сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12946

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

К ТЕОРИИ МИРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

1979

Предложена модель одномерно-протяженного релятивистского объекта, динамика которого определяется требованием, чтобы покрываемая им поверхность в пространстве Минковского имела постоянную среднюю кривизну h по каждому нормальному направлению. Частным случаем таких поверхностей является мировая поверхность релятивистской струны /минимальная поверхность с $h=0$/. С помощью методов дифференциальной геометрии исследуются наиболее интересные случаи размерности объемлющего псевдоевклидова пространства-времени $D=3,4$. В случае $D=3$ предложенная модель описывается одним нелинейным уравнением: $\Box\phi = h\,\mathrm{sh}\,\phi$. В четырехмерном пространстве-времени динамика модели определяется системой двух уравнений:

$$\Box\phi = \frac{1}{2}h(e^{\phi} - e^{-\phi}\cos\theta),\quad \Box\theta = \frac{1}{2}h\, e^{-\phi}\cdot\sin\theta.$$

В рамках геометрического подхода получено представление Лакса для этой системы, кратко обсуждается применение метода обратной задачи рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в теории элементарных частиц возник интерес к одномерно-протяженным релятивистским объектам - струнам [1,2]. В процессе своего движения такие объекты покрывают двумерную поверхность в пространстве Минковского. Эти поверхности можно изучать методами дифференциальной геометрии [3-5], когда в качестве динамических переменных выбираются коэффициенты основных квадратичных форм мировой поверхности струны, а не ее радиус - вектор. Коэффициенты этих форм, как функции координат на поверхности, удовлетворяют уравнениям Гаусса-Петерсона-Кодацци-Риччи, которые можно рассматривать как новые уравнения движения, существенно отличные от уравнений Эйлера-Лагранжа в обычном подходе. Конкретный вид этой системы уравнений определяется калибровкой, а также требованием, чтобы мировая поверхность струны была минимальной, которое с геометрической точки зрения означает равенство нулю ее средней кривизны.

Основываясь на геометрической формулировке данной задачи, представляется естественным в качестве обобщения модели релятивистской струны рассмотреть более широкий класс мировых поверхностей с постоянной средней кривизной.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА

Напомним кратко основные положения обычной теории релятивистской струны [1]. Функция действия в этой модели берется в следующем виде:

$$S = -\gamma \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} = -\gamma \iint d^2u \sqrt{-g(u)}, \qquad /1/$$

где

$$\dot{x}^{\mu} = \partial x^{\mu}(\tau,\sigma)/\partial\tau, \quad x'^{\mu} = \partial x^{\mu}(\tau,\sigma)/\partial\sigma, \quad g = \det g_{ij},$$

$g_{ij} = (\partial x^{\mu}/\partial u^{i})(\partial x_{\mu}/\partial u^{j})$ - метрический тензор на мировой поверхности струны $x^{\mu}(\tau,\sigma)$, $u^1=\tau$, $u^2=\sigma$, $i,j=1,2$. Постоянная γ, имеющая размерность обратного квадрата длины, введена в /1/ для правильной размерности. В теории струны предполагается, что $g<0$ и $g_{11}=\dot{x}^2>0$, $g_{22}=x'^2<0$. Вариационный принцип для функционала /1/ приводит к задаче о нахождении минимальной поверхности, покрываемой струной в пространстве Минковского.

В изометрической системе координат на мировой поверхности струны

$$\lambda = g_{11} = \dot{x}^2 = -g_{22} = -x'^2, \quad g_{12} = \dot{x}x' = 0 \qquad /2/$$

уравнение Эйлера-Лагранжа $\delta\sqrt{-g}/\delta x^{\mu} = 0$ сводится к уравнению д'Аламбера для радиус-вектора $x^{\mu}(\tau,\sigma)$:

$$\ddot{x}^{\mu}(\tau,\sigma) - x''^{\mu}(\tau,\sigma) = 0. \qquad /3/$$

Согласно основной теореме из дифференциальной геометрии [6] искомую поверхность можно описать не только ее радиус-вектором $x^{\mu}(\tau,\sigma)$, но и основными квадратичными формами поверхности. Поэтому коэффициенты этих форм g_{ij} и $b_{\alpha|ij}$, $\alpha=1,2$, можно рассматривать как динамические переменные для релятивистской струны. В терминах этих переменных из уравнений движения /3/, с учетом /2/, следует, что средняя кривизна минимальной поверхности в каждом нормальном направлении равна нулю:

$$h_{\alpha} = \frac{1}{2} g^{ij} b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = 1,2. \qquad /4/$$

Конформная инвариантность уравнений /2/, /4/ позволяет наложить на $b_{\alpha|ij}$ два дополнительных условия так, чтобы окончательно зафиксировать координатную сеть на данной поверхности. В качестве таких условий удобно взять релятивистски-инвариантную калибровку [4,5], в которой

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = q_{\pm}^2. \qquad /5/$$

В таком подходе к теории релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени уравнения движения /3/ и нелинейные дополнительные условия /2/ и /5/ объединяются в одно нелинейное уравнение на новую динамическую переменную $u(\tau,\sigma) = -\ln\lambda$ [4,5]:

$$u_{\tau\tau} - u_{\sigma\sigma} = R\exp u. \qquad /6/$$

Релятивистская струна в четырехмерном пространстве Минковского в калибровке /5/ также описывается уравнением Лиувилля /6/, но в отличие от трехмерного случая - уже на комплексно-значную функцию $u(\tau,\sigma)$ [5]. Уравнение /6/ имеет солитонные решения, которые в квазиклассическом приближении приводят к новому спектру масс по сравнению с обычным подходом к теории дуальной струны [5].

3. ОБОБЩЕНИЕ СТРУННОЙ МОДЕЛИ. ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

В рамках геометрического подхода естественным обобщением модели релятивистской струны является рассмотрение более общего класса мировых поверхностей с постоянной средней кривизной $h = \mathrm{const}$. Ниже будет изложен геометрический подход к теории одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны в трех- и четырехмерном пространстве-времени.

В изотермической системе координат /2/ на произвольной поверхности $x^{\mu}(u^1,u^2)$, вложенной в трехмерное псевдоевклидово пространство, первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$\phi_1 = ds^2 = \lambda\, du^+ du^-, \qquad /7/$$

$$\phi_2 = h\, ds^2 + \frac{1}{2}\lambda[Q_+(du^+)^2 + Q_-(du^-)^2], \qquad /8/$$

где $Q_{\pm} = \frac{1}{2}(b_1^1 - b_2^2 \pm 2b_2^1)$ и введены конусные переменные $u^{\pm} = u^1 \pm u^2$. Коэффициенты этих форм $\lambda = g_{11}$, b_{ij}, $i,j = 1,2$, как функции координат u^i, заданных на поверхности, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци [6].

Уравнения Петерсона-Кодацци в нашем случае записываются следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial u^-} - \lambda^{-1}\frac{\partial(\lambda Q_-)}{\partial u^+} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial u^+} - \lambda^{-1}\frac{\partial(\lambda Q_+)}{\partial u^-} = 0. \qquad /9/$$

Учитывая теперь, что для рассмотренной поверхности $h = \mathrm{const}$, получаем

$$\lambda Q_{\pm} = q_{\pm}(u^{\pm}), \qquad /10/$$

где $q_{\pm}(u^{\pm})$ - произвольные функции. Оставшийся после наложения условий /2/ произвол в выборе координатной сетки на данной поверхности можно использовать, чтобы зафиксировать координатную сеть в линиях кривизны [7]:

$$b_{12} = 0. \qquad /11/$$

Используя инвариантность уравнений /2/ и /4/ относительно конформных преобразований координат $\tilde{u}^{\pm} = \tilde{u}^1 \pm \tilde{u}^2 = f_{\pm}(u^{\pm})$, легко показать, что соответствующим выбором функций $f_{\pm}$ условию /11/ всегда можно удовлетворить. Действительно, если положить

$$\tilde{u}^{\pm} = 2\int du^{\pm}\sqrt{q_{\pm}(u^{\pm})}, \qquad /12/$$

то первая и вторая квадратичные формы /7/-/8/ преобразуются следующим образом:

$$\phi_1 = ds^2 = \frac{\lambda}{4\sqrt{q_+ q_-}}[(d\tilde{u}^1)^2 - (d\tilde{u}^2)^2], \qquad /13/$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1 + \frac{h\lambda}{\sqrt{q_+ q_-}})(d\tilde{u}^1)^2 + \frac{1}{4}(1 - \frac{h\lambda}{\sqrt{q_+ q_-}})(d\tilde{u}^2)^2. \qquad /14/$$

В новых переменных /12/ уравнение Гаусса имеет вид

$$\Box \ln\lambda = \frac{1}{2}(\frac{h^2\lambda}{\sqrt{q_+ q_-}} - \frac{\sqrt{q_+ q_-}}{\lambda}), \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial(\tilde{u}^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(\tilde{u}^2)^2}. \qquad /15/$$

Если средняя кривизна поверхности $h = 0$, то вводя обозначение $\lambda = 1/4\sqrt{q_+ q_-}\cdot \exp u$, из /15/ получаем уравнение Лиувилля /6/. В рассматриваемом случае $(h = \mathrm{const})$ с помощью замены $\lambda = \sqrt{q_+ q_-}\exp\phi/h$ /15/ сводится к нелинейному уравнению на функцию $\phi(u^1, u^2)$:

$$\Box\phi = h\,\mathrm{sh}\,\phi. \qquad /16/$$

С учетом этой замены первая и вторая квадратичные формы /13/-/14/ принимают вид

$$\phi_1 = \frac{\exp\phi}{4h}[(du^1)^2 - (du^2)^2], \qquad /17/$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1 + \exp\phi)(du^1)^2 + \frac{1}{4}(1 - \exp\phi)(du^2)^2. \qquad /18/$$

Таким образом, в трехмерном пространстве-времени теория одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны сводится к одному нелинейному уравнению /16/.

Покажем теперь, каким образом рассматриваемая модель может быть изложена в обычном подходе, когда в качестве динамических переменных выбираются координаты $x^{\mu}(u^1, u^2)$ радиус-вектора мировой поверхности. Уравнение /16/ по своему построению является условием совместности деривационных формул Гаусса-Вейнгартена [6]. Деривационные формулы Гаусса для данной поверхности записываются следующим образом:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(\dot{\lambda}\dot{\vec{x}} + \lambda'\vec{x}') - b_{11}\vec{n},$$

$$\dot{\vec{x}}' = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(\lambda'\dot{\vec{x}} + \dot{\lambda}\vec{x}') - b_{12}\vec{n}, \qquad /19/$$

$$\vec{x}'' = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(\dot{\lambda}\dot{\vec{x}} + \lambda'\vec{x}') - b_{22}\vec{n},$$

где $\vec{n} = [\dot{\vec{x}} \times \vec{x}']/\sqrt{|g|}$ - единичный пространственноподобный вектор. Вычитая в /19/ из первого уравнения третье и учитывая /4/, получаем хорошо известный в теории поверхностей[8] результат

$$\Box \vec{x} + 2h[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}'] = 0 , \qquad /20/$$

справедливый для любого регулярного отображения $x^{\mu}(u^1, u^2)$. В изотермической системе координат /2/ на рассматриваемой поверхности $x^{\mu}(u^1, u^2)$ уравнения движения /20/ есть уравнения Эйлера для функционала

$$S = -\kappa \iint d^2u \{\sqrt{-g} + \frac{2h}{3}(\vec{x}[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}'])\} . \qquad /21/$$

Здесь следует отметить сходство рассматриваемой модели с теорией релятивистской струны, взаимодействующей специальным образом с внешним скалярным полем[3].

Условия калибровки для $x^{\mu}(u^1, u^2)$, позволяющие зафиксировать координатную сеть в линиях кривизны /11/, можно получить, используя конформную инвариантность уравнений движения /20/ и дополнительных условий /2/. Для этого, как обычно, перейдем к новым переменным $\tilde{u}^i(u^j)$ по формуле /12/, в которой следует положить

$$q_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}']}{2\dot{\vec{x}}^2}(\ddot{\vec{x}} + \vec{x}'' \pm 2\dot{\vec{x}}'),$$

тогда в этих переменных выполняются следующие условия:

$$\dot{\vec{x}}'[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}'] = 0, \quad (\ddot{\vec{x}} + \vec{x}'')[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}'] = \dot{\vec{x}}^2/2 . \qquad /22/$$

Подставляя разложения /19/ в /22/, получаем для коэффициентов второй квадратичной формы выражения /14/.

Таким образом, в трехмерном пространстве-времени динамика одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны h в обычном подходе полностью определяется уравнениями движения /20/ и дополнительными условиями /2/, /22/.

4. ОБОБЩЕНИЕ СТРУННОЙ МОДЕЛИ. ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Если произвольная поверхность с метрикой /2/ вложена в четырехмерное пространство Минковского, в каждой точке этой поверхности можно построить две ортогональные друг другу пространственноподобные нормали η^{μ}_{a}, $a = 1,2$. Поэтому для описания данной поверхности в геометрическом подходе, кроме коэффициента первой квадратичной формы $g_{11} = \lambda$, требуется два тензора второй квадратичной формы $b_{a|ij}$ и один вектор кручения $\nu_{12|i} (= -\nu_{21|i})$, $a, i, j = 1,2$[6]. Эти величины, как функции координат u^i, заданных на поверхности, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи. В рассматриваемом случае система этих уравнений записывается следующим образом:

<u>уравнение Гаусса</u>

$$\Box \ln\lambda = 2\lambda^{-1}[\lambda^2 \cdot H - (\lambda Q_{1+})(\lambda Q_{1-}) - (\lambda Q_{2+})(\lambda Q_{2-})], \qquad /23/$$

<u>уравнение Риччи</u>

$$\frac{\partial\nu_-}{\partial u^+} - \frac{\partial\nu_+}{\partial u^-} = \lambda^{-1}[(\lambda Q_{1+})(\lambda Q_{2-}) - (\lambda Q_{1-})(\lambda Q_{2+})], \qquad /24/$$

<u>уравнения Петерсона-Кодацци</u>

$$2\frac{\partial(\lambda Q_{1-})}{\partial u^+} = \nu_+(\lambda Q_{2-}) - \nu_- h_2\lambda, \quad 2\frac{\partial(\lambda Q_{2-})}{\partial u^+} = -\nu_+(\lambda Q_{1-}) + \nu_- h_1\lambda,$$

$$/25/$$

$$2\frac{\partial(\lambda Q_{1+})}{\partial u^-} = \nu_-(\lambda Q_{2+}) - \nu_+ h_2\lambda, \quad 2\frac{\partial(\lambda Q_{2+})}{\partial u^-} = -\nu_-(\lambda Q_{1+}) + \nu_+ h_1\lambda,$$

где $(\lambda Q_{a\pm}) = \frac{1}{2}(b_{a|11} + b_{a|22} \pm 2b_{a|12})$, $a = 1,2$, $\nu_{\pm} = \nu_1 \pm \nu_2$, $\nu_1 = \nu_{12|1}$, $\nu_2 = \nu_{12|2}$, $H = h_1^2 + h_2^2$, h_a - средние кривизны в каждом нормальном направлении /см. формулу /4//, которые в дальнейшем будем считать константами.

Для анализа уравнений /23/-/25/ удобно ввести вместо $\nu_{\pm}$ новые переменные, определяемые соотношениями

$$\nu_{\pm} = \frac{q_+}{q_-} \cdot \frac{\partial(\chi \mp \theta)}{\partial u^{\pm}} . \qquad /26/$$

С учетом /26/ уравнения Петерсона-Кодацци /25/ можно проинтегрировать относительно $(\lambda G_{\alpha\pm})$, $\alpha=1,2$:

$$h_2(\lambda G_{2\pm}) + h_1(\lambda G_{1\pm}) = q_+ \cdot \sin\frac{\chi\pm\theta}{2},$$

/27/

$$h_1(\lambda Q_{2\pm}) - h_2(\lambda Q_{1\pm}) = q_- \cdot \cos\frac{\chi\pm\theta}{2}.$$

Здесь $q_\pm(h_1,h_2)$- произвольные константы, линейные по h_1 и h_2, конкретный вид которых определим ниже, а функции $\chi(u^1,u^2)$ и $\theta(u^1,u^2)$ связаны с коэффициентом первой квадратичной формы $g_{11}=\lambda$ соотношением

$$\cos\theta - \cos\chi = 2q_+^2(\lambda H)^2/(q_+^2-q_-^2)^2 . \qquad /28/$$

Подстановка выражений /26/ и /27/-/28/ в уравнения Гаусса /23/ и Риччи /24/ дает

$$\Box\ln\lambda = 2\lambda^{-1}\cdot\frac{q_-^2}{H}\left[\lambda^2\frac{H^2}{(q_-^2-q_+^2)} - \cos\theta\right], \qquad /29/$$

$$\Box\theta = 2\lambda^{-1}\frac{q_-^2}{H}\cdot\sin\theta, \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2}. \qquad /30/$$

Если поверхность $x^\mu(u^1,u^2)$ погружена в трехмерное псевдоевклидово пространство, то вектор $\nu_{12|i}$ и тензор $b_{2|ij}$, $i,j=1,2$, равны нулю и соотношения /28/ нет. Поэтому $h_2=0$, $\theta=0$, $\cos\chi/2=0$, $\sin\chi/2=1$. Вводя обозначения $\lambda=\sqrt{q_-^2-q_+^2}\cdot\exp\phi/h^2$, $h_1=h$ и выбирая соответствующим образом константы $q_\pm(h,0)$, из /29/-/30/ получаем нелинейное уравнение /16/. Если же средняя кривизна данной поверхности в каждом нормальном направлении равна нулю, $h_\alpha=0$, $\alpha=1,2$, то подстановка $\lambda=2q_-^2/H\cdot R\exp\phi$ сводит систему уравнений /29/-/30/ к нелинейному уравнению Лиувилля /6/ на комплекснозначную функцию $u=\phi+i\theta$. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать, что $h_1=h_2=h$, а произвольные константы $q_\pm$ выберем в виде $q_-^2=2q_+^2$, $q_+=h/8$. Тогда с помощью замены $\lambda=\exp\phi/16h$ /29/-/30/ сводится к системе двух нелинейных уравнений на функции $\phi(u^1,u^2)$ и $\theta(u^1,u^2)$:

$$\Box\phi = \frac{h}{2}(e^\phi - e^{-\phi}\cdot\cos\theta), \quad \Box\theta = \frac{h}{2}e^{-\phi}\cdot\sin\theta. \qquad /31/$$

С учетом этой замены коэффициенты вторых квадратичных форм $b_{\alpha|ij}$, $\alpha,i,j=1,2$, на рассматриваемой поверхности принимают вид

$$b_{1|11}=\frac{1}{16}[f_-(\chi,\theta)+e^\phi], \quad b_{1|12}=\frac{1}{16}g_+(\chi,\theta), \quad b_{1|22}=\frac{1}{16}[f_-(\chi,\theta)-e^\phi],$$

$$b_{2|11}=\frac{1}{16}[f_+(\chi,\theta)+e^\phi], \quad b_{2|12}=\frac{1}{16}g_-(\chi,\theta), \quad b_{2|22}=\frac{1}{16}[f_+(\chi,\theta)-e^\phi],$$

где введены обозначения $f_\pm(\chi,\theta)=(\sin\frac{\chi}{2}\pm\sqrt{2}\cos\frac{\chi}{2})\cos\frac{\theta}{2}$, $g_\pm(\chi,\theta)=(\cos\frac{\chi}{2}\pm\sqrt{2}\sin\frac{\chi}{2})\sin\frac{\theta}{2}$. Таким образом, в четырехмерном пространстве Минковского теория одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны в каждом нормальном направлении, в отличие от трехмерного случая, сводится к системе двух нелинейных уравнений /31/.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Система уравнений /31/ по своему построению является условием совместности деривационных формул Гаусса-Вейнгартена [6], представляющих собой дифференциальные операторы первого порядка. Поэтому представляется естественным рассматривать эти операторы в качестве пары операторов Лакса, которые необходимы для решения системы нелинейных уравнений /31/ методом обратной задачи рассеяния [9-11].

Введем в рассмотрение единичный ортогональный базис

$$e_1^\mu=\dot{x}^\mu/\sqrt{|g_{11}|}, \quad e_2^\mu=-i\acute{x}^\mu/\sqrt{|g_{22}|}, \quad e_3^\mu=-i\eta_1^\mu, \quad e_4^\mu=-i\eta_2^\mu, \qquad /34/$$

где $\dot{x}^\mu$ и $\acute{x}^\mu$ - касательные векторы в данной точке поверхности, а η_α^μ, $\alpha=1,2$ - два ортогональных друг другу пространственноподобных орта, которые ортогональны еще и к $\dot{x}^\mu$ и $\acute{x}^\mu$. При движении по поверхности с метрикой /2/ изменение этого базиса сводится к вращению в четырехмерном евклидовом пространстве R^4. Деривационные формулы в базисе /34/ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial e_1^\mu}{\partial u^1} = \frac{i\phi'}{2}e_2^\mu - \frac{i\sqrt{h}}{4}\left[e^{-\frac{\phi}{2}}f_-(\chi,\theta)+e^{\frac{\phi}{2}}\right]e_3^\mu - \frac{i\sqrt{h}}{4}\left[e^{-\frac{\phi}{2}}f_+(\chi,\theta)+e^{\frac{\phi}{2}}\right]e_4^\mu,$$

$$\frac{\partial e_2^\mu}{\partial u^1} = -\frac{i\phi'}{2} e_1^\mu - \frac{\sqrt{h}}{4} g_+(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_3^\mu - \frac{\sqrt{h}}{4} g_-(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_4^\mu,$$

$$\frac{\partial e_3^\mu}{\partial u^1} = \frac{i\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_-(\chi,\theta) + e^{\frac{\phi}{2}}] e_1^\mu + \frac{\sqrt{h}}{4} g_+(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} \cdot e_2^\mu + \frac{1}{\sqrt{8}}(\dot{\chi} - \theta') e_4^\mu, \qquad /35/$$

$$\frac{\partial e_4^\mu}{\partial u^1} = \frac{i\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_+(\chi,\theta) + e^{\frac{\phi}{2}}] e_1^\mu + \frac{\sqrt{h}}{4} g_-(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_2^\mu - \frac{1}{\sqrt{8}}(\dot{\chi} - \theta') e_3^\mu,$$

$$\frac{\partial e_1^\mu}{\partial u^2} = \frac{i\dot{\phi}}{2} e_2^\mu - \frac{i\sqrt{h}}{4} g_+(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_3^\mu - \frac{i\sqrt{h}}{4} g_-(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_4^\mu, \qquad /36/$$

$$\frac{\partial e_2^\mu}{\partial u^2} = -\frac{i\dot{\phi}}{2} e_1^\mu - \frac{\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_-(\chi,\theta) - e^{\frac{\phi}{2}}] e_3^\mu - \frac{\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_+(\chi,\theta) - e^{\frac{\phi}{2}}] e_4^\mu,$$

$$\frac{\partial e_3^\mu}{\partial u^2} = \frac{i\sqrt{h}}{4} g_+(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_1^\mu + \frac{\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_-(\chi,\theta) - e^{\frac{\phi}{2}}] e_2^\mu + \frac{1}{\sqrt{8}}(\chi' - \dot{\theta}) e_4^\mu,$$

$$\frac{\partial e_4^\mu}{\partial u^2} = \frac{i\sqrt{h}}{4} g_-(\chi,\theta) e^{-\frac{\phi}{2}} e_1^\mu + \frac{\sqrt{h}}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}} f_+(\chi,\theta) - e^{\frac{\phi}{2}}] e_2^\mu - \frac{1}{\sqrt{8}}(\chi' - \dot{\theta}) e_3^\mu .$$

Кососимметрические матрицы в правых частях этих уравнений являются матрицами бесконечно малых вращений в четырехмерном евклидовом пространстве R^4. Учитывая, что локально группа $O(4)$ представима как $SU(2) \otimes SU(2)$, вращение базиса /35/, /36/ можно описать в терминах спиноров $\psi_+(u^1,u^2)$ и $\psi_-(u^1,u^2)$

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial u^j} = \frac{i}{2}(\vec{\omega}_+^j \cdot \vec{\sigma})\psi_+, \quad \frac{\partial \psi_-}{\partial u^j} = \frac{i}{2}(\vec{\omega}_-^j \cdot \vec{\sigma})\psi_-, \quad j = 1,2, \qquad /37/$$

где $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, а $\vec{\omega}_\pm^j$ даются выражениями

$$\begin{cases} \omega_{\pm 1}^1 = \pm \frac{\sqrt{h}}{4}[(f_+ \pm ig_+) e^{-\frac{\phi}{2}} + e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \omega_{\pm 2}^1 = \frac{\sqrt{h}}{4}[(f_- \mp ig_-) e^{-\frac{\phi}{2}} + e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \omega_{\pm 3}^1 = -\frac{i}{2}(i\phi' \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\theta' \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\chi}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{\pm 1}^2 = \frac{i\sqrt{h}}{4}[(f_- \mp ig_-) e^{-\frac{\phi}{2}} - e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \omega_{\pm 2}^2 = \mp \frac{i\sqrt{h}}{4}[(f_+ \pm ig_+) e^{-\frac{\phi}{2}} - e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \omega_{\pm 3}^2 = -\frac{i}{2}(i\dot{\phi} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\theta} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\chi'). \end{cases}$$

С геометрической точки зрения спиноры $\psi_\pm(u^1,u^2)$ являются чисто вспомогательными величинами. Тем не менее условие совместности спинорных уравнений /37/, так же как и условие совместности /35/-/36/, дает уравнения Гаусса и Риччи /31/ для квадратичных форм /2/, /32/-/33/. Более того, в рассматриваемом случае система нелинейных уравнений /31/ порождается условием совместности для каждого из спинорных уравнений /37/. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только первое из этих уравнений. Величины $\vec{\omega}_+^j$ в /37/ зависят только от функций $\phi(u^1,u^2)$ и $\theta(u^1,u^2)$, в то время как для метода обратной задачи рассеяния необходимо ввести в $\vec{\omega}_+^j$ еще и спектральный параметр γ. Для этого воспользуемся инвариантностью системы уравнений /31/ при лоренцевских преобразованиях в двумерном пространстве u^1, u^2: $\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2 = \gamma(u^1 + u^2)$, $\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2 = \gamma^{-1} \cdot (u^1 - u^2)$. Уравнения /37/ не инвариантны относительно такой замены и принимают вид:

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial \tilde{u}^j} = \frac{i}{2}\vec{\Omega}_+^j(\phi,\theta,\gamma)\vec{\sigma} \cdot \psi_+ \ , \quad j = 1,2 . \qquad /38/$$

Здесь

$$\begin{cases} \Omega_{+1}^1 = \frac{i}{4}[ie^{-\frac{\phi}{2}}(\gamma\Delta(\theta-\chi) - \frac{h}{2\gamma}\Delta(\theta+\chi)) - \lambda_+ e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \Omega_{+2}^1 = -\frac{1}{2}(i\phi' + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta' - \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\chi}), \\ \Omega_{+3}^1 = -\frac{i}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}}(\gamma\Delta(\theta-\chi) + \frac{h}{2\gamma}\Delta(\theta+\chi)) - i\lambda_- e^{\frac{\phi}{2}}]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega^2_{+1} = \frac{1}{4}[e^{-\frac{\phi}{2}}(\gamma\Delta(\theta-\chi) + \frac{h}{2\gamma}\Lambda(\theta+\chi)) + i\lambda_- e^{\frac{\phi}{2}}], \\ \Omega^2_{+2} = -\frac{1}{2}(i\dot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi'), \\ \Omega^2_{+3} = \frac{1}{4}[ie^{-\frac{\phi}{2}}(\gamma\Delta(\theta-\chi) - \frac{h}{2\gamma}\Lambda(\theta+\chi)) + \lambda_+ e^{\frac{\phi}{2}}] \end{cases}$$

и введены обозначения

$$\Delta(z) \equiv \sqrt{2}\cos\frac{z}{2} + i\sin\frac{z}{2}, \quad \lambda_\pm \equiv \frac{1}{4}(\gamma \pm \frac{h}{2\gamma}).$$

Для удобства в формуле /38/ совершен поворот в спинорном пространстве $\psi_+(u^1,u^2): \sigma_i \to u\sigma_i u^{-1}$, такой, что $u(a\cdot\sigma_3 - \beta\sigma_2)u^{-1} = \xi\sigma_3$. Как и раньше, условие совместности /38/ дает /31/. При $\theta \to 0$ /38/ представляет собой пару операторов Лакса для нелинейного уравнения /16/:

$$\frac{d\psi}{d\tilde{u}^1} = \frac{1}{2}\{-i(\gamma - \frac{h}{2\gamma})\operatorname{ch}\frac{\phi}{2}\sigma_3 + \phi'\sigma_2 + (\gamma + \frac{h}{2\gamma})\operatorname{sh}\frac{\phi}{2}\sigma_1\}\psi,$$

$$\frac{d\psi}{d\tilde{u}^2} = \frac{1}{2}\{i(\gamma + \frac{h}{2\gamma})\operatorname{ch}\frac{\phi}{2}\sigma_3 + \dot{\phi}\sigma_2 - (\gamma - \frac{h}{2\gamma})\operatorname{sh}\frac{\phi}{2}\sigma_1\}\psi. \qquad /39/$$

Обсудим кратко метод обратной задачи рассеяния /МОЗР/ для системы нелинейных уравнений /31/. Согласно /38/ линейная спектральная задача в данном случае сводится к уравнению

$$\frac{d\psi}{dx} + ip\sigma_2\psi + \frac{i\gamma}{4}(if_-\sigma_1 + f_+\sigma_3)\psi + \frac{ih}{8\gamma}(ig_+\sigma_1 + g_-\sigma_3)\psi = 0, \qquad /40/$$

где

$$f_\pm(x,t) \equiv [i\Delta(\theta-\chi)e^{-\frac{\phi}{2}} \pm e^{\frac{\phi}{2}}]/2, \; g_\pm(x,t) \equiv [i\Delta(\theta+\chi)e^{-\frac{\phi}{2}} \pm e^{\frac{\phi}{2}}]/2,$$

$$p(x,t) \equiv \frac{1}{4}(i\dot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi'), \quad x = \tilde{u}^2, \quad t = \tilde{u}^1,$$

а функции $\phi(x,t)$ и $\theta(x,t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\phi(x,t) \to 0, \quad \theta(x,t) \to 0 \qquad \text{при } |x| \to \infty. \qquad /41/$$

При вещественном $\gamma \neq 0$ определим, как обычно, решения Йоста $\Psi_\pm(x,\gamma)$ системы уравнений /40/ заданием их асимптотик при $x \to \pm\infty$ соответственно

$$\Psi_+(x,\gamma) \sim \Psi(x,\gamma), \; x \to +\infty; \; \Psi_-(x,\gamma) \sim \Psi(x,\gamma), \; x \to -\infty, \qquad /42/$$

где матрица $\Psi(x,\gamma) = \exp i\lambda_+\sigma_3 x$ является решением уравнения

$$\frac{d\Psi}{dx} = i\lambda_+\sigma_3\Psi,$$

в которое переходит уравнение /40/ при $|x| \to \infty$. С помощью интегральных уравнений для решений Йоста /42/ можно показать, что первый столбец f_1^+ матрицы Ψ_+ и второй столбец f_2^- матрицы Ψ_- допускают аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda_+(\gamma) > 0$ комплексной переменной γ:

$$|\gamma| > \sqrt{\frac{h}{2}}, \; \operatorname{Im}\gamma > 0; \qquad |\gamma| < \sqrt{\frac{h}{2}}, \; \operatorname{Im}\gamma < 0. \qquad /43/$$

Аналогичным образом второй столбец f_2^+ матрицы Ψ_+ и первый столбец f_1^- матрицы Ψ_- аналитически продолжаются в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda_+(\gamma) < 0$:

$$|\gamma| < \sqrt{\frac{h}{2}}, \; \operatorname{Im}\gamma > 0; \qquad |\gamma| > \sqrt{\frac{h}{2}}, \; \operatorname{Im}\gamma < 0. \qquad /44/$$

Поскольку $(d/dx)(\det\Psi_\pm) = \frac{i}{2}\operatorname{Sp}\Omega^2_k\sigma_k\Psi_\pm = 0$, то $\det\Psi_\pm = \det\Psi = 1$ и, таким образом, при вещественном $\gamma \neq 0$ решений Йоста $\Psi_\pm$ являются фундаментальными матрицами уравнения /40/:

$$\Psi_+(t,x,\gamma) = \Psi_-(t,x,\gamma)S(\gamma,t). \qquad /45/$$

Здесь $S(\gamma,t)$ - матрица перехода, элементы которой даются соотношениями

$$s_{11}(\gamma) = \det(f_1^+, f_2^-), \quad s_{22}(\gamma) = s_{11}(-\gamma), \quad s_{12}(\gamma) = \det(f_2^+, f_2^-), \qquad /46/$$

$$s_{21}(\gamma) = -s_{12}(-\gamma), \quad \det S(\gamma) = 1.$$

Из /46/ следует, что $s_{11}(\gamma)$ также допускает аналитическое продолжение /44/ по комплексной переменной γ.

Согласно выражению /38/ с j=1 матрица перехода $S(\gamma, t)$ удовлетворяет следующему эволюционному уравнению:

$$i \frac{dS(\gamma t)}{dt} = \lambda_+ [S(\gamma, t), \sigma_3],$$

в соответствии с которым зависимость от времени элементов матрицы перехода имеет вид

$$s_{11}(\gamma, t) = s_{11}(\gamma, 0), \quad s_{12}(\gamma, t) = s_{12}(\gamma, 0)\, e^{2i\lambda_- \cdot t}. \qquad /47/$$

Дальнейшее использование МОЗР /см. [13]/ для уравнения /40/ требует доказательства так называемых треугольных представлений для матричных решений Йоста $\Psi_\pm$. Основная трудность здесь состоит в исследовании асимптотического поведения $\Psi_\pm(\gamma)$ и $s_{ij}(\gamma)$, $i,j=1,2$ при $|\gamma| \to \infty$ в комплексной плоскости γ. Отметим, что аналогичная спектральная задача для оператора Дирака рассматривалась в работах[14]. Однако развитые там методы прямо перенести на уравнение /40/ не удается.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное обобщение модели релятивистской струны существенно отличается от предыдущих работ по этому вопросу[15] тем, что в теории сохраняется инвариантность относительно выбора координат u^1 и u^2 на мировой поверхности струны. Именно это обстоятельство и позволяет в конечном счете описать динамику модели нелинейными уравнениями /31/ или /16/.

В нашей работе совершенно не затрагивалась проблема граничных условий, то есть одномерно протяженный релятивистский объект /струна/ рассматривался как бесконечный. Для физических приложений интересно исследовать в рамках данной модели граничные условия для струны со свободными концами или же поместить на концы точечные массы. В последнем случае можно поставить задачу в духе работ[16] о потенциале, к которому приводит связь двух точечных масс струной в рассматриваемой нами обобщенной модели.

С точки зрения теории поверхностей с постоянной средней кривизной является интересным вопрос, можно ли и в случае четырехмерного пространства-времени подобрать функционал действия для предложенной модели в переменных $x^\mu(u^1, u^2)$, аналогичный /21/.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить за интерес к работе Н.А.Черникова, Н.С.Шавохину, В.К.Мельникова и А.Л.Кошкарова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rebbi C. Phys.Rev., 1974, 12C, p.3; Scherk J. Rev.Mod. Phys., 1975, 47, p.123;
   Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып.5, с.709.
2. Nambu Y. Phys.Lett., 1979, 80B, p.372; Gervais J., Neveu A. Phys.Lett., 1979, 80B, p.255; Polyakov A,M. Phys.Lett., 1979, 82B, p.247; Durand L., Mendel E. Phys. Lett., 1979, 85B, p.241.
3. Lund F., Regge T. Phys.Rev., 1976, D14, p.1524.
4. Omnes R. Nucl.Phys., 1979, B149, p.269;
   Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ТМФ, 1979, 39, с.27.
5. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. В кн.: Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля /Алушта, 1979/. ОИЯИ, Р2-12462, Дубна, 1979, с.300;
   Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ, 1979, 40, с.15; Journ.of Phys.,1979,A12,N 12.
6. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. ИЛ., М., 1948.
7. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. "Наука", М., 1978.
8. Оссерман Р. В сб. переводов "Математика", 15, №2, с.104, "Мир", М., 1971.
9. Lax P.D. Comm. Pure Appl., 1968, 21, p.467.
10. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1974, 21, с.160.
11. Ablowitz M.J. et al. Stud. in Appl.Math., 1974, 53, p.249.
12. Neveu A., Papanucolau N. Comm.Math.Phys., 1978, 58, p.31; Lund F. Phys.Rev., 1977, D15, p.1540.
13. Ablowitz M.J. Stud. in Appl.Math., 1978, 58, p.17;
    Захаров В.Е. В кн.: И.А.Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. "Наука", М., 1975, гл. 5.
14. Kaup D.J. Progr.Theor.Phys., 1975, 54, p.396; Stud. in Appl.Math., 1975, 54, p.165.
15. Takabayashi T. Progr.Theor.Phys., 1974, 51, 262, p.571.
16. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977; ОИЯИ, Р2-11295, Дубна, 1978; В кн.: Труды V Международного совещания по нелокальным теория поля. "Проблемы квантовой теории". ОИЯИ, Р2-12462, Дубна, 1979, с.340.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1979 года.