сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12886

А.Б.Пестов

ТЕНЗОРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ.
ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

1979

P2 - 12886

А.Б.Пестов

ТЕНЗОРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Пестов А.Б. Р2 - 12886

Тензорное волновое уравнение. Движение в центральном поле

Установлено, что группа Пуанкаре может быть реализована как группа преобразований в пространстве особого рода величин, названных здесь тензорами-спинорами. Интерес тензоров-спиноров состоит в том, что построенное представление группы Пуанкаре двузначно, тогда как при нелинейных преобразованиях координат тензор-спинор преобразуется или как вектор, или как совокупность скаляра и самодуального антисимметричного тензора второго ранга. Предложенное ранее тензорное волновое уравнение может рассматриваться как уравнение для тензоров-спиноров. Найдены шаровые тензоры-спиноры. Решена задача о движении тензорной частицы в кулоновском поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Pestov A.B. P2 - 12886

Tensor Wave Equation. Motion in Central Field

It is shown that the Poincarê group can be realized as a group of transformations in a space of specific quantities called here "tensor-spinors". It is essential that the constructed representation of the Poincarê group is double-valued whereas under nonlinear coordinate transformations the tensor-spinor is transformed as a vector or as a combination of the scalar and self-dual antisymmetric tensor of the second rank. The tensor wave equation proposed earlier may be treated as an equation for tensor-spinors. Spherical tensor-spinors are obtained. Equations for radial functions are found from which it follows that the tensor wave function can describe the fine structure of hydrogen atom.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

ВВЕДЕНИЕ

В недавних работах автора было предложено особого рода тензорное волновое уравнение /1-9/. Представленное уравнение допускает группу внутренней симметрии, изоморфную группе $SU(2)$. Принципиально важно, что существование группы $SU(2)$ вытекает из однородности пространства-времени. Таким образом, в рамках тензорного волнового уравнения оказалось возможным включить внутренние симметрии в класс пространственно-временных симметрий.

В настоящем сообщении поставлена и решена задача о движении тензорной частицы во внешнем центрально-симметричном электростатическом поле. В первом разделе отмечены препятствия, возникшие при решении указанной задачи, и проанализирован вопрос о соотношении между понятиями тензора и представления группы. Этим мы ставили цель отыскать путь к разрешению трудностей и выявить внутренние, геометрические причины существования группы $SU(2)$. Основной вывод состоит в следующем. Тензор задается законом преобразования при переходе от одной системы, вообще говоря, криволинейных координат к другой системе координат. То, как действует группа непрерывных преобразований в пространстве тензоров данного строения, определяется этим законом однозначно, если многообразие, в котором заданы и тензор и группа, имеет простейшие геометрические свойства. В случае многообразий с богатой геометрической структурой это уже будет, вообще говоря, не так.

Доказательством тому служит введенный в настоящей работе тензор-спинор. Тензор-спинор по отношению к преобразованиям координат выступает или как вектор, или как совокупность скаляра и самодуального антисимметрического тензора второго ранга. Однако в пространстве тензоров-спиноров может быть задано двузначное представление группы Пуанкаре. Это установлено во втором и третьем разделах. В четвертом разделе найдены шаровые тензоры-спиноры. В пятом разделе выведены уравнения для радиальных функций, они совпадают с теми, которые следуют из уравнения Дирака.

1. ТЕНЗОРЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

Исследованию подлежит система уравнений

$$\partial^\sigma \psi_\sigma = \frac{mc}{h}\psi,$$
$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial^\alpha \psi^\beta = \frac{mc}{h}\psi_{\nu\mu}, \qquad /1/$$
$$\partial^\sigma \psi_{\sigma\mu} - \partial_\mu \psi = \frac{mc}{h}\psi_\mu,$$

где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - антисимметричный псевдотензор, причем $\epsilon_{0123} = 1$. Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Псевдотензор $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ позволяет антисимметричному тензору $\psi_{\mu\nu}$ /бивектору/ сопоставить дуальный бивектор $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta}$. Из второго уравнения системы /1/ следует, что бивектор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию самодуальности

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}. \qquad /2/$$

Волновую функцию тензорного волнового уравнения /1/ запишем в виде

$$\Psi = (\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu}).$$

Эта волновая функция соответствует тензорной частице. Ставится задача - изучить движение тензорной частицы в центрально-симметричном поле. Корректность постановки задачи доказана в /7/. Чтобы решить систему уравнений /1/ при наличии внешнего электрического поля, обладающего центральной симметрией, нужно найти полный набор коммутирующих операторов. Вначале, естественно, пришлось работать с тем набором коммутирующих операторов, который можно было собрать на основе известных сведений о входящих в волновое уравнение величинах. В процессе решения появились указания на то, что составленный набор не полон. Поэтому пришлось пересмотреть некоторые общепринятые положения.

Величины ψ, ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, очевидно, есть тензоры, причем в том смысле, который вкладывается в это понятие в общей теории относительности *. Следует особо

---

*Общее определение геометрической величины /тензора/ можно найти в книгах /1-3/.

подчеркнуть то обстоятельство, что тензор может быть задан в весьма общем многообразии. Таким образом, не вызывает сомнений, что в волновую функцию Ψ входят три различных геометрических величины, три различных тензора - волновое уравнение общековариантно. Теперь остается только одно: поставить вопрос о том, какие представления группы Пуанкаре включает в себя волновая функция Ψ. Если ограничиться координатными и точечными преобразованиями, то есть самыми элементарными свойствами пространственно-временного многообразия /3/, то ответ будет однозначным. Действительно, зададим /для конкретности - в пространстве векторных полей/ реализацию алгебры Ли группы Пуанкаре. При нелинейном преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$, $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ ψ_μ преобразуется по закону

$$\psi'_\mu(x') = \psi_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}}.$$

Отсюда следует /1/, что бесконечно малое точечное преобразование

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x)\,dt$$

порождает бесконечно малое преобразование $\psi_\mu(x)$ вида

$$\psi_\mu(x) \to \psi_\mu(x) - (\xi^\sigma \partial_\sigma \psi_\mu + \psi_\sigma \partial_\mu \xi^\sigma)\,dt.$$

Выражение

$$D_L \psi_\mu = \xi^\sigma \partial_\sigma \psi_\mu + \psi_\sigma \partial_\mu \xi^\sigma$$

называется производной Ли $\psi_\mu(x)$ относительно $\xi^\sigma(x)$ /1/. Далее, известно /4/, что каждой r- параметрической группе Ли G_r соответствует r контравариантных векторных полей $\xi^\mu_a(x)$, $(a = 1, 2, \ldots, r)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\xi^\sigma_a \partial_\sigma \xi^\mu_b - \xi^\sigma_b \partial_\sigma \xi^\mu_a = C^d_{ab}\xi^\mu_d, \qquad /3/$$

где C^d_{ab} - структурные постоянные группы G_r. Операторы X_a, производные Ли ψ_μ относительно ξ^μ_a, удовлетворяют перестановочным соотношениям группы G_r, $X_a X_b - X_b X_a = C^d_{ab} X_d$. Контравариантные векторные поля группы Пуанкаре $\mathcal{P}_{10}$ удобно занумеровать индексом a, пробегающим значения 0,1,2,3. Тогда в декартовой системе координат

$$\xi^\mu_a = \delta^\mu_a, \quad \xi^\mu_{ab} = x_\nu(\delta^\nu_a \delta^\mu_b - \delta^\nu_b \delta^\mu_a), \quad x_\nu = g_{\nu\mu}x^\mu. \qquad /4/$$

Подставляя /4/ в /3/, получаем десять операторов K_a, K_{ab}, удовлетворяющих перестановочным соотношениям группы Пуанкаре. Обобщение на случай тензоров другого рода не представляет труда. Таким образом, при минимальных предположениях о структуре пространственно-временного многообразия приходим к выводу, что волновая функция содержит однозначные представления группы Пуанкаре, порождаемые операторами K_a, K_{ab}. Именно эти операторы и использовались при составлении упоминавшегося набора коммутирующих операторов.

Спрашивается, какой будет ответ, если привлечь к делу весь спектр геометрических свойств пространства-времени? Из сказанного выше явствует, что это единственный способ найти кроме координатных и точечных преобразований более общие преобразования геометрических величин /или некоторой их совокупности/, посредством которых каждая величина переводится в другую величину того же строения.

Новые возможности показывает следующее утверждение. Вектор ψ_μ может преобразовываться по двузначному представлению группы Пуанкаре. Совокупность скаляра ψ и самодуального бивектора $\psi_{\mu\nu}$, выступающая здесь как единая величина, также может преобразовываться по двузначному представлению группы Пуанкаре, но несколько отличному от первого. По очевидной причине величины подобного рода будем называть тензорами-спинорами, или, кратко, т-спинорами. Таким образом, в волновую функцию Ψ входят два двузначных представления группы Пуанкаре, которые в основном различаются по своей геометрической природе. Доказательство этого утверждения, послужившего ключом к решению поставленной в самом начале задачи, составляет содержание следующего раздела.

2. ТЕНЗОРЫ-СПИНОРЫ

Общековариантная формулировка теории тензоров-спиноров, когда связь между геометрией пространства-времени и теорией представлений групп прослеживается во всех деталях, важна в принципиальном отношении и в связи с теми обобщениями, которые при этом становятся возможными. Однако такая формулировка требует привлечения довольно сложного с практической точки зрения математического аппарата, и поэтому она будет приведена вместе с обобщениями в другом месте.

Здесь мы построим теорию тензоров-спиноров в такой форме, которая удобна для приложений и позволяет обойтись простейшими математическими средствами. В векторной алгебре трехмерного евклидова пространства мы встречаемся со скалярами v и векторами $\vec v$. Пару

$$V = (v;\ \vec v)$$

назовем тензор-спинором. Скалярную компоненту т-спинора всегда будем писать на первом месте, а векторную компоненту -

на втором. Сложение двух т-спиноров и умножение пары на комплексное число определим естественным образом:

$$V + U = (v + u;\ \vec v + \vec u), \qquad \lambda V = (\lambda v;\ \lambda \vec v).$$

Каждый вектор $\vec a$ задает операторы $X(\vec a)$, $Y(\vec a)$, действующие в комплексном линейном пространстве т-спиноров по правилу

$$V \to X(\vec a)\,V = (\vec a\cdot\vec v; -\vec a v - \vec a\times\vec v),$$
$$V \to Y(\vec a)\,V = (\vec a\cdot\vec v;\ -\vec a v + \vec a\times\vec v). \qquad /5/$$

Соответствие между векторами и операторами обладает свойством линейности

$$X(\vec a + \vec b) = X(\vec a) + X(\vec b),\quad X(\lambda\vec a) = \lambda X(\vec a),$$
$$Y(\vec a + \vec b) = Y(\vec a) + Y(\vec b),\quad Y(\lambda\vec a) = \lambda Y(\vec a). \qquad /6/$$

Если $\vec a$ - вещественный вектор, $\vec a^* = \vec a$, то операторы $X(\vec a)$, $Y(\vec a)$ антиэрмитовы,

$$X\ (\vec a) = -X(\vec a),\quad Y\ (\vec a) = -Y(\vec a)$$

относительно скалярного произведения

$$\langle V|U\rangle = v^*u + \vec v^*\cdot\vec u.$$

Применяя известные формулы векторной алгебры, можно доказать, что при любых $\vec a$ и $\vec b$ имеют место соотношения

$$X(\vec a)X(\vec b) = -(\vec a\cdot\vec b) - X(\vec a\times\vec b),$$
$$Y(\vec a)Y(\vec b) = -(\vec a\cdot\vec b) + Y(\vec a\times\vec b), \qquad /7/$$
$$X(\vec a)\,Y(\vec b) = Y(\vec b)\,X(\vec a).$$

Положим $X(\vec a)X(\vec b)V=(u;\vec u)$. По определению,

$$u = -(\vec a\cdot\vec b)\,v - \vec a\cdot(\vec b\times\vec v) = -(\vec a\cdot\vec b)v - (\vec a\times\vec b)\cdot\vec v;$$
$$\vec u = (\vec a\times\vec b)v + \vec a\times(\vec b\times\vec v) - \vec a(\vec b\cdot\vec v) = -(\vec a\cdot\vec b)\,\vec v + (\vec a\times\vec b)v + (\vec a\times\vec b)\times\vec v.$$

Таким образом, первое из тождеств доказано. Аналогично доказываются и другие тождества.

Ковариантные декартовы орты $\vec e_x = \vec e_1$, $\vec e_y = \vec e_2$, $\vec e_z = \vec e_3$ образуют вещественный ортонормированный базис

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \delta_{kj}, \quad \vec{e}_k^* = \vec{e}_k \quad (k, j = 1, 2, 3). \qquad /8/$$

Будем использовать правую систему координат, в которой

$$\vec{e}_k \times \vec{e}_j = \epsilon_{kjn} \vec{e}_n . \qquad /9/$$

Обозначим операторы $X(\vec{e}_k)$, $Y(\vec{e}_k)$ через X_k, Y_k. На основании /6/-/9/ получаем важные соотношения:

$$X_k X_j = -\delta_{kj} - \epsilon_{kjn} X_n ,$$
$$Y_k Y_j = -\delta_{kj} + \epsilon_{kjn} Y_n , \qquad /10/$$
$$X_k Y_j = Y_j X_k .$$

Положим

$$x = x^1, \; y = x^2, \; z = x^3, \quad ct = x^0 .$$

Тензорно-спинорное поле есть,по определению,скалярно-векторная функция пространственных координат и времени:

$$V(\vec{r}, t) = (v(\vec{r}, t); \vec{v}(\vec{r}, t)).$$

Введем операторы

$$J_n = M_n + \frac{i}{2} Y_n, \; K_n = L_n - \frac{1}{2} Y_n \quad (n = 1, 2, 3),$$

где

$$\vec{M} = -i[\vec{r} \times \nabla] \; -$$

оператор орбитального момента,

$$\vec{L} = -i\left(\vec{r} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + ct\nabla\right) \; -$$

оператор специальных лоренцевых преобразований. С помощью /10/ получаем, что операторы J_n, K_n, $p_0 = i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} = -i\nabla$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_k, J_m] = i\epsilon_{kmn} J_n ,$$
$$[J_k, K_m] = i\epsilon_{kmn} K_n ,$$
$$[K_m, K_n] = -i\epsilon_{mnk} J_k ,$$
$$[p_0, K_n] = ip_n, \; [p_n, K_m] = i\delta_{nm} p_0, \; [p_k, J_m] = i\epsilon_{kmn} p_n$$

и, следовательно, задают реализацию алгебры Ли группы Пуанкаре $\mathcal{P}_{10}$ в пространстве тензор-спиноров. В силу /10/ тензор-спинор преобразуется по двузначному представлению группы Пуанкаре.

Рассмотрим эрмитов оператор

$$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3),$$

где

$$I_k = -\frac{i}{2} X_k \; (k = 1, 2, 3).$$

Оператор $\vec{I}$ введен в /9/ и назван оператором внутреннего спина. По /10/ оператор внутреннего спина коммутирует с операторами J_n, K_n и генераторами трансляций

$$[I_k, J_n] = 0, \; [I_k, K_n] = 0, \; [p_0, I_k] = 0, \; [p_n, I_k] = 0 .$$

Тем самым отмеченная в /9/ трудность устранена. Оператор внутреннего спина удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[I_k, I_n] = i\epsilon_{knm} I_m .$$

Таким образом, доказано, что тензор-спинор преобразуется по двузначному представлению группы $\mathcal{P}_{10} \times SU(2)$.

Операторы

$$N_m = L_m + \frac{1}{2} Y_m \quad (m = 1, 2, 3)$$

удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы K_m. Однако преобразования тензоров-спиноров, порождаемые инфинитезимальными операторами K_m или N_m, будут, очевидно, различными. Таким образом, существует два вида тензоров-спиноров, отличающихся друг от друга законом преобразования при лоренцевских поворотах. О происхождении операторов K_m, N_m будет сказано дальше.

3. СПИН ТЕНЗОРНОЙ ЧАСТИЦЫ

Запишем тензорное волновое уравнение /1/ в Т-спинорном представлении. Вектору ψ_μ поставим в соответствие тензор-спинор $V = (v, \vec{v})$, полагая

$$v = i\psi_0, \; \vec{v} = \psi_1 \vec{e}_1 + \psi_2 \vec{e}_2 + \psi_3 \vec{e}_3 . \qquad /11/$$

В силу /1/ самодуальный бивектор имеет три линейно-независимых компоненты. Это позволяет скаляру ψ и бивектору $\psi_{\mu\nu}$ соотнести тензор-спинор $W = (\omega; \vec{\omega})$, где

$$\omega = -\psi, \; \vec{\omega} = \psi_{32} \vec{e}_1 + \psi_{13} \vec{e}_2 + \psi_{21} \vec{e}_3 . \qquad /12/$$

Оператор D зададим по правилу

$$DV = (\mathrm{div}\,\vec{v}; \; \mathrm{rot}\,\vec{v} - \mathrm{grad}\,v). \qquad /13/$$

Квадрат его равен

$$D^2 = -\Delta.$$

Если ϕ - скалярное поле, то

$$D(\phi V) = \phi DV + Y(\mathrm{grad}\,\phi)V.$$

Из /1/, /11/, /12/, /13/ следует, что T-спиноры V, W подчиняются уравнениям

$$(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + D)V = \frac{mc}{h}W,$$

$$(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - D)W = \frac{mc}{h}V. \qquad /14/$$

Инфинитезимальные операторы $\vec{J}$, $\vec{I}$, p_0, $\vec{p}$ коммутируют с операторами $i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+D$, $i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-D$. Для операторов K_m, N_m получаем соотношения

$$(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - D)K_m = N_m(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - D),$$

$$(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + D)N_m = K_m(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + D) \quad (m=1,2,3). \qquad /15/$$

В этих формулах проявляется то, что входящие в волновое уравнение тензоры-спиноры преобразуются по-разному при лоренцевых поворотах. Таким образом, установлено, что группа $\mathcal{P}_{10} \times SU(2)$ есть группа симметрии тензорного волнового уравнения.

В рамках тех жестких ограничений, о которых подробно говорилось выше, всякое бесконечно малое преобразование Лоренца имеет результатом действия на скаляр, вектор, бивектор бесконечно малое приращение этих величин, главная часть которого определяется инфинитезимальными операторами $M_{ab} = iK_{ab}$, такими, что

$$M_{ab}\psi = i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)\psi,$$

$$M_{ab}\psi_\mu = i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)\psi_\mu + i(g_{a\mu}\psi_b - g_{b\mu}\psi_a),$$

$$M_{ab}\psi_{\mu\nu} = i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)\psi_{\mu\nu} + i(g_{a\mu}\psi_{b\nu} - g_{b\mu}\psi_{a\nu} + g_{a\nu}\psi_{\mu b} - g_{b\nu}\psi_{\mu a}).$$

Запишем эти выражения в соответствии со сделанными отождествлениями /11/, /12/. Чтобы не вводить много новых обозначений, ограничимся, без ущерба для существа дела, операторами

M_{k0} $(k=1,2,3)$. В результате получаем

$$M_{k0}V = L_kV + (\vec{e}_k\cdot\vec{v};\ -\vec{e}_k v),$$

$$M_{k0}W = L_kW + (0;\ -\vec{e}\ \times\vec{\omega}). \qquad /16/$$

Операторы M_{k0} действуют в пространстве решений волнового уравнения, однако они не коммутируют с операторами I_k. Рассмотрим операторы $M_{k0}-\frac{1}{2}X_k$. Из /5/, /6/ получаем

$$M_{k0}V - \frac{1}{2}X_kV = L_kV + \frac{1}{2}Y_kV = N_kV,$$

$$M_{k0}W - \frac{1}{2}X_kW = L_kW - \frac{1}{2}Y_kW = K_kW. \qquad /17/$$

Аналогично преобразуются и операторы M_{12}, M_{23}, M_{31}. Таким образом, природу операторов J_k, Y_k, K_m, N_m в той мере, которую допускает принятый упрощенный математический формализм, можно считать установленной. Выражения /17/, очевидно, согласуются с соотношениями /15/.

Вопрос о спине тензорной частицы будем решать следующим образом. Обобщим волновое уравнение на случай наличия внешнего электромагнитного поля, найдем уравнение второго порядка и рассмотрим его нерелятивистский предел. Введение внешнего поля в уравнения /1/ достигается заменой градиента ∂_μ на продолженную производную $\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{hc}A_\mu$. Соответственно этому обозначим через $\vec{P}$ оператор

$$\vec{P} = -ih\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Оператор Λ зададим по правилу

$$\Lambda V = (\vec{P}\cdot\vec{v};\ \vec{P}\times\vec{v} - \vec{P}v).$$

Волновое уравнение, обобщающее уравнения /14/, имеет вид

$$(ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + ic\Lambda)V = mc^2W,$$

$$(ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 - ic\Lambda)W = mc^2V. \qquad /18/$$

Вычислим квадрат оператора Λ. Положим $\Lambda^2V=(u,\vec{u})$. После некоторых выкладок получаем: $u = \vec{P}\cdot(\vec{P}\times\vec{v} - \vec{P}v) = -\vec{P}^2v - \frac{ieh}{c}\vec{H}\cdot\vec{v}$, где $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ - вектор магнитного поля. Вычисляя векторную компоненту, находим последовательно

$$\vec{u} = \vec{P}\times(\vec{P}\times\vec{v}) - \vec{P}(\vec{P}\cdot\vec{v}) - (\vec{P}\times\vec{P})v = -\vec{P}^2\vec{v} - \frac{ieh}{c}(\vec{H}\times\vec{v} - \vec{H}v).$$

Таким образом, $\Lambda^2 V = -\vec{P}^2 V - \frac{ieh}{c}(\vec{H}\cdot\vec{v}; -\vec{H}v + \vec{H}\times\vec{v})$. Возвращаясь к определению оператора $Y(\vec{a})$, запишем формулу

$$\Lambda^2 = -\vec{P}^2 - \frac{ieh}{c}Y(\vec{H}). \qquad /19/$$

Вычисляя коммутатор $[ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \Lambda]$, получим соотношение

$$[ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \Lambda] = iehY(\vec{E}), \qquad /20/$$

где $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} A_0$ - вектор электрического поля. Исключим из уравнений /18/ один из тензор-спиноров. В силу /19/, /20/

$$(ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 - ic\Lambda)(ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + ic\Lambda) =$$

$$= (ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0)^2 - c^2\Lambda^2 - ehcY(\vec{E}) - iehcY(\vec{H}).$$

Таким образом, для V получаем следующее уравнение второго порядка:

$$[(ih\frac{\partial}{\partial t} - eA_0)^2 - c^2\vec{P}^2 - m^2c^4]V = ehc[Y(\vec{E}) + iY(\vec{H})]V.$$

Отсюда следует, что в нерелятивистском приближении

$$ih\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 V - eA_0 V + \frac{ieh}{2mc}Y(\vec{H})V.$$

Разложим $\vec{H}$ по декартовым ортам $\vec{H} = H_1\vec{e}_1 + H_2\vec{e}_2 + H_3\vec{e}_3$. Тогда

$$\frac{ieh}{2mc}Y(\vec{H}) = \frac{eh}{mc}(H_1S_1 + H_2S_2 + H_3S_3) = \frac{eh}{mc}\vec{H}\cdot\vec{S},$$

где

$$S_k = \frac{i}{2}Y(\vec{e}_k) = \frac{i}{2}Y_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

есть, очевидно, проекции оператора спина $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$. В силу /10/

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, спин тензорной частицы следует принять равным 1/2. В первом приближении /по $1/c$ / эта частица обладает также магнитным моментом $\vec{\mu} = \frac{eh}{mc}\vec{S}$. Теперь можно сказать, что определенный ранее оператор $\vec{J}$ есть оператор полного момента количества движения $\vec{J} = \vec{M} + \vec{S}$.

Пусть $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ - оператор, такой, что $B_k V = (0; i\vec{e}_k\times\vec{v})$ $(k = 1, 2, 3)$. Так как

$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 2, \quad B_kB_j - B_jB_k = i\epsilon_{kjn}B_n,$$

то $\vec{B}$ есть оператор спина единица. Интересно, что оператор $\vec{S}$ выражается через оператор спина единица и оператор внутреннего спина по формуле

$$\vec{S} = \vec{B} - \vec{I}. \qquad /21/$$

Соотношение /21/ наглядно показывает роль внутреннего спина. Приведем также соотношение коммутации для операторов $\vec{B}$ и $\vec{I}$,

$$I_kB_j - B_jI_k = i\epsilon_{kjn}I_n,$$

или, в символической форме, $\vec{I}\times\vec{B} = i\vec{I}$.

4. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Векторный потенциал электростатического поля, обладающего центральной симметрией, имеет вид

$$A_0 = A_0(r), \quad \vec{A} = 0. \qquad /22/$$

Преобразования координат $x^0 = x^{0'} + a$, $x^k = x^k(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ являются допустимыми, так как они оставляют инвариантным вид векторного потенциала /22/. Соответственно и группа симметрии $\mathcal{P}_{10}$ волнового уравнения /14/ сужается до группы, состоящей из сдвигов вдоль оси времени и трехмерных вращений. Отсюда следует, что в центрально-симметричном поле существуют состояния с определенным значением энергии, квадрата полного момента и проекции момента, например на ось z. Как нетрудно видеть, тензоры-спиноры V и W при допустимых преобразованиях координат, при трехмерных вращениях и сдвигах вдоль оси времени преобразуются одинаково. Таким образом, в условиях данной задачи тензоры-спиноры V и W можно складывать. Из /18/, /22/ для $F = \frac{1}{\sqrt{2}}(V + W)$, $G = \frac{1}{\sqrt{2}}(V - W)$ получаем уравнения

$$(E - \phi - mc^2)F + hcDG = 0,$$
$$(E - \phi + mc^2)G + hcDF = 0, \qquad /23/$$

которые описывают стационарные состояния тензорной частицы

$\phi = eA_0(r)$. Уравнения /23/ будем решать методом разделения переменных.

Шаровыми тензорами-спинорами будем называть т-спиноры, являющиеся собственными функциями операторов $\vec{J}^2$, J_3, I_3. Из физических соображений ясно, что конечные результаты, относящиеся к движению тензорной частицы во внешнем электромагнитном поле, не должны зависеть от ориентации внутреннего спина. Поэтому, переходя к отысканию шаровых Т-спиноров, рассмотрим только уравнение $I_3 V = \frac{1}{2} V$. Запишем его общее решение, $V_{1/2} = (-i\beta; \alpha\vec{e}_{+1} + \beta\vec{e}_0)$, где $\vec{e}_{+1}, \vec{e}_0 = \vec{e}_3$ – ковариантные циклические орты /5/, образующие вместе с $\vec{e}_{-1}$ комплексный базис. Как видно, т-спинор $V_{1/2}$ задан, если известна его векторная компонента. Заметим также, что у векторной компоненты тензора-спинора $V_{1/2}$ нет составляющей по $\vec{e}_{-1}$. Принимая это к сведению, составим линейную комбинацию $\vec{Z}(\theta,\phi)$ шаровых векторов $\vec{Y}^L_{JM}(\theta,\phi)$ /5/ так, чтобы в разложении

$\vec{Z}(\theta,\phi) = Z^{+1}(\theta,\phi)\,\vec{e}_{+1} + Z^0(\theta,\phi)\,\vec{e}_0 + Z^{-1}(\theta,\phi)\,\vec{e}_{-1}$ координата $Z^{-1}(\theta,\phi)$ обратилась в нуль. После этого положим $\alpha = Z^{+1}(\theta,\phi)$, $\beta = Z^0(\theta,\phi)$ и вычислим результат действия операторов $\vec{J}^2$, J_3 на полученный таким образом тензор-спинор. Используя явный вид контравариантных циклических компонент шаровых векторов, приведенный в /5/, можно показать, что в одном случае

$$\sqrt{\frac{(J-M+1)(2J+3)}{J+1}}\,\vec{Y}^{J+1}_{JM}(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{(J+M+1)(J+2)}{J+1}}\,\vec{Y}^{J+1}_{J+1M}(\theta,\phi) =$$
$$= [\sqrt{2(J-M+2)}\,Y_{J+1M-1}(\theta,\phi)]\vec{e}_{+1} - [\sqrt{J+M+1}\,Y_{J+1M}(\theta,\phi)]\vec{e}_0\,, \qquad /24/$$

а в другом случае

$$\sqrt{\frac{(J+M)(2J-1)}{J}}\,\vec{Y}^{J-1}_{JM}(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{(J-M)(J-1)}{J}}\,\vec{Y}^{J-1}_{J-1M}(\theta,\phi) =$$
$$= [\sqrt{2(J+M-1)}\,Y_{J-1M-1}(\theta,\phi)]\vec{e}_{+1} + [\sqrt{J-M}\,Y_{J-1M}(\theta,\phi)]\vec{e}_0\,. \qquad /25/$$

Других возможностей нет.

Соответствующие /24/, /25/ тензоры-спиноры удобно обозначить через $V^{j+1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi)$, $V^{j-1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi)$, где $j = J + \frac{1}{2}$, $m = M - \frac{1}{2}$. Тензоры-спиноры $V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi)$ удовлетворяют системе уравнений

$$I_3 V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi) = \frac{1}{2} V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi),\quad J_3 V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi) = m V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi),$$

$$\vec{J}^2 V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi) = j(j+1) V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi).$$

Кроме того, найденные шаровые тензоры-спиноры удовлетворяют очевидно уравнениям

$$\vec{M}^2 V^{j+1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi) = (j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2}) V^{j+1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi),\quad \vec{M}^2 V^{j-1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi) = (j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2}) V^{j-1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi).$$

Используя формулы для дивергенции, ротора и градиента в циклических координатах и развернутую запись формулы разложения градиента функции $f(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ по шаровым векторам /5/, можно показать, что

$$D[f(r)V^{j+1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi)] = i[\frac{df(r)}{dr} + (j+\frac{3}{2})\frac{1}{r}f(r)]V^{j-1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi), \qquad /26/$$

$$D[f(r)V^{j-1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi)] = i[\frac{df(r)}{dr} - (j-\frac{1}{2})\frac{1}{r}f(r)]V^{j+1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi). \qquad /27/$$

В силу /26/, /27/ можно положить

$$F = f(r)V^{j\mp 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi),\quad G = g(r)V^{j\pm 1/2}_{1/2\,jm}(\theta,\phi). \qquad /28/$$

Подставляя /28/ в /23/, получаем уравнения для радиальных функций

$$(E-\phi-mc^2)f(r) + i\hbar c[\frac{dg(r)}{dr} + (j+\frac{3}{2})\frac{1}{r}g(r)] = 0,$$

$$(E-\phi+mc^2)g(r) + i\hbar c[\frac{df(r)}{dr} - (j-\frac{1}{2})\frac{1}{r}f(r)] = 0,$$

которые хорошо изучены, так как они впервые были выведены в теории Дирака еще полвека назад.

Таким образом, тензорное волновое уравнение оказалось пригодным для описания тонкой структуры водорода. Рамки статьи не позволяют в полной мере осветить взаимоотношения между геометрией пространства-времени и свойствами тензорной частицы, между тензорным волновым уравнением и уравнением Дирака. Не вызывает, однако, сомнения, что тензорное волновое уравнение открывает новые возможности для исследования.

В заключение хотелось бы особо выделить связь между спином тензорной частицы и внутренним спином и отметить, что релятивистские методы описания спина разрабатывались в 1927 году Дарвином /6/. Для нас ценно то, что рассматриваемая им волновая функция представляет собой пространственно-временной вектор.

Автор глубоко благодарен Н.А.Черникову, В.А.Мещерякову, В.Г.Кадышевскому, Б.М.Барбашову, Л.Г.Заставенко, Э.А.Тагирову и В.Б.Приезжеву за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. "Наука", М., 1965.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз, М., 1961.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. "Наука", М., 1967.
4. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. ИЛ, М., 1947.
5. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
6. Darvin C.G. Proc. of Roy. Soc., 1927, A116, p.227.
7. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-11630, Дубна, 1978.
8. Пестов А.Б. ЯФ, 1979, т.30, вып.2/8/; ОИЯИ, Р2-12010, Дубна,1978.
9. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-12557, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 октября 1979 года.