

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

44092
02-01

P2-2002-1

Т. Л. Бояджиев, П. П. Физиев*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР С МАССИВНЫМ ДИЛАТОНОМ

*Софийский университет, Болгария

1 Введение

Являясь естественным продуктом сильной нелинейности современных теорий гравитации, черные дыры (ЧД) представляют собой большой вызов еще со времени их открытия в рамках общей теории относительности (ОТО) [1]. До сих пор ЧД не поддаются прямому экспериментальному изучению, и пока нет бесспорного примера наблюдаемой ЧД.

Современные теории фундаментальных взаимодействий, такие как теории пространства - времени с кручением, дилатонная гравитация, электродинамика Борна-Инфельда, супергравитация, суперструны, супермембраны и М-теория, обогатили многократно множество различных решений типа ЧД, хотя сами эти модели пока не приобрели окончательной формы и не имеют статуса феноменологически обоснованных физических теорий.

С физической точки зрения ЧД можно разделить на два основных класса:

1. Макроскопические ЧД, масса которых должна находиться в интервале от массы Чандрасекара $\sim 3M_{\odot}$ до массы $\sim 10^6 - 10^{11}M_{\odot}$, т.е. порядка массы Галактики.
2. Микроскопические ЧД, масса которых порядка массы элементарных частиц Стандартной модели.

Если на сегодняшний день имеются некоторые указания на то, что макроскопические ЧД могут находиться в активных ядрах галактик, в том числе и в ядре нашей Галактики, в квазарах, а также в системах рентгеновских парных звезд [2], то у нас пока нет никаких феноменологических указаний на существование микроскопических ЧД. Основной причиной этого до недавнего времени считалось то обстоятельство, что в пространстве-времени четырех размерностей такая ЧД представляет нелинейное образование размером немного больше планковской длины $\sim 10^{-33}$ см, т.е. она вне пределов достижимости экспериментов даже в весьма отдаленном будущем.

В последние годы ситуация в этом плане несколько изменилась: разные, пока чисто теоретические модели в рамках суперструн и супермембран сумели существенно увеличить ожидаемый размер возможных ЧД за счёт использования (пока что не наблюдаемых) высших размерностей пространства-времени. Поэтому сейчас обсуждаются возможности обнаружения микроскопических ЧД на будущих ускорителях типа LHC, VLHC, NLC при энергиях несколько ТэВ (см., например, [3, 4] и цитируемую там литературу), а также рождения таких ЧД в космических лучах (см., например, [5]). Это делает актуальной задачу более детального изучения структуры ЧД в сложных современных нелинейных теориях с многими взаимодействующими полями в псевклидовом пространстве-времени четырех и более размерностей.

Характерной новой особенностью ЧД в таких теориях, даже с одним дополнительным скалярным полем, является принципиальная возможность появления нескольких горизонтов разных типов с разной структурой пространства-времени между ними [6] — [8].

ЧД с тремя горизонтами возникают даже в простейших обобщениях ОТО, таких как ОТО с космологической константой [9], где впервые возникла необходимость обобщить соответствующим образом понятие горизонта событий и рассмотреть модели пространства-времени сложной причинно-следственной структуры. Возможность наличия трех горизонтов у ЧД была обнаружена ранее также в моделях пространства-времени с кручением [10].

Широкие классы ЧД с многими горизонтами существуют в разных моделях дилатонной гравитации, см. [11] и многочисленные ссылки там.

ЧД с двумя горизонтами событий были получены численно в теории Эйнштейна-Максвелла с безмассовым дилатоном [12, 13]. Там же было высказано предположение, что при наличии массивного дилатона в таких моделях также возможны ЧД с тремя горизонтами, что было численно продемонстрировано в [14] в рамках модели Эйнштейна-Борна-Инфельда с массивным дилатоном.

Широко известно, что “обычные” ЧД в ОТО испаряются вследствие квантового рождения частиц их сильным гравитационным полем. Это явление было открыто Хокингом и послужило началом бурного развития квантовой теории ЧД. Хокингом было замечено также [15], что для “экзотических” ЧД с многими горизонтами может иметь место обратное испарению явление. Простым примером является почти вырожденная ЧД Нараи [16]. Поэтому ЧД с многими горизонтами представляют особый интерес для квантовой теории и изучались многими авторами (см. ссылки в работе [11]).

Общей чертой всех моделей ЧД с несколькими горизонтами является сильная нелинейность, которая делает, как правило, невозможным получение точных аналитических результатов. В этих условиях становится особенно актуальной задача построения адекватных численных методов нахождения решений для ЧД с несколькими горизонтами. Отталкиваясь от наших предыдущих исследований [14], здесь мы предлагаем и применяем такой метод на примере ЧД в теории Эйнштейна-Борна-Инфельда с массивным дилатоном. Эта модель является удобным полигоном для развития численных методов, которые впоследствии можно будет применить и в других теориях. В настоящей работе, которая является расширением [14], изложены постановка и численные алгоритмы решения упомянутой выше задачи. Показано, что корректная постановка краевой задачи для уравнений ЧД (а следовательно, и эффективность метода решения) существенно определяется числом и видом горизонтов.

Для решения нелинейных краевых задач ЧД мы используем итерационные методы, базирующиеся на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) [17] в сочетании с методом сплайн-коллокации для решения возникающих линейаризованных

задач. По сравнению с методами, основанными на решении задачи Коши (см., например, [13]), такой подход имеет определенные преимущества.

2 Постановка задачи

В безразмерной форме уравнения ЧД записываются в виде (обозначения ниже аналогичны использованным в работе [14])

$$-f' + F(r, f, \varphi, \varphi') = 0, \quad (1a)$$

$$-f \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) + \Phi(r, \varphi, \varphi') = 0. \quad (1b)$$

Здесь $f(r)$ — функция, входящая в метрику пространства-времени

$$ds^2 = -f(r)e^{2\delta(r)}dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega,$$

$\varphi(r)$ — дилатонное поле. Радиальная координата $r \in [R_l, \infty)$, где постоянная $R_l > 0$, а “правые части” F и Φ задаются при помощи выражений

$$F \equiv \frac{1-f}{r} + 2 \exp\{2\alpha\varphi\} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r} - r\gamma^2 V(\varphi) - r f \varphi'^2,$$

$$\Phi \equiv \left[r\gamma^2 V(\varphi) - \frac{1}{r} - 2 \exp\{2\alpha\varphi\} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r} \right] \varphi' + \frac{\gamma^2}{2} V'(\varphi) - 2\alpha \exp\{2\alpha\varphi\} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r^2}.$$

В этих выражениях параметр q соответствует электрическому заряду ЧД, а γ^2 есть масса дилатона, $V(\varphi)$ — потенциал дилатонного поля. Выбор знака коэффициента связи $\alpha = \pm 1$ определяет знак дилатонного поля: при $\alpha = -1$ решение $\varphi(r) \geq 0$, при $\alpha = 1$ решение $\varphi(r) \leq 0$. Случай $\gamma = 0$ соответствует ЧД с безмассовым дилатоном, исследованной в работах [18, 19]. Отметим, что в работе [14] уравнения (1) записаны в несколько иной форме путем введения дополнительной переменной $m(r) = r(1 - f(r))/2$ (локальная масса).

Если известно некоторое решение $\varphi(r)$ задачи (1), то для метрической функции $\delta(r)$ решается задача Коши

$$\delta' + r\varphi'^2 = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r) = 0. \quad (2)$$

Как обычно (см., например, [1]), положительные нули $R_{h,n}$, $n = 1, 2, \dots, N_h \geq 1$ (N_h есть число горизонтов), метрической функции $f(r)$ будем называть горизонтами событий ЧД. Ниже будет показано, что в рассматриваемой модели ЧД в

зависимости от значений электрического заряда q и массы γ могут существовать не более чем $N_h = 3$ горизонта. Наибольший из них R_h будем называть внешним (физическим) горизонтом, а самый левый $R_l \leq R_h$ — внутренним горизонтом.

Для замыкания красовой задачи, связанной с уравнениями (1), необходимо сформулировать соответствующие граничные условия.

Прежде всего отметим, что при $\gamma \neq 0$ на правом конце при $r \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические условия:

- для метрической функции

$$f(r) \rightarrow 1 - \frac{2M_\infty}{r} + \frac{q^2}{r^2}; \quad (3)$$

- для дилатонного поля

$$\varphi(r) \rightarrow -\frac{\alpha q^2}{\gamma^2 r^4}. \quad (4)$$

В формуле (3) через M_∞ обозначена масса ЧД.

Постановка граничных условий на правом конце, а следовательно, и (численный) метод решения соответствующей красовой задачи существенно зависят от вида и количества горизонтов. Рассмотрим подробнее основные случаи задания краевых условий.

2.1 ЧД с регулярным горизонтом событий

Рассмотрим постановку краевой задачи для ЧД с единственным регулярным горизонтом. При $N_h = 1$ область $(0, \infty)$ разбивается точкой $r = R_h$ на две области: внутреннюю $D_{int} \equiv (0, R_h)$ и внешнюю $D_{ext} \equiv (R_h, \infty)$. В области D_{ext} граничная задача для уравнений (1) решается с условием на горизонте

$$f(R_h) = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что точка R_h является точкой вырождения дифференциального уравнения (1b). Для регулярности решений на горизонте необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi(R_h, \varphi_h, \varphi'_h) = 0,$$

которое в подробной записи имеет вид

$$\left[\gamma^2 V(\varphi_h) - \frac{1}{R_h} - 2 \exp\{2\alpha\varphi_h\} \frac{R_h^2 - \sqrt{R_h^4 + q^2}}{R_h} \right] \varphi'_h - \frac{\gamma^2}{2} V'(\varphi_h) - 2\alpha \exp\{2\alpha\varphi_h\} \frac{R_h^2 - \sqrt{R_h^4 + q^2}}{R_h^2} = 0. \quad (6)$$

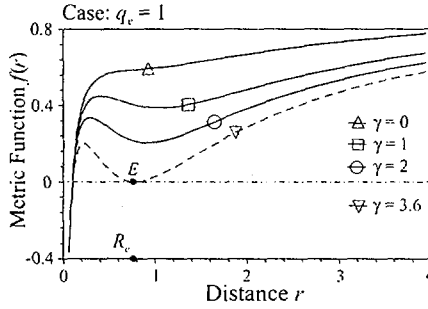


Рис. 1: Метрическая функция $f(r)$ для нескольких значений массы γ

Здесь и в дальнейшем индекс h означает, что значение соответствующей функции вычисляется в точке R_h .

Подчеркнем, что при заданной массе M_∞ граничная задача (1) — (6) является задачей со свободной границей [27], так как точка R_h заранее неизвестна. Однако, во многих случаях (см. обсуждения в разделе 5) с вычислительной точки зрения удобнее задавать величину $R_h > 0$ и решать задачу в D_{ext} с фиксированной границей. При этом масса M_∞ определяется из асимптотики (3).

Численный метод решения краевой задачи для ЧД с заданным горизонтом событий изложен в разделе 3.

Графические примеры метрической функции $f(r)$ при $R_h = 0.1$ для заданных значений массы дилатона $\gamma = 0$ (кривая, отмеченная символом Δ), $\gamma = 1$ (кривая \square) и $\gamma = 2$ (кривая \diamond) представлены на рис. 1. Решение Δ соответствует ЧД с безмассовым дилатоном, рассмотренному в работах [18, 19].

Отметим, что в ряде работ других авторов (см., например, [18, 19]) при формулировке задач для ЧД обычно ограничиваются только рассмотренным случаем постановки краевых условий.

Рассмотрим постановку задачи во внутренней области $D_{int} \equiv (0, R_h)$ в области D_{int} . Пусть $(f_+(r), \varphi_+(r), R_h)$ — решение задачи (1) — (6) при $r \geq R_h$ и некоторой заданной совокупности параметров q и γ . Предположим, что уравнения (1) справедливы также и при $r < R_h$. Для получения решения $f_-(r), \varphi_-(r), R_l$ в некоторой подобласти $r \in (R_l, R_h)$, зависящей от параметра $R_l > 0$, потребуем непрерывности функций $f(r)$ и $\varphi(r)$ в точке R_h , что дает

$$f_-(R_h) = 0, \quad (7)$$

$$\varphi_-(R_h) = \varphi_+(R_h), \quad (8)$$

$$\varphi'_-(R_h) = \varphi'_+(R_h). \quad (9)$$

Для замыкания граничной задачи в (R_l, R_h) необходимо еще одно граничное условие. Ввиду отсутствия горизонтов при $0 < r < R_h$ выбор этого условия достаточно произволен. Например, таким условием может быть

$$|f_-(R_l)| = 1. \quad (10)$$

Так как параметр R_l заранее неизвестен, то задача (1), (7) – (10) является задачей со свободной левой границей. Численный алгоритм решения таких краевых задач изложен ниже в разделе 4.

2.2 ЧД с экстремальными горизонтами

Будем говорить, что ЧД имеет в точке R_e экстремальный горизонт событий, если выполнены условия

$$\begin{aligned} f(R_e) &= 0, \\ f'(R_e) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пример решения $f(r)$ с экстремальным внешним горизонтом $R_h \approx 0.776$ и внутренним $R_l = 0.1$ при $q = 1$ и $\gamma = 3.6$ показан на рис. 1 (кривая, отмеченная символом ∇).

При помощи уравнения (1a) можем записать последнее выражение в явном виде

$$1 + 2 \exp\{2\alpha\varphi_e\}(R_e^2 - \sqrt{R_e^4 + q^2}) - R_e^2\gamma^2 V(\varphi_e) = 0, \quad (12)$$

где индекс e означает, что соответствующая величина вычисляется для экстремального горизонта.

Для регулярности решений на экстремальном горизонте должно быть выполнено также соотношение вида (6), принимающее в случае простой вид:

$$\frac{\gamma^2}{2} V'(\varphi_e) - 2\alpha \exp\{2\alpha\varphi_e\} \frac{R_e^2 - \sqrt{R_e^4 + q^2}}{R_e^2} = 0. \quad (13)$$

Для заданных значений физических параметров q и γ уравнения (12) и (13) образуют замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения возможных экстремальных горизонтов $R_e(q, \gamma)$ и соответствующих граничных значений дилатона $\varphi_e(q, \gamma)$.

Отметим, что при наличии дополнительного условия экстремальности горизонта (12) система граничных условий задачи переопределена и асимптотическое условие (3) становится “лишним”. С физической точки зрения это означает, что экстремальный горизонт существует не для всякого значения массы M_∞ .

Путем исключения слагаемого с радикалом из уравнений (12) и (13) можно получить явное выражение горизонта через массу дилатона γ и параметр φ_e :

$$R_e = \frac{1}{\gamma \sqrt{V(\varphi_e) - V'(\varphi_e)/2\alpha}}. \quad (14)$$

Очевидно, что потенциал дилатонного поля $V(\varphi)$ должен удовлетворять условию

$$V(\varphi_e) - \frac{1}{2\alpha} V'(\varphi_e) > 0.$$

В частном случае $\alpha = -1$, а также

$$V(\varphi) = \varphi^2, \quad (15)$$

последнее соотношение упрощается и принимает вид

$$\varphi_e^2 + \varphi_e > 0.$$

Таким образом, горизонт R_e определен для значений $\varphi_e \in (0, \infty)$ и

$$R_e = \frac{1}{\gamma \sqrt{\varphi_e^2 + \varphi_e}}. \quad (16)$$

Для вычисления неизвестного параметра φ_e следует использовать уравнение

$$\frac{1}{2\alpha} V'(\varphi_e) \left[1 - \frac{\gamma^2}{4} \exp\{-2\alpha\varphi_e\} \frac{1}{2\alpha} V'(\varphi_e) \right] + q^2 \gamma^2 \exp\{2\alpha\varphi_e\} \left[V(\varphi_e) - \frac{1}{2\alpha} V'(\varphi_e) \right]^2 = 0, \quad (17)$$

вытекающее из соотношений (13) и (14).

Простую картину качественного поведения решений (17) можно получить в частном случае квадратичного дилатонного потенциала (15). Тогда уравнение (17) может быть преобразовано к виду (индекс e опускаем для упрощения записи)

$$C(\varphi, q, \gamma) \equiv C_1(\varphi, \gamma) - C_2(\varphi, q, \gamma) = 0, \quad (18)$$

где положено

$$C_1(\varphi, \gamma) \equiv 1 + \frac{\gamma^2}{4} \varphi \exp\{2\varphi\}, \quad C_2(\varphi, q, \gamma) \equiv q^2 \gamma^2 \exp\{-2\varphi\} \varphi (1 + \varphi)^2.$$

При заданных электрическом заряде q и массе дилатона γ функция $C_1(\varphi)$ монотонно возрастает для $\varphi \in [0, \infty)$, причем $C(0) = 1$ и $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} C_1(\varphi) = \infty$. В свою очередь функция $C_2(\varphi)$ является монотонно возрастающей в интервале $[0, 1)$ и монотонно убывающей в $(1, \infty)$. Кроме того, $C_2(0) = 0$, $C_2'(1) = 0$ и $C_2''(1) < 0$, т.е. при $\varphi = 1$ функция $C_2(\varphi)$ имеет максимум. Так как $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} C_2(\varphi) = 0$, то уравнение (18) может иметь на интервале $(0, \infty)$ не более двух корней, больший из которых будем обозначать через $\varphi_{e,1}$, а меньший — через $\varphi_{e,2}$ (в дальнейшем, если это не приводит к недоразумениям, будем полагать $\varphi_{e,1} \equiv \varphi_l$ и $\varphi_{e,2} \equiv \varphi_h$). Графически эти рассуждения проиллюстрированы на рис. 2, где пунктирной линией обозначен

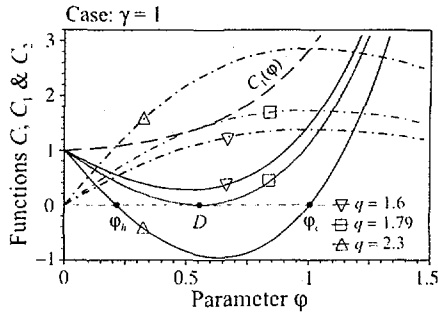


Рис. 2: Функции $C(\varphi)$, $C_1(\varphi)$ и $C_2(\varphi)$ при $\gamma = 1$

график функции $C_1(\varphi)$, штрих-пунктирными линиями обозначены графики функции $C_2(\varphi)$ для трех значений $q = 1.6$, $q = 1.79$ и $q = 2.3$, а сплошными линиями — графики соответствующих зависимостей $C_1(\varphi)$. По формуле (16) меньший корень $\varphi_h < 1$ уравнения (18) соответствует внешнему экстремальному горизонту R_h ЧД. Большому корню φ_c сопоставляется ЧД с внутренним экстремальным горизонтом (см. ниже постановку соответствующей краевой задачи). Для того, чтобы величина $\varphi_c \geq 1$ (корень находится правее максимума функции $C_2(\varphi)$), должно быть выполнено условие

$$q \geq \frac{c}{2\gamma} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} c^2},$$

где $c \approx 2.718\dots$. В частности, при $\gamma = 1$ получаем $q > 2.293$ (см. рис. 2).

Значения корней $\varphi_h(q, \gamma)$ и $\varphi_l(q, \gamma)$, соответствующих фиксированным значениям параметров q и γ , легко найти путем численного решения нелинейного алгебраического уравнения (18). В качестве примера на рис. 3 показаны зависимости $R_h(q)$ (сплошные кривые) и $R_l(q)$ (пунктирные кривые) для двух значений массы дилатона $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$. Видно, что с увеличением заряда q внешний экстремальный горизонт R_h растет линейно с коэффициентом $\sim 1/2$, а внутренний R_l уменьшается. Точки, обозначенные через D , соответствуют трижды вырожденным горизонтам $R_h = R_l = R_d$.

Аналогичным образом на рис. 4 демонстрируются зависимости $R_h(\gamma)$ (сплошные кривые) и $R_l(\gamma)$ (пунктирные кривые) для двух значений заряда $q = 1$ и $q = 2$. Видно, что основное изменение как внешнего, так и внутреннего горизонтов под влиянием массы дилатона γ локализовано в некоторой окрестности точки тройного вырождения D . Большие значения массы γ оказывают незначительное влияние на величину горизонтов.

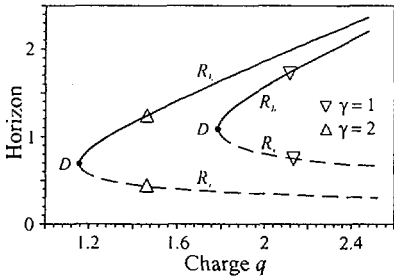


Рис. 3: Зависимость $R(q)$

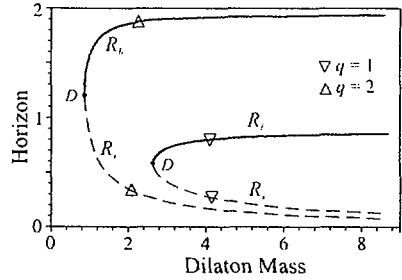


Рис. 4: Зависимость $R(\gamma)$

2.2.1 ЧД с внешним экстремальным горизонтом

Предположим, что для заданных q и γ уравнение (18) имеет два корня, и рассмотрим меньший из них $\varphi_h(q, \gamma)$, которому по формуле (16) соответствует внешний горизонт R_h . Задание величины R_h означает, что левая граница области D_{ext} является заданной, и, следовательно, система уравнений (1) на интервале D_{ext} решается с крайними условиями (5) и

$$\varphi(R_h) = \varphi_h(q, \gamma) \quad (19)$$

на горизонте, а также с асимптотикой дилатона (4) на правом конце. Масса M_∞ ЧД находится из асимптотики метрической функции (3).

Пример полученного численным путем решения с внешним экстремальным горизонтом показан на рис. 1 (см. кривую, отмеченную символом ∇). В точке E график функции $f(r)$ касается горизонтальной оси, т.е. выполнено $f'(R_c) = 0$.

При ограниченных значениях массы дилатона γ ЧД имеет также регулярный внутренний горизонт (см. ниже обсуждение результатов численного эксперимента в разделе 5). Этот горизонт R_l является неизвестным, и, следовательно, в области $D_{mid} \equiv (R_l, R_h)$ для уравнений (1) необходимо рассматривать задачу со свободным левым концом. Пусть $\{f(r), \varphi(r), R_h\}$ — решение задачи во внешней области D_{ext} и предположим, что функция $f(r)$ непрерывна, а функция $\varphi(r)$ гладкая в точке R_h . Тогда для уравнений (1) на интервале D_{mid} граничные условия имеют вид (5), (19) при R_h , а также (5) и (6) при R_l (в последних двух выражениях следует заменить индекс h на l).

2.2.2 ЧД с внутренним экстремальным горизонтом

Как было показано выше в разделе 2.2, экстремальный горизонт R_l ЧД может быть внутренним, т.е. $R_{c,1} \equiv R_c < R_h$. Рассмотрим постановку красовой задачи для уравнений (1) в этом случае.

Точки R_l и R_h разбивают полупрямую на три области: внутреннюю $D_{int} \equiv (0, R_l)$, промежуточную $D_{mid} \equiv (R_l, R_h)$ и внешнюю $D_{ext} \equiv (R_h, \infty)$. Рассмотрим сначала задачу на интервале D_{mid} . В точке R_c заданы два условия вида (11), а также условие

$$\varphi(R_l) = \varphi_l(q, \gamma), \quad (20)$$

где значение $\varphi_c(q, \gamma)$ есть больший корень уравнения (18). На неизвестной правой границе R_h должны быть выполнены условие существования горизонта (5) и условие регулярности (6). Таким образом задача в области D_{mid} замкнута.

Пусть решение $\{f(r), \varphi(r), R_h\}$ в этой области найдено. Тогда, предполагая непрерывность решений в точке R_h , в области D_{ext} следует решать уравнения (1) с краевыми условиями (5) и (19) на левом конце, а также (4) на правом.

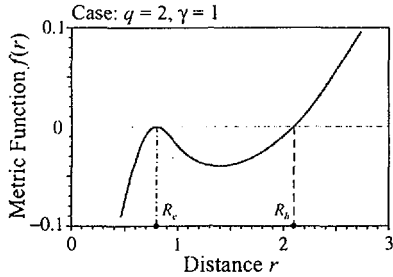


Рис. 5: Решение с внутренним горизонтом

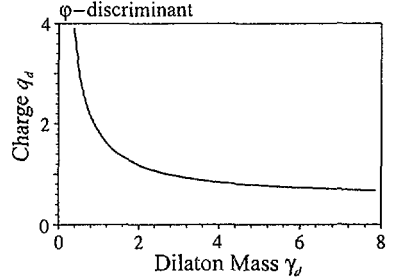


Рис. 6: φ — дискриминант

Конкретный пример полученного численным путем решения с внутренним экстремальным горизонтом $R_l \approx 0.84$ при $q = 2$ и $\gamma = 1$ показан на рис. 5.

Постановка задачи для определения решения во внутренней области D_{int} аналогична описанной выше в конце раздела 2.1.

2.2.3 ЧД с трижды вырожденным горизонтом

Пусть при некоторых значениях заряда q и массы дилатона γ уравнение (18) имеет два корня $\varphi_h < \varphi_l$ (см. рис. 2). Так как для $\varphi \in (\varphi_h, \varphi_l)$ выполнено $C_1(\varphi) < C_2(\varphi)$, то в некоторой точке φ_m (а ввиду непрерывности и в некоторой области, содержащей точку φ_m) из этого интервала функция $C(\varphi)$ имеет отрицательный минимум. При убывании массы дилатона γ график функции $C(\varphi, \gamma)$ поднимается вверх, график функции $C_1(\varphi, \gamma)$ опускается вниз, а расстояние между корнями $[\varphi_h$ и $\varphi_l]$ уменьшается. При некотором критическом $\gamma = \gamma_d$ точка минимума $\varphi_d \equiv \varphi_m$

функции $C(\varphi, \gamma)$ касается горизонтальной оси, являясь тем самым единственным корнем уравнения (18). При этом имеют место соотношения

$$C(\varphi_d, q_d, \gamma_d) = 0, \quad (21a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi}(\varphi_d, q_d, \gamma_d) = 0. \quad (21b)$$

Уравнения (21) определяют на плоскости (q, γ) гладкую кривую (см. рис. 6), которая называется φ -дискриминантом функции $C(\varphi, q, \gamma)$. Уравнения дискриминанта в параметрической форме могут быть получены из определения (21)

$$\gamma_d = \frac{\exp\{-\varphi_d\}}{\varphi_d} \sqrt{2(1 - \varphi_d)}, \quad (22a)$$

$$q_d = \frac{\exp\{2\varphi_d\}}{2\sqrt{1 - \varphi_d^2}}. \quad (22b)$$

Простые вычисления показывают, что соотношение (21b) выражает условие обращения в нуль второй производной метрической функции $f(r)$ в горизонте R_d

$$f''(R_d) = 0.$$

Такой горизонт назван в работе [14] трехкратно вырожденным.

Таким образом, алгоритм решения задачи о ЧД с трехкратно вырожденным горизонтом имеет следующий вид. Удобнее задаваться массой дилатона $\gamma = \gamma_d$. Тогда по формуле (22a) можно вычислить значение поля $0 < \varphi_d(\gamma) < 1$, а при помощи соотношения (16) — горизонт R_d ЧД. Заряд ЧД q находится из (22b). Следовательно, во внешней D_{ext} /внутренней D_{int} области краевая задача для ЧД с трехкратно вырожденным горизонтом является задачей с фиксированной левой/правой границей R_d , на которой ставятся условия вида (5) и (19). Если решение этой задачи найдено, то соответствующая масса M_∞ ЧД находится из асимптотики (3).

Пример трехкратно вырожденного решения $f(r)$, полученного численным путем для $q_d \approx 0.836$ и $\gamma_d = 4$, представлен на рис. 7. Точка D , соответствующая $R_d \approx 0.456$, является точкой перегиба для метрической функции $f(r)$, т.е. кроме условия $f(R_d) = 0$ выполнены также $f'(R_d) = 0$ и $f''(R_d) = 0$.

3 Численный метод решения задачи с фиксированной границей

Как было показано выше, в случае ЧД с внешним экстремальным горизонтом R_h следует решать краевую задачу для уравнений (1) в области D_{ext} с фиксированным физическими параметрами правым концом R_h и системой из трех граничных

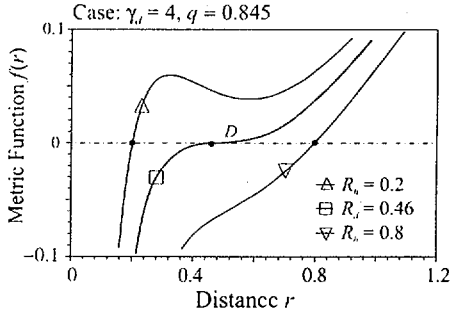


Рис. 7: Пример решения $f(r)$ с трижды вырожденным горизонтом

условий (5), (19) и (4). Для численного решения этой задачи целесообразно применить непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН), с успехом применявшийся для решения многочисленных задач физики [21]–[24] (см. также подробные обзоры [17] и [25]).

Введем “актуальную бесконечность” $R_\infty < \infty$ и рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$\chi(y) = 0 \quad (23)$$

относительно пары $y \equiv \{f, \varphi\}$, $y \in C^1[R_h, R_\infty] \times C^2[R_h, R_\infty]$, где координаты $\chi^n(y)$, $n = 1, 2, \dots, 5$, определены следующим образом:

$$\chi^{(1)} \equiv -f' + F(r, f, \varphi, \varphi'), \quad (24a)$$

$$\chi^{(2)} \equiv -f \left(\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' \right) + \Phi(r, \varphi, \varphi'), \quad (24b)$$

$$\chi^{(3)} \equiv f(R_h), \quad (24c)$$

$$\chi^{(4)} \equiv \varphi(R_h) - \varphi_h(q, \gamma), \quad (24d)$$

$$\chi^{(5)} \equiv \varphi(R_\infty) + \frac{\alpha q^2}{\gamma^2 R_\infty^4}. \quad (24e)$$

Пусть уравнение (23) имеет изолированное решение $y^* \equiv \{f^*(r), \varphi^*(r)\}$ и известно некоторое начальное приближение $y^0 \equiv \{f^0(r), \varphi^0(r)\}$ к решению y^* . При малых значениях заряда q и массы дилатона γ в качестве начального приближения можно использовать асимптотики (3) и (4).

Введем непрерывный параметр $t \in [0, \infty)$ и рассмотрим траекторию $y(t)$, удовлетворяющую абстрактной задаче Коши

$$\chi'(y(t)) \frac{dy(t)}{dt} + \chi(y(t)) = 0, \quad y(0) = y_0. \quad (25)$$

Здесь $\chi'(y)$ – производная Фреше нелинейного оператора $\chi(y)$. В работе [25] показано, что при выполнении условия гладкости оператора $\chi(y)$ в окрестности искомого изолированного решения y^* имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0.$$

Для численного решения задачи Коши (25) проще всего воспользоваться явным методом Эйлера на неравноммерной сетке $t_{k+1} = t_k + \tau_k$ с переменным шагом τ_k , $k = 0, 1, \dots$. В результате приходим к итерационному процессу

$$\chi'(y_k) w_k = -\chi(y_k), \quad (26)$$

$$y_{k+1} = y_k + \tau_k w_k. \quad (27)$$

который позволяет на каждой итерации k по вычисленной при помощи (26) поправке w_k вычислить в соответствии с (27) следующее приближение y_{k+1} к точному решению. При $\tau_k = 1$ приходим к классическому методу Ньютона.

В работе [20] доказана сходимость итераций (26), (27) к решению эволюционной задачи Коши (25) на конечном отрезке времени t при $\tau_k \rightarrow 0$, если в окрестности точного решения y^* оператор $\chi(y)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Варьированием шага τ_k можно управлять итерационным процессом [17, 31].

На каждой итерации уравнение (26) в рассматриваемой задаче эквивалентно следующей линейной задаче для координат вектора поправки $w(r) \equiv \{\xi(r), \eta(r)\}$ (в дальнейшем для упрощения записи индекс k итерации опускаем):

$$-\xi' + \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial f} \xi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \eta = f' - F(r, f, \varphi, \varphi'), \quad (28a)$$

$$-f \left(\eta'' + \frac{1}{r} \eta' \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} \eta' - \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \eta = f \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) - \Phi(r, \varphi, \varphi'), \quad (28b)$$

$$\xi(R_h) = -f(R_h), \quad (28c)$$

$$\eta(R_h) = \varphi_h(q, \gamma) - \varphi(R_h), \quad (28d)$$

$$\eta(R_\infty) = -\varphi(R_\infty) - \frac{\alpha q^2}{\gamma^2 R_\infty^4}. \quad (28e)$$

Удобно выбрать начальное приближение $\{f_0(r), \varphi_0(r)\}$ удовлетворяющим краевым условиям (4), (5) и (19). Тогда на каждой итерации правые части (28c) – (28e) равны нулю и, соответственно, вклад краевых условий в невязку $\delta(\tau_k)$ будет нулевым.

Предположим, что $\{\xi(r), \eta(r)\}$ – решение задачи (28). Тогда следующее приближение к точному решению находится из соотношений (см. формулу (27))

$$f^{k+1} = f^k + \tau_k \xi^k, \quad \varphi^{k+1} = \varphi^k + \tau_k \eta^k. \quad (29)$$

В случаях, когда горизонт $R_h < R_{e,1}$ либо $R_h > R_{e,2}$, зависимость $R_h(M_\infty)$ является взаимно-однозначной (см. ниже обсуждение в разделе 5). Это позволяет рассматривать величину R_h как параметр и, таким образом, заменить задачу со свободной левой границей задачей с фиксированной границей R_h . В этом случае правая часть выражения (24d) имеет вид, аналогичный (6):

$$\chi^{(4)} \equiv \Phi(R_h, \varphi_h, \varphi'_h),$$

а граничное условие (28d) заменяется на

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{R_h} \eta(R_h) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} \right|_{R_h} \eta'(R_h) = -\Phi(R_h, \varphi_h, \varphi'_h).$$

Остановимся кратко на вопросе точности вычислительных схем на основе НА-МН. На каждой итерации k линейная краевая задача (28) решается на конечном интервале (R_h, R_∞) . Для дискретизации используется метод сплайн-коллокации [28] в гауссовых узлах сетки, экспоненциально сгущающейся к горизонту R_h .

Пусть u^* — точное решение исходной непрерывной задачи (23) на конечном интервале, u_h^* — точное решение соответствующей дискретизированной нелинейной задачи

$$\chi_h(u_h) = 0 \tag{30}$$

на конечном интервале, u_h^k — приближение к u_h после k итерации при выполнении условия $\|\chi_h(u_h^k)\| \leq \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Отметим, что если способ дискретизации не меняется от итерации к итерации, то сеточные представления для (28) вытекают из сеточного представления (30) исходного уравнения (23).

Для оценки сходимости метода рассмотрим в подходящей сеточной норме неравенство

$$\|y^* - u_h^k\|_h \leq \|y^* - u^*\|_h + \|u^* - u_h\|_h + \|u_h - u_h^k\|_h.$$

Можно показать [17], что $\|u^* - u_h\|_h \leq O(h^\tau)$, $\|u_h^* - u_h^k\|_h \leq B_h \|\chi_h(u_h^k)\|$, где B_h — некоторая постоянная. Тогда при $B_h \|\chi_h(u_h^k)\| \ll O(h^\tau)$, что выполняется для достаточно малых ε , точность полученного приближенного решения определяется первыми двумя слагаемыми справа в неравенстве.

Ошибка $\delta_\infty = \|y^* - u^*\|_h$ исследуется численно на фиксированной сетке для различных значений актуальной бесконечности R_∞ , которая выбирается таким образом, чтобы δ_∞ оставалась малой по сравнению с двумя другими слагаемыми. Таким образом, точность приближенного решения близка к теоретической оценке метода разностной аппроксимации уравнения (23).

4 Численный метод решения задачи со свободной границей

Достаточно исчерпывающий обзор методов решения задач со свободными границами имеется в монографии [27]. В настоящей работе граничная задача для уравнений (1) со свободным внешним R_h и заданным экстремальным внутренним R_l горизонтами сводится к нелинейной задаче на собственные значения со спектральным параметром R_h , которая в свою очередь решается с использованием НАМН. Отметим, что такой подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач астрофизики [28, 29], теории джозефсоновских контактов [30] и т.д.

Формальный препятствием для решения задачи с неизвестным внешним горизонтом при помощи НАМН является отсутствие явной зависимости уравнений и граничных условий от горизонта R_h . Чтобы ввести явным образом параметр R_h , удобно перейти к новой переменной x по формуле

$$x = \frac{r - R_l}{R_h - R_l}. \quad (31)$$

После замены переменных (31) интервал $[R_l, R_h]$ переходит в $[0, 1]$, причем $d/dr = (R_h - R_l)^{-1} d/dx$. Положим $z \equiv \{y, R_h\}$, $y \equiv \{f, \varphi\}$, $z \in C^1[R_h, R_\infty] \times C^2[R_h, R_\infty] \times \mathbb{R}$. Тогда краевая задача для уравнений (1) может быть записана в виде, аналогичном (23):

$$\chi(y, R_h) = 0, \quad (32a)$$

$$N(y) = 0, \quad (32b)$$

где вектор $\chi(z)$ определяется при помощи выражений (во избежание введения лишних обозначений далее в этом разделе полагаем $(\cdot)' \equiv d(\cdot)/dx$)

$$\chi^{(1)} \equiv -f' + \bar{F}[x, f, \varphi, \varphi', R_h] = 0, \quad (33a)$$

$$\chi^{(2)} \equiv -f \left(\varphi'' + \frac{1}{x} \varphi' \right) + \bar{\Phi}[x, \varphi, \varphi', R_h] = 0, \quad (33b)$$

$$\chi^{(3)} \equiv f(0), \quad (33c)$$

$$\chi^{(4)} \equiv f(1), \quad (33d)$$

$$\chi^{(5)} \equiv \bar{\Phi}(1, \varphi_h, \varphi'_h, R_h), \quad (33e)$$

а левая часть условия "нормировки" (32b) имеет вид

$$N(y) \equiv \varphi(0) - \varphi_l(q, \gamma). \quad (34)$$

Здесь через \bar{F} и $\bar{\Phi}$ обозначены правые части уравнений ЧД (1) после подстановки в них (31):

$$\bar{F} \equiv (R_h - R_l) F[r(x, R_h), f, \varphi, (R_h - R_l)^{-1} \varphi'],$$

$$\bar{\Phi} \equiv (R_h - R_l)^2 \Phi[r(x, R_h), \varphi, (R_h - R_l)^{-1} \varphi'].$$

Как и выше в разделе 3, введем непрерывный параметр $t \in [0, \infty)$, полагая справедливыми соотношения ПАНН

$$\chi'_y(y, R_h)w + \chi'_{R_h}(y, R_h)\rho + \chi(y, R_h) = 0, \quad (36a)$$

$$N'(y)w + N(y) = 0. \quad (36b)$$

$$w = \dot{y}, \quad \rho = \dot{R}_h. \quad (36c)$$

Задачу (36a) – (36c) следует решать с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad R_h(0) = R_{h,0}. \quad (37)$$

Для численной реализации ПАНН можно применять различные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Далее будем рассматривать эйлеровский итерационный процесс, соответствующей задаче Коши (36) на регулярной в общем случае сетке $t_{k+1} = t_k + \tau_k$, $k = 0, 1, \dots$. На k -й итерации необходимо решить линейные операторные уравнения (36a) и (36b), после чего очередное приближение к точному решению находится по формулам, вытекающим из соотношений (36c):

$$y^{k+1} = y^k + \tau_k w^k, \quad R_h^{k+1} = R_h^k + \tau_k \rho^k. \quad (38)$$

Будем искать решение линейного уравнения (36a) в виде (для упрощения записи далее индекс итерации k опускаем)

$$w = u + \rho v,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — новые неизвестные функции. Подставляя это разложение в (36a) и приравнявая коэффициенты, получаем систему

$$\chi'_y(y, R_h)u = -\chi(y, R_h), \quad (39a)$$

$$\chi'_y(y, R_h)v = -\chi'_{R_h}(y, R_h). \quad (39b)$$

Пусть решения этих уравнений вычислены. Тогда производную ρ можно найти при помощи (36b)

$$\rho = -[N'(y)v]^{-1} [N(y) + N'(y)u]. \quad (40)$$

Целесообразно выбирать начальное приближение y_0 удовлетворяющим условию нормировки (36b). В таком случае выражение (40) упрощается:

$$\rho = -[N'(y)v]^{-1} N'(y)u. \quad (41)$$

Приведем явный вид для уравнений (39) и (40). Пусть $u \equiv \{u_f(x), u_v(x)\}$, а

также $v \equiv \{v_f(x), v_\varphi(x)\}$. Тогда имеем

$$-u'_f + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi'} u'_\varphi + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f} u_f + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} u_\varphi = f' - \bar{F}(x, f, \varphi, \varphi', R_h), \quad (42a)$$

$$-f \left(u''_\varphi + \frac{1}{r} u'_\varphi \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi'} u'_\varphi - \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) u_f + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} u_\varphi =$$

$$f \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) - \bar{\Phi}(x, \varphi, \varphi', R_h). \quad (42b)$$

$$u_f(0) = -f(0), \quad (42c)$$

$$u_f(1) = -f(1). \quad (42d)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \Big|_{x=1} u_\varphi(1) + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi'} \Big|_{x=1} u'_\varphi(1) = -\bar{\Phi}(1, \varphi, \varphi', R_h), \quad (42e)$$

$$-v'_f + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi'} v'_\varphi + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f} v_f + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} v_\varphi = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial R_h}, \quad (43a)$$

$$-f \left(v''_\varphi + \frac{1}{r} v'_\varphi \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi'} v'_\varphi - \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) v_f + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} v_\varphi = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial R_h}, \quad (43b)$$

$$v_f(0) = 0, \quad (43c)$$

$$v_f(1) = 0, \quad (43d)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \Big|_{x=1} v_\varphi(1) + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi'} \Big|_{x=1} v'_\varphi(1) = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial R_h} \Big|_{x=1}. \quad (43e)$$

$$\rho = \frac{\varphi(q, \gamma) - \varphi(0) - u_\varphi(0)}{v_\varphi(0)}. \quad (44)$$

Таким образом, итерационный процесс проводится в следующей последовательности. По заданному начальному приближению $f_0(x)$, $\varphi_0(x)$ и R_h вычисляем приращения $u(x)$, $v(x)$, решая граничные задачи (42) и (43). Далее по формуле (44) находим приращение ρ горизонта R_h . Следующее приближение к точному решению получается из соотношений (38).

Линейные краевые задачи (42) и (43) решаются численно при помощи метода коллокации порядка $O(h^4)$ в гауссовых узлах сетки, экспоненциально сгущающейся к горизонту R_h [28]. Отметим, что левые части уравнений и граничных условий одинаковы, что упрощает решение соответствующей матричной задачи.

Пусть решение в области D_{mid} найдено. Тогда, предполагая непрерывность функций в точке R_h , задача во внешней области D_{ext} решается как задача с фиксированной левой границей (раздел 3). При необходимости найти решение во внутренней области D_{int} (см. конец раздела 2.1) соответствующая краевая задача со свободным левым концом решается, как описано выше.

Очевидно, что решение задачи с экстремальным внешним и регулярным внутренним горизонтами можно находить методами, изложенными в разделах 3 и 4.

5 Обсуждение численных результатов

С физической точки зрения одной из наиболее важных является связь между массой M_∞ ЧД и горизонтом R_h при различных значениях параметров модели q и γ .

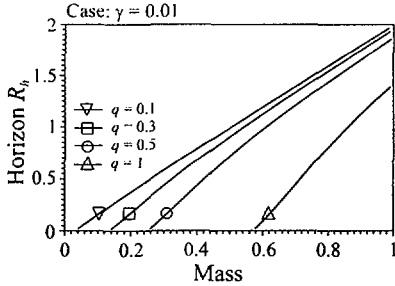


Рис. 8: Зависимость $R_h(M_\infty)$, $\gamma = 0.01$

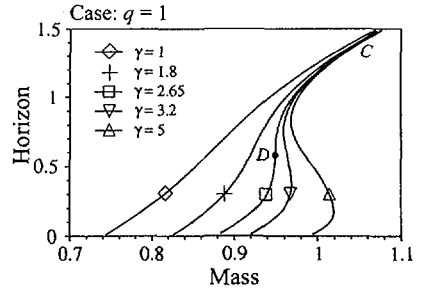


Рис. 9: Зависимость $R(M_\infty)$, $q = 1$

На рис. 8 демонстрируется полученная численным путем зависимость $R_h(M_\infty)$ для небольшой массы дилатона $\gamma = 0.01$ и $q \leq 1$. Как и следовало ожидать, при таких значениях γ однозначность зависимости $R(M_\infty)$ и линейность при больших значениях M_∞ сохраняются в широком диапазоне изменения заряда q . Этот вывод аналогичен результатам недавних работ [18, 19] для случая безмассового дилатона. Легко подсчитать, что тройное вырождение горизонта, которое является началом существенного влияния массы γ на число и вид горизонтов (см. ниже) имеет место при $q > 130$. В этом смысле кривые на рис. 8 имеют тестовый характер.

Влияние конечных масс дилатона γ при $q = 1$ показано на рис. 9. При $\gamma < \gamma_d \approx 2.65$ (см. кривые, обозначенные через \diamond и $+$) зависимости $R(M_\infty)$, хотя и сильно деформированные, сохраняются однозначными. Кривая $R(M_\infty)$ (отмеченная через \square), соответствующая критическому значению γ_d , имеет в точке тройного вырождения горизонта D ($R_d \approx 0.58$) вертикальную касательную (для обратной функции $M_\infty(R_h)$ точка D есть точка перегиба). Соответствующее решение для метрической функции $f(r)$ демонстрируется на рис. 7, кривая \square .

При дальнейшем увеличении массы дилатона $\gamma > \gamma_d$ ЧД имеет (см. раздел 2.2) два экстремальных горизонта $R_l(q, \gamma)$ и $R_h(q, \gamma)$, $R_h > R_l$. На графике зависимости $R(M_\infty)$ наличие горизонтов R_l и R_h выражается в появлении характерных S-образных кривых (в случае обозначенных через ∇ и Δ). Этим горизонтам соответствуют два разных решения уравнений (1) с разными массами $M_h(q, \gamma)$ и $M_l(q, \gamma)$ соответственно.

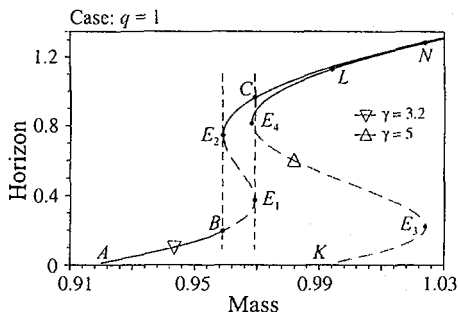


Рис. 10: “Рождение” горизонтов в ЧД

Зафиксируем для определенности значение $\gamma = 3.2 > \gamma_d$ (кривая, отмеченная символом ∇ на рис. 9). На рис. 10 эта кривая вместе с кривой Δ показаны в подходящем масштабе. При движении по дуге ABE_1E_2C слева направо динамика изменения числа горизонтов, очевидно, имеет следующий вид. От точки A до точки B_1 ЧД имеет единственный регулярный горизонт R_h , на вертикальной прямой BE_2 — два горизонта, причем горизонт в точке B является регулярным, а в точке E_2 — внешним экстремальным ($R_h \approx 0.72$). Далее, на участке между вертикальными прямыми BE_2 и E_1C ЧД имеет для заданной M_∞ три регулярных горизонта, на прямой E_1C — два, причем вертикальная координата $R_l \approx 0.42$ точки E_1 является внутренним экстремальным горизонтом, и наконец, правее точки C ЧД имеет опять только один регулярный горизонт ($R = R_h$).

“Движение” экстремальных горизонтов R_l и R_h при изменении массы γ для значений электрического заряда $q = 1$ и $q = 2$ показано на рис. 4. Аналогичная зависимость величины горизонтов от заряда q при фиксированных $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ демонстрируется на рис. 3.

При достаточно больших γ вертикальная координата R_h точки E_2 растет линейным образом (см. рис. 4), а координата R_l точки E_1 опускается вниз. При этом точка M_0 (масса, обусловленная электрическим полем и дилатоном), удовлетворяющая формальному равенству $R(M_0) = 0$, может оказаться правее вертикальной прямой BE_2 , т.е. будет выполнено $M_0 > M_h$ (см. кривую, отмеченную символом Δ на рис. 10). Это означает, что для соответствующего γ (в конкретном случае $\gamma = 5$) распределение горизонтов следующее: в точке E_2 ЧД имеет единственный экстремальный горизонт (см. раздел 2.2.1), далее в области между вертикальными прямыми через E_2 и M_0 ЧД имеет два регулярных горизонта. Правее точки M_0 до E_1 ЧД имеет три регулярных горизонта, в точке E_1 — два горизонта R_l и $R_c = R_h$, причем внутренний R_l является экстремальным. Наконец, при достаточно больших массах M_∞ (правее E_1) ЧД имеет единственный регулярный горизонт.

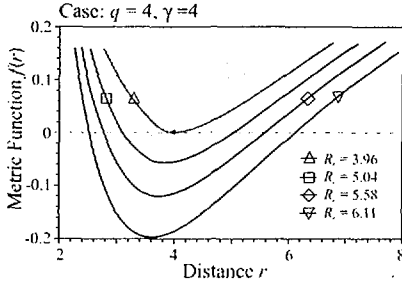


Рис. 11: Пример решений $f(r)$ с двумя регулярными горизонтами

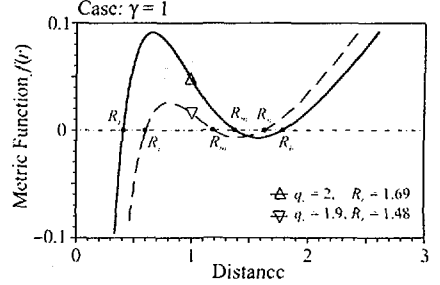


Рис. 12: Примеры решений $f(r)$ с тремя регулярными горизонтами

На рис. 11 демонстрируются примеры решений с двумя регулярными горизонтами (кривые, отмеченные символами \square , \diamond и ∇) в окрестности экстремального решения \triangle , $M_\infty \approx 3.96$. При этом вычисленные значения массы ЧД: $\square - M_\infty = 4.1$, $\diamond - M_\infty = 4.22$ и $\nabla - M_\infty = 4.36$.

На рис. 12 показаны два примера решений с тремя горизонтами при $\gamma = 1$, $q = 1.9$, $R_h \approx 1.48$ (пунктирная кривая, отмеченная символом ∇) и $q = 2$, $R_h \approx 1.69$ (сплошная кривая \triangle).

Нетрудно получить условие, при котором левее вертикальной прямой BE_2 через точку R_h (см. рис. 10) ЧД не будет иметь горизонтов. Для этой цели обозначим через M_l и M_h массы двух ЧД, для которых R_l и R_h являются соответственно внутренним и внешним экстремальными горизонтами. Построим эрмитов кубический полином $S_3(R)$ для функции $M_\infty(R)$ на участке $R \in [R_l, R_h]$ по известным условиям $M_\infty(R_l) = M_l$, $M_\infty(R_h) = M_h$, $M'_\infty(R_l) = 0$, $M'_\infty(R_h) = 0$. Положим $t = (R - R_l)/\Delta R$, где $\Delta R = R_h - R_l$ и $\Delta M = M_l - M_h$. Тогда полином $S_3(R)$ принимает вид

$$S_3(R) = \Delta M (2t^3 - 3t^2) + M_l, \quad t \in [0, 1].$$

Для дальнейших целей удобно переписать уравнение для локальной координаты t , соответствующей некоторой заданной массе M_∞ , в форме

$$2t^3 - 3t^2 + \mu = 0, \quad (45)$$

где коэффициент μ вычисляется по формуле $\mu = (M_l - M_\infty)/\Delta M$. Вид и значения корней этого уравнения зависят от величины μ , т.е. от соотношения между тремя массами M_∞ , M_l и M_h . Несложно проверить, что при $0 \leq \mu \leq 1$ уравнение имеет три реальных корня, расположенных на интервале $[-1/2, 3/2]$.

Как видно из рис. 10, при достаточно больших γ ЧД может иметь регулярный горизонт, только если масса $M_0 < M_h$, что эквивалентно $\mu < 1$. Если $\mu > 1$, то в

соответствии с вышеприведенными замечаниями ЧД имеет два или три горизонта. Продолжим формально полином $S_3(R)$ на участке $R \in [0, R_l]$ и потребуем, чтобы масса M_0 , которой соответствует локальная координата $t_0 = -R_l/\Delta R$, совпала с экстремальной массой M_h . В этом случае коэффициент $\mu = 1$ и уравнение (45) имеет один простой корень $t_0 = -1/2$, а также два кратных корня $t = 1$. Далее введем в рассмотрение частное $\rho \equiv R_h/R_l \geq 1$. Значение $\rho = 1$ соответствует случаю ЧД с трижды вырожденным горизонтом, т.е. точке D на рис. 9. При $\gamma > \gamma_d$ выполнено $\rho > 1$. В частности, в точке t_0 величина ρ принимает значение

$$\rho(q, \gamma) = \frac{R_h(q, \gamma)}{R_l(q, \gamma)} = 3. \quad (46)$$

Соответствующая связь между зарядом q и массой дилатона γ проиллюстрирована на рис. 13.

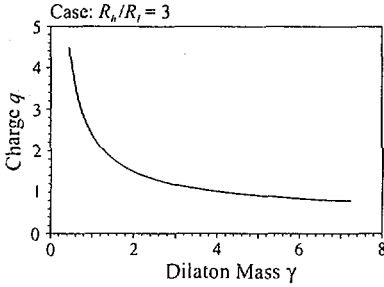


Рис. 13: Кривая $\rho(q, \gamma) = 3$

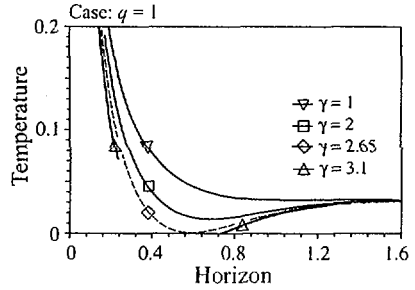


Рис. 14: Температура ЧД

Таким образом, если $1 \leq \rho < 3$, то левее экстремальной массы M_h имеется однозначная ветвь зависимости $R_h(M_\infty)$. На интервале $M_h < M_0 < M_l$ (точка M_0 находится правее точки M_h и $\rho > 3$) параметр $\mu \in (0, 1)$. Отсюда $t \in (-1/2, 0)$ и, следовательно, ЧД имеет хотя бы два регулярных горизонта.

Для вычисления координаты R_c точки C продолжим полином $S_3(R)$ на участке $R \in [R_h, R_c]$, т.е. $t \in [1, (R_c - R_l)/\Delta R]$. Тогда $M_c = M_l$, $\mu = 0$ и уравнение (45) имеет единственный ненулевой корень $t_c = 3/2$, которому соответствует горизонт

$$R_c = \frac{3R_h - R_l}{2}. \quad (47)$$

Появление трижды вырожденного горизонта с последующим возникновением экстремальных горизонтов под влиянием массы дилатона γ можно наблюдать и на графике зависимости температуры ЧД

$$T(R_h) = \frac{1}{4\pi} \exp\{-\delta_h\} f'_h$$

от внешнего горизонта R_h при фиксированном q (см. рис. 14) (функция $\delta(r)$ есть решение задачи Коши (2)). Если $\gamma < \gamma_d$, то графики зависимости $T(R_h)$ представляют собой гладкие кривые. При $\gamma = \gamma_d$ график $T(R_h)$ касается абсциссы в точке R_d , а температура ЧД равна нулю. Если $\gamma > \gamma_d$, кривая распадается на две ветви, соответствующие точкам E_2 (левая ветвь) и B_2 (правая ветвь) на рис. 9.

Продемонстрированные особенности зависимости $R(M_\infty)$ следует учитывать при проведении численных экспериментов. Пусть для некоторого $q > 0$ характерные параметры γ_d и R_d вычислены (раздел 2.2.3). При $\gamma < \gamma_d$ зависимость $R_h(M_\infty)$ является взаимно-однозначной. Поэтому с математической точки зрения существенно проще решать нелинейную краевую задачу для уравнений (1) с фиксированной левой границей R_h (раздел 3), а массу M_∞ находить по формуле (3). Для проверки целесообразно использовать закон сохранения

$$M_\infty = 2\pi R_h^2 T + \frac{q^2}{R_\infty} - \int_{R_h}^{R_\infty} e^{-\delta} \left[2e^{2\alpha\varphi} \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^4 + q^2}} - 1 \right) + \gamma^2 V(\varphi) \right] r^2 dr. \quad (48)$$

Аналогично считается и кривая $R_h(M_\infty)$ при $\gamma = \gamma_d$ за исключением точки R_d , в которой постановка краевой задачи с фиксированным левым концом описана в разделе 2.2.3.

При $\gamma > \gamma_d$ сначала вычисляем (см. раздел 2.2) экстремальные горизонты R_l и R_h и по ним - соответствующие массы M_l и M_h (см. разделы 3 и 4). Тем самым определяем полином $S_3(R)$ и частное ρ . Если $\rho < 3$, то в интервале $M_l < M_\infty < M_h$ ЧД имеет ровно три регулярных горизонта R_l , R_m и R_h . При $\rho = 3$ ЧД имеет единственный экстремальный горизонт R_h . Если $\rho > 3$, то ЧД имеет при $M_l < M_\infty < M_h$ либо два, либо три горизонта, которые являются корнями полинома (45). При $R > R_c$ ЧД имеет только один регулярный горизонт (см. раздел 2.1).

6 Заключение

Показано, что в зависимости от вида и числа горизонтов для уравнений сферически - симметричной заряженной ЧД в рамках струнной теории Эйнштейна-Борна-Инфельда с массивным дилатоном необходимо формулировать разные краевые задачи. Для их решения предложены эффективные итерационные методы на основе НАМН в сочетании с методом сплайн-коллокации для решения возникающих нелинейных задач.

Особо важный класс решений уравнений ЧД составляют т.н. экстремальные решения, горизонты для которых находятся из нелинейной алгебраической системы, зависящей от заряда q и массы дилатона γ . На графике зависимости горизонтов

от массы ЧД наличие экстремальных горизонтов проявляется в появлении отдельных ветвей, соответствующих ЧД с одним, двумя и тремя горизонтами. Важным частным случаем является единственное решение этой системы, представляющее трижды вырожденный горизонт. После решения красных задач для ЧД с экстремальными горизонтами и вычисления соответствующих масс ЧД строится эрмитов кубический полином, реальные корни которого определяют число и вид горизонтов в общем случае.

7 Благодарности

Авторы выражают благодарность своим коллегам из группы JGGA¹ С. Язджиеву и М. Тодорову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 00-01-00617 и гранта Софийского университета 404/2001.

Список литературы

- [1] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences Series, Oxford University Press, 1998; Selected Papers, Vol. 6, *The mathematical Theory of Black Holes and Colliding Plane Waves*, Uni. Chicago Press, 1991.
- [2] P. T. Chruściel, *Black Holes*, gr-qc/0201053.
- [3] R. Casadio, B. Harms, *Can black holes and naked singularities be detected in accelerators?*, e-print: hep-ph/0110255.
- [4] D.M. Eardley, S.B. Giddings, *Classical Black Hole Production in High-Energy Collisions*, e-print: gr-qc/0201034.
- [5] L.A. Anchordoqui, L. Feng, H. Goldberg, A.D. Shapere, *Black Holes from Cosmic Rays: Probes of Extra Dimensions and New Limits on TeV-Scale Gravity*, e-print: hep-ph/0112247;
- [6] K.A. Bronnikov, *Spherically symmetric false vacuum: no-go theorems and global structure*, e-print: gr-qc/0104092.
- [7] K.A. Bronnikov, G.N. Shikin, *Spherically symmetric scalar vacuum: no-go theorems, black holes and solitons*, e-print: gr-qc/0109027.

¹<http://webgate.bg/jgga/>

- [8] K.A. Bronnikov, *Scalar vacuum structure in general relativity and alternative theories. Conformal continuations*, gr-qc/0110125;
- [9] S.A.Hayward, T. Shiromizu, K. Nakao, *Phys. Rev.* **D49**, 5080 (1994).
- [10] Y.N. Obukhov, F.W. Hehl, in *Black Holes: Theory and Observations*, Eds. F.W. Hehl, R.K. Metzler, Springer, 1998, p.289.
- [11] S. Nojiri, S. Odintsov, *Int. J. Mod. Phys.* **A16**,1015 (2001).
- [12] R. Gregory, J. Harvey, *Black holes with a massive dilaton*, *Phys. Rev D* **47**, 2411 (1993)
- [13] J. Horne, G. Horowitz, *Black Holes Coupled to a Massive Dilaton*, *Nucl.Phys. B* **399** (1993) 169-196; **e-print**: hep-th/9210012.
- [14] S.S. Yazadjiev, P.P. Fiziev, T.L. Boyadjiev, and M.D. Todorov, Electrically Charged Einstein-Born-Infeld Black Holes with Massive Dilaton, *Comm. JINR Dubna, E2-2001-221; Mod. Phys. Lett. A*, v. 16, No 33 (2001), pp. 2143-2149.
- [15] S. Hawking, *Hawking on the Big Bang and Black Holes*, World Sci, Singapore, 1993.
- [16] H. Narai, *Sci. Rep. Tohoku Univ. Ser. I* **35**, 62 (1951).
- [17] I. V. Puzynin, I. V. Amirhanov, E. V. Zemlyanaya, V. N. Pervushin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, and V. D. Lakhno, in *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*, 1999, vol. **30**, No 1, p. 87.
- [18] T. Tamaki, T. Torii, *Gravitating BIon and BIon black hole with a dilaton*, *Phys.Rev.* **D62**, 061501R (2000)
- [19] T. Tamaki, T. Torii, *Dyonic BIon black hole in string inspired model*, e-print: gr-qc/0101083.
- [20] Е.П. Жидков, Н.В. Пузынин, *ДАН СССР*, т. 180, 1, 1968, с. 18.
- [21] L. I. Ponomarev, I. V. Puzynin, and T. P. Puzynina, *J. Comp. Phys.* **13**(1), 1 (1973).
- [22] L. I. Ponomarev, I. V. Puzynin, and T. P. Puzynina, *J. Comp. Phys.* **22**(1), 125 (1976).
- [23] A. T. Filippov, I. V. Puzynin, and D. P. Mavlo, *J. Comp. Phys.* **22**(2), 150 (1976).
- [24] R. G. Airapetyan and I. V. Puzynin, *Comput. Phys. Comm.* **102**, 97 (1997).

- [25] Е.П. Жидков, Г.П. Макаренко, И.В. Пузынин. ЭЧАЯ. т. 4. вып. 1, 1973, с. 172.
- [26] V. V. Ermakov and N. N. Kalitkin. *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* **21**(2), 235 (1981).
- [27] П.Н. Вабишевич, *Численные методы решения задач со свободной границей* Изд-во МГУ, 1987.
- [28] T.L. Boyadjiev, M.D. Todorov, P.P. Fiziev and S.S. Yazadjiev. *Mathematical Modeling of Boson-Fermion Stars in the Generalized Scalar-Tensor Theories of Gravity. J. Comp. Phys.*, v. 166, No 2, Jan. 2001, p. 253.
- [29] T. Boyadjiev, M. Todorov, P. Fiziev and S. Yazadjiev, New Numerical Algorithm for Modelling of Boson-Fermion Stars in Dilatonic Gravity, **e-print**: math.sc/0004108 (Accepted in *Journal of Applied and Computational Mathematics*).
- [30] T. Boyadjiev, M. Todorov, *Minimal Length of Josephson Junctions with Stable Fluxon Bound States, Supercond. Sci. Techn.*, **14** (2002).
- [31] В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин, Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона, *ЖВММФ*, **21**, No 2, 1981, стр. 491.

Получено 8 января 2002 г.