



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

1084/2-80

18/3-80

P2 - 12941

Ю.В.Катьшев, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ

### 1. Скалярная электродинамика.

Устойчивость кулоновского поля  
внешнего источника.

1979

Катышев Ю.В., Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г. P2 - 12941

Устойчивость частицеподобных образований.

I. Скалярная электродинамика. Устойчивость кулоновского поля внешнего источника

Показана устойчивость дальнедействующего кулоновского поля осесимметричного внешнего источника в /2+1/-мерной скалярной электродинамике на основе линейной теории устойчивости. Получены приближенные решения для малых колебаний скалярного поля. Проведено численное решение на ЭВМ уравнений малых колебаний, расчеты хорошо согласуются с приближенными решениями. Проведено сравнение с аналогичными результатами в /1+1/ и /3+1/-мерной скалярной электродинамике.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Katyshev Yu.V., Makhaldiani N.V.,  
Makhankov V.G.

P2 - 12941

The Stability of Particle-Like Formations.  
I. Scalar Electrodynamics. The Stability  
of the External Source's Coulomb Field

The stability of long-range Coulomb field of cylindrically symmetric external source in 2+1 dimensional scalar electrodynamics is proved. The approximate solutions of the equation of small fluctuation of scalar field is obtained. The same equation is solved by numerical computation, the results is in good agreement with approximate solutions. Comparison with the same considerations in 1+1 and 3+1 dimension is made.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В последнее время достигнут значительный прогресс в изучении существенно нелинейных явлений, описываемых с помощью эволюционных уравнений. Применение метода численного эксперимента на ЭВМ, с одной стороны, и мощных аналитических методов - с другой, позволяет выявить и изучить ряд вполне интегрируемых и близких к ним нелинейных систем<sup>/1/</sup>. При этом значение нелинейных /солитонных/ решений зависит от их устойчивости<sup>/2/</sup>. Для проведения последовательного квазиклассического квантования устойчивость соответствующих классических решений также существенна<sup>/3/</sup>.

Одной из основных проблем теоретической физики высоких энергий является объяснение отсутствия кварков в свободном виде<sup>/4/</sup>. Существует несколько критериев, указывающих на механизм невылетаия<sup>/4,5/</sup>. Среди них наиболее простым и естественным представляется отсутствие устойчивых частицеподобных образований с цветом на классическом уровне рассмотрения<sup>/5/</sup>. Из вышесказанного следует важность изучения устойчивости решений нелинейных уравнений.

В данной работе на основе модели скалярной электродинамики в /2+1/-измерении изучена проблема устойчивости кулоновского поля внешнего источника. Во второй части работы проведено аналитическое и численное исследование уравнений малых колебаний.

1. Рассмотрим модель

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A_\mu, \quad /1/$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2,$$

J - внешний источник, который мы запишем в виде

$$J_\mu = Ze \delta_{\mu 0} \delta(x).$$



Уравнения движения имеют вид

$$D_{\mu}^2 \phi = 0, \quad /2/$$

$$\partial_{\mu} F_{\mu\nu} = j_{\nu} + J_{\nu}.$$

где

$$j_{\nu} = ie[\phi^* \partial_{\mu} \phi - \partial_{\mu} \phi^* \cdot \phi]$$

Нетрудно видеть, что значения

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = 0, \quad /3/$$

$$A_0 \neq 0,$$

удовлетворяют уравнениям /2/, если

$$\Delta A_0 = Ze\delta(x). \quad /4/$$

Решение уравнения /4/ есть

$$A_0(x) = ZeG(x), \quad /5/$$

где  $G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \rho, \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

Исследуем устойчивость решения /3,5/ по отношению к малым флуктуациям полей  $\phi$  и  $A$ .

Рассмотрим функции

$$\phi = \phi', \quad /6/$$

$$\vec{A} = \vec{A}'.$$

$$A_0 = ZeG(x) + A'_0,$$

близкие в некоторой степени к решению /3,5/. Подставим функции /6/ в уравнения движения /2/ и ограничимся линейным приближением по  $\phi'$  и  $A'$ . В дальнейшем, для простоты, штрихи у функции будем опускать. Уравнения Максвелла сводятся к свободным уравнениям

$$\partial^2 A_i - \partial_i \partial_j A_j = 0,$$

откуда, переходя к импульсному представлению, имеем условие поперечности и дисперсионное соотношение

$$K_{\mu} A_{\mu} = 0, \quad \omega^2 = K^2. \quad /7/$$

Следовательно, допустимые флуктуации поля  $A$ , которые подчиняются условиям /7/, со временем не могут увеличиваться и приводить к неустойчивости. Для скалярного поля имеем

$$[\partial_0 - iZe^2 G(x)]\phi - \Delta\phi = 0. \quad /8/$$

Решения /8/ ищем в виде

$$\phi(x, t) = e^{-i\omega t} \phi(x).$$

Имеем

$$\Delta\phi + (\omega + q \ln \rho)^2 \phi = 0, \quad /9/$$

где

$$q = \frac{Ze^2}{2\pi}.$$

Уравнение /9/ в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \phi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \phi + (\omega + q \ln \rho)^2 \phi = 0.$$

Из однозначности функции  $\phi$  и симметрии задачи следует

$$\phi(\rho, \Phi) = \phi(\rho) e^{im\Phi}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

следовательно, для  $\phi(\rho)$  имеем

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \phi + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \phi + [(\omega + q \ln \rho)^2 - \frac{m^2}{\rho^2}] \phi = 0. \quad /10/$$

Перейдем к переменной  $r = \ln \rho$ , тогда

$$\phi'' - m^2 \phi + (\omega + qr)^2 e^{2r} \phi = 0.$$

Ограничимся решениями, удовлетворяющими условию

$$\phi^* \phi' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \pm \infty. \quad /11/$$

Рассмотрим систему

$$\phi'' - m^2 \phi + (\omega + qr)^2 e^{2r} \phi = 0,$$

$$\phi^{*''} - m^2 \phi^* + (\omega^* + qr)^2 e^{2r} \phi^* = 0.$$

Помножим первое уравнение на  $\phi^*$ , второе - на  $\phi$ , вычтем их друг из друга и проинтегрируем по  $r$ , тогда

$$(\phi' \phi^* - \phi \phi^{*'})_{-\infty}^{\infty} + (\omega - \omega^*) \int_{-\infty}^{\infty} (\omega + \omega^* + 2qr) e^{2r} |\phi|^2 = 0. \quad /12/$$

Первое слагаемое уравнения /12/ с учетом асимптотического поведения  $\phi$  равно нулю. Следовательно, имеются две возможности: либо  $\omega = \omega^*$ , либо второй интеграл в /12/ равен нулю. Ниже будут выведены асимптотические выражения для  $\phi$ , из которых следует, что этот интеграл не равен нулю. Остается только первая возможность. Следовательно, линейный оператор уравнения /10/ является самосопряженным на классе функций с условиями /12/, поэтому рассматриваемые малые колебания образуют полную систему. Решение /3,5/ является устойчивым по отношению к рассматриваемым малым флуктуациям полей  $A$  и  $\phi$ . Нетрудно убедиться в том, что решение /3,5/ неустойчиво в модели

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \kappa^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A_\nu, \quad /14/$$

которая отличается от модели /1/ наличием массового члена. Инкремент неустойчивости скалярного поля равен  $\kappa$ .

В отличие от рассмотренного случая, аналогичное кулоновское решение в /1+1/-мерной модели /1/ неустойчиво /6/. В /3+1/-мерной - устойчиво при  $q = Ze^2/(4\pi) < 1/2$  и неустойчиво при  $q > 1/2$  /7/см. приложение/.

2. Исследуем решения уравнения /10/. Удобно перейти к переменной  $\tau = 2(\ln \rho - \frac{\omega}{q})$ , тогда уравнение /10/ принимает вид

$$\phi'' - \frac{m^2}{4} \phi + c\tau^2 e^\tau \phi = 0, \quad /10'/$$

где  $c = \frac{q^2}{16} e^{-\frac{2\omega}{q}}$ .

При больших  $\tau$  применимо ВКБ-приближение /8/.

Сделаем подстановку

$$\phi = e^{i\Psi},$$

тогда имеем  $-\Psi'^2 + i\Psi'' + v = 0$ , где  $v(\tau) = c\tau^2 e^\tau - \frac{m^2}{4}$ .

Пусть  $|\Psi'^2| > |\Psi''|$ , тогда

$$\Psi' \approx \sqrt{v}, \quad /15/$$

Это приближение справедливо при

$$\left| \frac{v'}{2\sqrt{v}} \right| \ll |v|.$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\tau+2}{2\tau^2} \frac{e^{-\tau/2}}{(1 - \frac{m^2}{4\tau^2} e^{-\tau})^{3/2}} \approx \frac{1}{2\sqrt{c}} \frac{1}{\tau} e^{-\tau/2} \ll 1. \quad /16/$$

Вычислим  $\Psi''$  с помощью /15/, тогда

$$\Psi' \approx \sqrt{v} \left( 1 + \frac{i}{4} \frac{v'}{\sqrt{v}} \right),$$

$$\Psi \approx \int \sqrt{v} d\tau + \frac{i}{4} \ln v.$$

Следовательно, при больших  $\tau$ , когда соблюдается условие /16/, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{v}} \left[ A_+ e^{i \int \sqrt{v} d\tau} + A_- e^{-i \int \sqrt{v} d\tau} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau/4} \left[ A_+ e^{i\sqrt{c}/2(\tau-1/2)\tau^{3/2}} + A_- e^{-i\sqrt{c}/2(\tau-1/2)\tau^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad /17/$$

В окрестности  $\tau = 0$  решение можно получить в виде ряда

$$\phi = \sum_{n \geq 0} a_n \tau^n,$$

где

$$a_2 = \frac{m^2 a_0}{8}, \quad a_3 = \frac{m^2 a_1}{24}.$$

$$a_4 = \frac{a_0}{12} \left( \frac{m^2}{32} - c \right), \quad /18/$$

$$a_5 = \frac{1}{20} \left[ \left( \frac{m^4}{96} - c \right) a_1 - c a_0 \right], \dots$$

Вследствие линейности и однородности рассматриваемого уравнения, не ограничивая общности, можно фиксировать  $a_0$ , например,  $a_0 = 1$ , тогда все остальные коэффициенты разложения будут выражены с помощью  $a_1$ .

В области больших и отрицательных  $\tau$  /в случае  $m \neq 0$ / членом с экспонентой можно пренебречь, тогда нерастущее решение будет иметь вид

$$\phi \approx A e^{m\tau/2} \quad /19/$$

Для случая  $m=0$  и больших отрицательных  $\tau$  в качественной теории дифференциальных уравнений нет четких результатов /9/ о поведении решений. Получим приближенное решение. Сделаем подстановку  $\phi'/\phi = \Psi$ , тогда уравнение /11/ примет вид уравнения Риккати



$$\Psi' + \Psi^2 + cr^2 e^r = 0. \quad /20/$$

Последний член будем считать возмущением. Решение будем искать в виде  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ .

$$\Psi_0' + \Psi_0^2 = 0,$$

$$\Psi_0 = \frac{a}{1+ar},$$

где  $a$  - некоторая константа.

Для возмущения  $\Psi_1$  имеем

$$\Psi_1' + \frac{2a}{1+ar} \Psi_1 + \Psi_1^2 + cr^2 e^r = 0.$$

Пренебрегая членом  $\Psi_1^2$ , получим

$$\Psi_1' + \frac{2a}{1+ar} \Psi_1 + cr^2 e^r = 0. \quad /21/$$

Общее решение однородной части уравнения /21/ имеет вид

$$\Psi_1 = \frac{A}{(1+ar)^2}. \quad /22/$$

Подставим /22/ в /21/, при этом мы предполагаем, что  $a$  не является малой и положительной,  $A$  зависит от  $r$ , тогда

$$\frac{A'}{(1+ar)^2} + cr^2 e^r = 0,$$

$$A = -c \int (1+ar)^2 r^2 e^r = -c P_4(r) e^r + A_0,$$

где

$$P_4(r) = a^2 r^4 + 2a(1-2a)r^3$$

$$+ (12a^2 - 6a + 1)r^2 + (-24a^2 + 12a - 2)r + (24a^2 - 12a + 2).$$

Пренебрежение членом  $\Psi_1^2$  оправдано при  $A_0 = 0$ . Решение уравнения /21/ имеет вид

$$\Psi = \frac{a}{1+ar} - c \frac{P_4(r)}{(1+ar)^2} e^r,$$

следовательно,

$$\phi = e^{\int \Psi dr} \approx (1+ar) e^{c P_2(r) e^r}.$$

Ясно, что это решение не обладает нужной асимптотикой ( $\phi \rightarrow 0, r \rightarrow -\infty$ ), поэтому будем считать, что уравнение /11/ при  $m=0$  не обладает интересующим нас решением. Следовательно, малые флуктуации решений /3.5/ подчиняются уравнению /10'/ при  $m \neq 0$  и при больших, малых и больших отрицательных  $r$  ведут себя согласно /17/, /18/ и /19/, соответственно. Область  $m^2 \sim cr^2 e^r$  трудна для аналитического рассмотрения, однако ясно, что и в этой области решение ведет себя регулярно.

Нами проведено численное решение уравнения /10'/ методом Рунге-Кутты /10'/ на ЭВМ.

Для численного решения уравнений малых колебаний рассматриваем регуляризованную задачу.

Пусть

$$A_0 = \begin{cases} q \ln \rho_0, & \rho < \rho_0 \\ q \ln \rho, & \rho > \rho_0 \end{cases}. \quad /23/$$

Внутри окружности  $\rho < \rho_0$  уравнение малых колебаний имеет вид

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \phi + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \phi + [(\omega + q \ln \rho_0)^2 - \frac{m^2}{\rho^2}] \phi = 0,$$

регулярные решения этого уравнения совпадают с функциями Бесселя /11/

$$\phi_m = J_m(k\rho),$$

где

$$k^2 = (\omega + q \ln \rho_0)^2.$$

Вне окружности имеем уравнение /10/. Для обеспечения гладкости решений достаточно наложить условие сшивания

$$\frac{\phi'}{\phi} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{J_m'}{J_m}. \quad /24/$$

Непрерывность решений при  $\rho = \rho_0$  всегда можно обеспечить, так как уравнение линейное. Функция Бесселя  $J_m$  при малых  $\rho$  имеет поведение

$$J_m(k\rho) \sim (k\rho)^m,$$

поэтому условие /24/ дает

$$\frac{\phi'}{\phi} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{m}{\rho_0}. \quad /25/$$

При  $m=0$  и малых  $\rho$

$$J_0(k\rho) \approx 1 - \left(\frac{1}{2} k\rho\right)^2,$$

и из условия /24/ следует

$$\begin{aligned} \frac{\phi'}{\phi} \Big|_{\rho=\rho_0} &= -\frac{1}{2} k^2 \rho_0 = -\frac{1}{2} (\omega + q \ln \rho_0)^2 \rho_0 \\ &= -\frac{1}{2} q^2 \rho_0 \ln^2 \rho_0. \end{aligned}$$

/26/

Граничные условия /25/, /26/ для уравнения /10'/ и независимой переменной  $r$  имеют вид

$$\frac{\phi'}{\phi} \Big|_{r=r_0} = m/2,$$

$$\frac{\phi'}{\phi} \Big|_{r=r_0} = -c r_0^2 e^{r_0}.$$

Ниже приведены графики численных решений для случаев  $m=0, 1, 5, 10$ . Шаг координатной сетки равнялся  $10^{-4}$ . Численные решения согласуются с приближенными решениями /17/, /18/, /19/ \*.

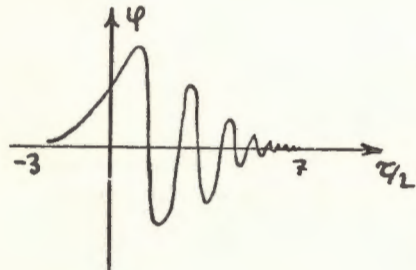


Рис. 1. Поведение решений уравнения малых колебаний /10'/ от переменной

$$r = 2(\ln \rho - \frac{\omega}{q}); \text{ при } m=1$$

$$\phi(-3) = 0,01, \phi'(-3) = 0,01, \\ \phi_{\max}(1,6) = 2,04, \phi_{\min}(1,6) = -1,18;$$

$$\text{при } m=5 \quad \phi(-3) = 10^{-3}, \phi'(-3) = 5 \cdot 10^{-3},$$

$$\phi_{\max}(1,6) = 8,51, \phi_{\min}(2,2) = -5,64;$$

$$\text{при } m=10 \quad \phi(-2) = 10^{-5}, \phi'(-2) = 10^{-4},$$

$$\phi_{\max}(1,9) = 24 \cdot 10^8, \phi_{\min}(2,2) =$$

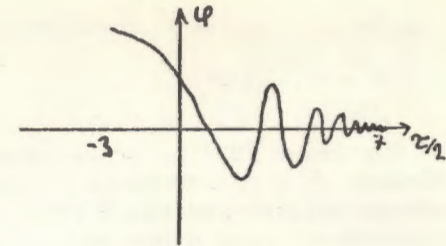
$$= -16 \cdot 10^8.$$

\* Расчеты были проведены на ЭВМ CDC-6500. Один вариант занимал примерно 130с рабочего времени центрального процессора.

Рис. 2. Поведение решений уравнения /10'/ при  $m=0$

$$\phi(-3) = 1, \quad \phi'(-3) = -0,08,$$

$$\phi_{\max}(-3) = 1, \quad \phi_{\min}(-1,6) = -0,26.$$



На основе проведенного исследования можно заключить, что решение /3,5/ в модели /1/ является устойчивым, а в модели /14/ - неустойчивым. Результат получен на основе линейной теории устойчивости и не зависит от величины внешнего источника. Кроме того, проведено аналитическое и численное исследование уравнения малых возмущений скалярного поля.

Авторы благодарят Д.В.Ширкова и Е.П.Жидкова за интерес к работе и полезные обсуждения. Один из авторов /Н.В.Махалдиани/ благодарит И.Л.Боголюбского, А.А.Владимирова, Д.И.Казакова, А.В.Кудинова, Нгуен Хью Монга, А.А.Расторгуева и О.К.Пашаева за обсуждения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Характер неустойчивости решения /3/ качественно можно понять следующим образом. Рассмотрим энергию скалярной частицы во внешнем поле

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - qG(x),$$

/П1/

где

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2} |x|, & 1+1 \text{ измерение} \\ \frac{1}{2\pi} \ln \rho, & 2+1, \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}, & 3+1 \\ -\frac{1}{(D-2)\Omega_D} \frac{1}{r^{D-2}}, & D+1, D \geq 3, \end{cases}$$

$$q = Ze^2$$

$\Omega_D$  - величина телесного угла в  $D$ -мерном пространстве. Собственное значение оператора  $\vec{p}^2$  можно представить

$$\text{в виде} \\ \vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2},$$



где  $M^2 = 0$  в /1+1/ пространстве-времени,

$M^2 = n^2$ ,  $n=0, \pm 1, \dots$ , в /2+1/ измерении

$M^2 = \ell(\ell+1)$ ,  $\ell=0, 1, \dots$ , в /3+1/ и т.д.

Выражение /П1/ не ограничено снизу в /1+1/ измерении при больших  $X$  и произвольном  $Z$ , следовательно, имеется абсолютная неустойчивость. В /2+1/ измерении при  $n \neq 0$  энергия ограничена снизу и при малых и при больших  $\rho$ , отсюда абсолютная устойчивость. В случае  $n=0$ , как было показано в данной работе, не существует состояния типа малых колебаний. В /3+1/ измерении характеры поведения кинетической и потенциальной частей уравнения /П1/ одинаковы  $\sim 1/\tau$ , поэтому, когда  $q = \frac{Ze^2}{4\pi} > \sqrt{\ell(\ell+1)}$ , энергия не ограничена снизу при малых  $\tau$  - "падение на центр". Более точное рассмотрение на основе уравнения движения с учетом асимптотик решений дает для неустойчивости условие  $q > \sqrt{\ell(\ell+1) + 1/4}$ , следовательно, при  $\ell=0$ ,  $q > 1/2$ . В пространствах с размерностью  $D > 3$  энергия всегда не ограничена снизу при малых  $\tau$  - имеется падение на центр.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G. Phys.Rep., 1978, 35, p.1.
2. Katyshev Yu.V., Makhaldiani M.V., Makhankov V.G. Phys. Lett., 1978, 66A, p.456.
3. Jackiw R. Rev.Mod.Phys., 1977, 49, p.681.
4. Callan C., Dashen R., Gross D. Phys.Rev., 1978, D17, p.2717; 1979, D19, p.1826.
5. Adler S.L. Phys.Rev., 1978, D18, p.411; 1978, D19, p.1168, 2997. Jackiw R. MIT Preprint, CTP 800, 1979.
6. Hey A.J.G., Mandula J.E. MIT preprint, 1979.
7. Schiff L., Snyder H., Weinberg J. Phys.Rev., 1940, 57, p.315.  
Мигдал А.Б. Фермионы и бозоны в сильных полях "Наука", М., 1978.
8. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. Атомиздат, М., 1972.
9. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, ИЛ, М., 1954.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. "Наука", М., 1966.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. "Наука", М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 ноября 1979 года.