ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 2949

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ю.Н. Тюхтяев, Р.Н. Фаустов

# ВЫСШИЕ ПОПРАВКИ К РАСЩЕПЛЕНИЮ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ПОЗИТРОНИЯ. I

1966

Р2 - 2949

Ю.Н. Тюхтяев, Р.Н. Фаустов

# ВЫСШИЕ ПОПРАВКИ К РАСЩЕПЛЕНИЮ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ПОЗИТРОНИЯ. I

Направлено в ЖЭТФ

В последнее время квазипотенциальный метод, развитый в работе [1], был успешно применен к расчету связанных состояний квантовомеханических систем двух заряженных частиц [2,3].

Как хорошо известно, при вычислениях сверхтонкого сдвига в атоме водорода учитывались диаграммы высокого порядка относительно постоянной тонкой структуры $\alpha$ и величины $\frac{m_e}{m_p}$, характеризующей эффекты отдачи ( $m_e$ и $m_p$ массы электрона и протона соответственно).

Однако существенная неопределенность поправок, связанных с конечностью массы и структурой протона, не дает возможности однозначного сравнения теории и эксперимента [4]. Интересно было бы поэтому обратиться к высшим порядкам расщепления основного состояния позитрония, поскольку он представляет собой чисто электродинамическую систему.

Подобные вычисления дали бы возможность проверить методы теории возмущения с высокой степенью точности.

Известно также, что в ближайшем будущем предполагается поставить эксперимент по более надежному определению величины расщепления триплетного и синглетного уровней позитрония [5]. С точностью до $\alpha^5$ включительно сдвиг вычислен в работах [6,2]. Вклад в энергетические поправки с точностью до $\alpha^6$ вносят как диаграммы 6-го, так и диаграммы низших порядков.

Как станет ясно из последующего, работа с диаграммами 6-го порядка существенно облегчается простотой употребляемой при этом волновой функции. В настоящей статье мы обратимся к вычислению вкладов от диаграмм 2-го и 4-го порядков в расщепление основного состояния позитрония с точностью до 6-го порядка по $\alpha$ включительно.

В рассматриваемом случае квазипотенциальное уравнение имеет вид:

$$(E^2-4p^2-4m^2)\psi(p)=\frac{4\sqrt{p^2+m^2}}{(2\pi)^3}\int V(\vec{p},\vec{q})\,\psi(\vec{q})\,d\vec{q}\,. \qquad (1)$$

Потенциал $V(\vec{p},\vec{q})$ строится итерационным методом на основе диаграмм теории возмущения[1,3]. Энергетические поправки с точностью до $\alpha^6$ определяются выражением:

$$\Delta E_{\text{полн.}} = \langle \Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)} \rangle + \langle V^{(4)} \rangle + \langle (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) F (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) \rangle +$$

$$+ \langle V^{(6)} \rangle + \langle (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) F V^{(4)} \rangle + \langle V_d^{(4)} F (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) \rangle +$$

$$+ \langle (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) F (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) F (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) \rangle . \qquad (2)$$

Здесь $V_d^{(2)}$ и $V_e^{(2)}$ – вклады в потенциал $V(\vec{p},\vec{q})$ от прямой и обменной полюсных диаграмм второго порядка соответственно, $V^{(4)}$ и $V^{(6)}$ – аналогичные вклады от диаграмм 4-го и 6-го порядков.

$$\Delta V_d^{(2)} = V_d^{(2)} - \mho , \qquad (3)$$

где $\mho$ – кулоновский потенциал.

$$F = \frac{4\sqrt{p^2 + m^2}}{(2\pi)^3 (E - 4p^2 - 4m^2)} \qquad (4)$$

Символ $\langle ::: \rangle$ означает матричный элемент по волновым функциям уравнения (1) с кулоновским потенциалом.

Как уже говорилось выше, мы займемся вычислением величины:

$$\Delta E = \langle \Delta V \rangle = \langle \Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)} \rangle + \langle V^{(4)} \rangle +$$

$$+ \langle (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) F (\Delta V_d^{(2)} + V_e^{(2)}) \rangle =$$

$$= \langle \Delta V_d^{(2)} \rangle + \langle T_d^{(4)} \rangle - \langle \mho F \Delta V_d^{(2)} \rangle - \langle \Delta V_d^{(2)} F \mho \rangle - \langle \mho F \mho \rangle$$

$$+ \langle V_e^{(2)} \rangle + \langle T_e^{(4)} \rangle - \langle \mho F V_e^{(2)} \rangle - \langle V_e^{(2)} F \mho \rangle \qquad (5)$$

$T(\vec{p},\vec{q})$ – матрица перехода от соответствующих фейнмановских диаграмм.

Подробная запись равенства (5) дает следующее выражение для вычисления энергетических сдвигов:

$$\Delta E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*(\vec{p}) \Delta V(\vec{p},\vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q} . \qquad (6)$$

Применение формулы (6) к расчету простейшей прямой диаграммы 2-го порядка показывает, что она в совокупности с членами типа $\langle \mho F \Delta V_d^{(2)} \rangle$ не дает вклада в сверхтонкий сдвиг позитрония 6-го порядка по $\alpha$ .

Вклад от обменной полюсной диаграммы легко учесть, используя выражение для энергии основного уровня позитрония.

$$E = 2m - \frac{\alpha^2 m}{4}. \tag{7}$$

После разложения по $\alpha$ выражения для $\Delta E_e$ имеем:

$$\Delta E_e = \frac{\pi\alpha}{m^2} |\psi_0^r(0)|^2 < s^2 > (1 + \frac{\alpha^2}{4}), \tag{8}$$

где $\psi_0^r(0)$ – кулоновская волновая функция в $r$ – пространстве при $r = 0$. Обменная диаграмма, описывающая вклад от эффекта поляризации вакуума, на этот раз влияния на сдвиг синглета относительно триплета не оказывает. Это следует из ее выражения /2/:

$$T_h(\vec{p},\vec{q}) = \frac{e^2[d(E^2)-1]}{E^2} [\bar{u}_1^+(\vec{p})\gamma^\mu C\bar{u}_2^+(-\vec{p})][u_2^-(-\vec{q})C^+\gamma^\mu u_1^-(\vec{q})]. \tag{9}$$

Здесь происходит разложение по величине, пропорциональной $\alpha^2$ и следующий член имеет порядок $\alpha^7$.

Матричные элементы типа $<\mho F V_e^{(2)}>$ из выражения (5) в совокупности с соответствующими членами выражения $< V_e^{(2)}>$ также не дают вклада в рассматриваемый порядок по $\alpha$. Вычисления вкладов от остальных диаграмм 4-го порядка (см. рис.1) с помощью формулы (6) приводят к выражениям, содержащим некоторую $f$ –функцию, свойства которой перечислены в /7/. Там же она с большой точностью протабулирована.

При расчете вклада от диаграмм на рис. 1 мы, как и прежде /8/, использовали приближенную функцию в виде:

$$\psi_0(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} \psi_0^r(0)[\delta(\vec{p}) + \frac{\alpha m}{2\pi^2 p^4}], \tag{10}$$

где

$$\psi_0^r(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{\alpha m}{2})^{3/2}.$$

Используя функцию (10) в интегралах типа (6), мы, строго говоря, имеем особенность в точке $p = 0$. Однако это происходит из разложения $\psi_0(\vec{p})$ по $\alpha$. При использовании точной кулоновской функции получались бы члены, обратно пропорциональные $\alpha$, которые давали бы вклад в низшие порядки расщепления основного уровня. Учитывая сказанное, сумму вычисленных энергетических поправок 6-го порядка представим выражением:

$$\Delta E^{(6)} = \frac{\alpha^3\pi}{m^2} |\psi_0^r(0)|^2 < s^2 > [a_e + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 +] a_6]. \tag{11}$$

Индекс $e$ соответствует обменной диаграмме 2-го порядка, а индексы 1–6 – порядковому номеру диаграммы рис. 1.

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{20}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = -1,$$

$$a_4 = \frac{31}{6}, \quad a_5 = -\frac{1}{2} - 1, \quad a_6 = -1{,}088. \tag{12}$$

Подставим (12) в (11) , получим окончательно:

$$\Delta E^{(6)} = \frac{\alpha^3 \pi}{m^2} \, |\psi_c^r(0)|^2 < s^2 > \cdot \, 9,662. \tag{13}$$

Для удобства последующих сравнений с экспериментом мы введем величину $\Delta W_{th}$, характеризующую расщепление основного состояния позитрония:

$$\Delta W_{th}^{(6)} = E(1^3S_1) - E(1^1S_0) = 45 \text{ Мгц}. \tag{14}$$

Теоретически найденное значение для расщепления основного уровня с точностью до $\alpha^5$ равно[2,6]:

$$\Delta W_{th} = \frac{\alpha^4 m}{2} \cdot \left[\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{16}{9} + \ln 2\right)\right] = 2{,}0337 \cdot 10^5 \tag{15}$$

и согласуется с соответствующим экспериментальным значением[9]

$$\Delta W_{exp} = (2{,}0336 \pm 0{,}0002) \cdot 10^5 \text{ Мгц}. \tag{16}$$

Вычисленная величина сверхтонкого расщепления основного состояния (14) выходит за пределы ошибки. Но, как уже говорилось выше, нами учтены поправки лишь от диаграмм второго и четвертого порядков. Вклад от диаграмм шестого порядка будет рассмотрен в последующей работе.

Как известно[2,6], мнимая часть сдвига уровней энергии позитрония, соответствующая диаграммам 5 (рис. 1), характеризует вероятность распада парапозитрония ($s=0$) на два фотона. На основании (12) вклад шестого порядка в мнимую часть равен[2]:

$$\operatorname{Im}\Delta E^{(6)} = -\frac{\alpha^3 \pi}{m^2} \, |\psi_c^r(0)|^2 < s^2 - 2 >. \tag{17}$$

Подставляя сюда значение $\psi_c^r(0)$ из равенства (10) и полагая $< s^2 > = 0$, получим поправку к вероятности распада позитрония на два фотона

$$\Delta w_{2\gamma} = -2 \operatorname{Im}\Delta E^{(6)} = -\frac{\alpha^6 m}{2}. \tag{18}$$

Авторы благодарны А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе и О.А. Хрусталеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

## Литература


1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. Р.Н. Фаустов. Труды Международной зимней школы теоретической физики ОИЯИ, том 2, стр. 108. Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна 1964.
3. R.N.Faustov. Nuclear Physics, 75, 669 (1966).
4. C.K.Iddings. Phys. Rev., 138, B446(1965).
5. V.W.Hughes. Nucleon Structure Stanford University Press , p.235 (1964).
6. R.Karplus, A.Klein. Phys. Rev., 87, 848 (1952).
7. K. Mitchell, Phil. Mag., 40, 351 (1949).
8. Ю.Н. Тюхтяев, Р.Н. Фаустов. Ядерная физика, 2, 882 (1965).
9. V.W.Hughes, S.Marder, S.C. Wu, Phys. Rev., 106, 934 (1957).



Рукопись поступила в издательский отдел
26 сентября 1966 г.

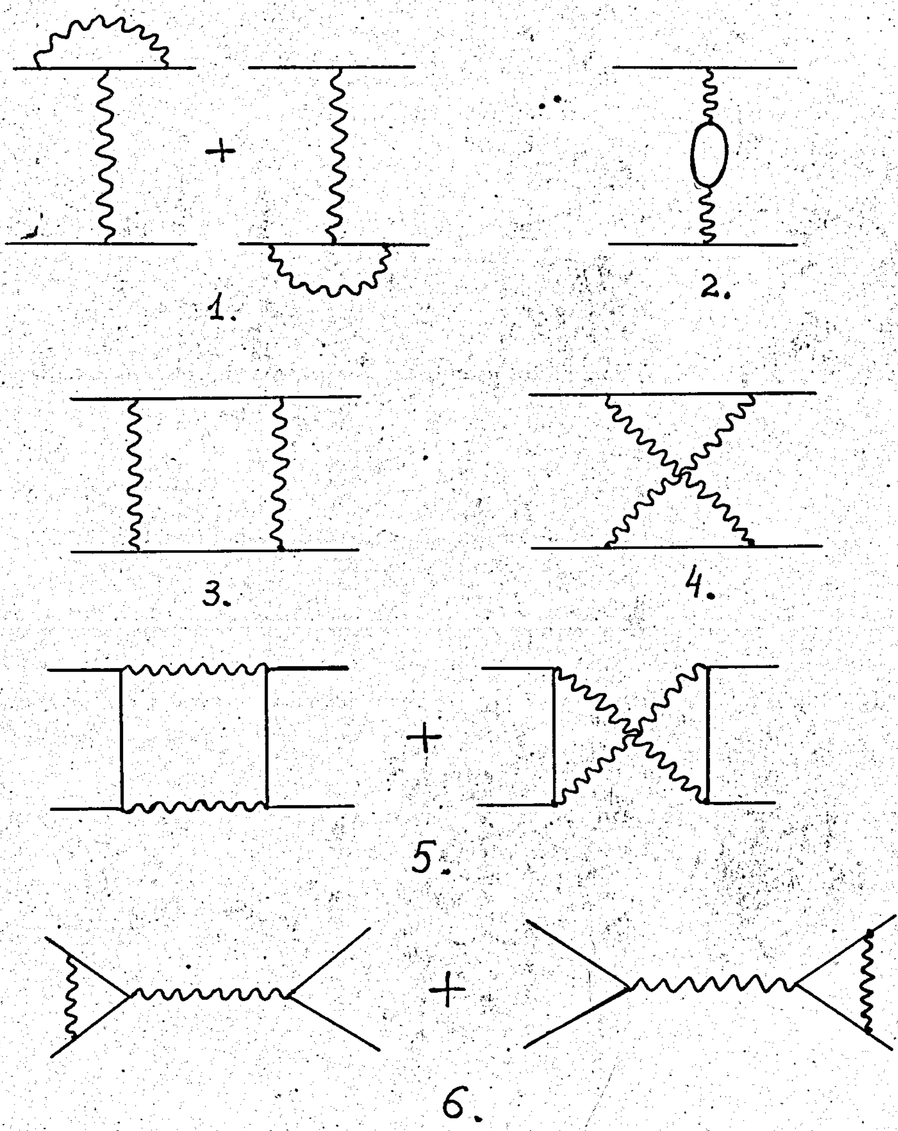


Рис. 1