означает, что группа $SU(2)_p$ учитывает орбитальный момент.

Авторы выражают благодарность Нгуен Ван Хьеу за полезные обсуждения.

Литература

1. P. Budini, C. Fronsdal. Phys. Rev. Lett. 14, 968 (1965).
2. C. Fronsdal. Proceedings of the Seminar on High-Energy Physics and Elementary Particles, Trieste 1965. IAEA, Vienna 1965
3. C. Fronsdal. UCLA preprint 1966.
4. W. Ruhl. CERN preprints (1966).
5. A. Salam, J. Strathdee, preprint IC/6615
6. Nguyen van Hieu, Lectures, Jalta 1966.
7. Nguyen van Hieu, preprint F.T. - 62, Bucharest 1966.
8. Dao Wong Duc, Nguyen van Hieu, Dubna preprint P-2777, 1966.
9. Dao Wong Duc, Nguyen van Hieu, Dubna preprint P-2886, 1966.
10. G. Bisiacchi, C. Fronsdal. Nuovo Cimento, XLI, 35 (1966).
11. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, Москва 1958, Гл. III

(French transtation: M.A. Namak, Les Representations Lineaives du Grouppe de Lorentz, Paris 1962), Ch. III.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1966 г.