объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12857

Г.М.Сотков, Д.Ц.Стоянов

О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1979

P2 - 12857

Г.М.Сотков, Д.Ц.Стоянов

О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Направлено в "Journal of Physics, A"

Сотков Г.М., Стоянов Д.Ц. P2 - 12857

О конформной инвариантности в квантовой электродинамике

Найдена реализация конформной группы с операторными размерностями, относительно которой уравнение Дирака в спинорной электродинамике с нулевой фермионной массой инвариантно. Вычислены все конформно-инвариантные двух- и трехточечные функции Вайтмана и показано, что они согласованы с этим уравнением.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Sotkov G.M., Stoyanov D.Ts. P2 - 12857

On Conformal Invariance in Quantum Electrodynamics

A realization of the conformal group with operator dimensions, with respect to which the Dirac equation in spinor electrodynamics with zero fermion mass is invariant, is found. All the conformal invariant two- and three-point Wightman functions are calculated, and it is shown that they conform with the equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее было показано, что безмассовое уравнение Дирака с электромагнитным взаимодействием

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = e{:}A_{\mu}\gamma^{\mu}\psi{:}\quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \qquad /1.1/$$

/A_{μ} - электромагнитный вектор-потенциал; e - безразмерный заряд: $e^2 = \alpha$ / конформно-инвариантно по меньшей мере относительно двух разных представлений конформной группы. Первое из них является известным линейным представлением для полей A_{μ} и ψ, приписывающим этим полям каноническую конформную размерность. Второе из них - нестандартного типа. Оно нелинейно,и, кроме того, имеющая операторный характер конформная размерность, приписываемая в этом случае полю ψ, неопределенна. Каждое из этих двух представлений определяет с точностью до постоянных факторов все двух- и трехточечные функции Вайтмана полей A_{μ} и ψ, если предположить, что вакуум - конформно-инвариантен. Выражения для этих функций, полученные в случае обеих представлений, разные. В первом случае, как известно, функции Вайтмана полей ψ и A_{μ} совпадают с соответствующими функциями для свободных полей. Это означает, что таким образом получается тривиальное решение уравнения /1.1/ ($A_{\mu} = 0$).

Второй случай подробно рассматривался ранее. Было показано, что возникающие при этом двух- и трехточечные функции Вайтмана соответствуют чисто калибровочному решению уравнения /1.1/.

В настоящей работе мы найдем третье представление конформной группы для полей A_{μ} и ψ, относительно которого уравнение /1.1/ инвариантно. Методом конформной инвариантности мы получим двух- и трехточечные функции Вайтмана и покажем, что они согласованы с этим уравнением. Увидим, что эти функции в данном случае соответствуют некоторому решению уравнения /1.1/ с вектор-потенциалами, имеющими поперечные слагаемые. Таким образом, полученные в данной работе двух-и трехточечные функции Вайтмана полей A_μ и ψ являются примером возможных точных выражений для этих функций в спинорной безмассовой электродинамике.

2. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Анализ конформной инвариантности квантовой модели Тирринга[1] показал, что операторы поля преобразуются с помощью некоторого континуально-приводимого представления двухмерной конформной группы. В работе [1] впервые были использованы операторные конформные размерности.

Четырехмерная градиентная модель квантовой электродинамики в этом отношении весьма похожа на модель Тирринга. И здесь главную роль в представлениях с операторными размерностями играют нелинейные реализации конформной группы на этот раз в четырехмерном пространстве-времени. Назовем условно базисными те из них, которые возникают в однородных пространствах конформной группы. Преобразования для скалярного $S(x)$ и векторного $A_\mu(x)$ полей, рассмотренных ранее, являются базисными нелинейными реализациями. Коротко напомним некоторые основные черты их структуры. Поле $S(x)$, являясь лоренцевским скаляром, преобразуется неоднородно под действием масштабных и специальных конформных преобразований. Уравнение, инвариантное относительно этих преобразований, имеет вид

$$\Box^2 S(x) = 0, \qquad /2.1/$$

где $\Box$ - оператор д'Аламбера. Если $S^\pm(x)$ -частотные части поля $S(x)$, то коммутатор

$$[S^+(x), S^-(y)] = -i\lambda E^+(x-y), \qquad /2.2/$$

где

$$E^+(x) = \frac{i}{(4\pi)^2}\ln(-\mu^2 x^2 - i0x_0),$$

а μ - произвольная постоянная с размерностью массы. В терминах частотных частей упомянутые преобразования имеют вид:

$$U_D(r)S^\pm(x)U_D^{-1}(r) = S^\pm(rx) + eq^\pm \ln r, \qquad /2.3/$$

$$U_K(a)S^\pm(x)U_K^{-1}(a) = S^\pm(x^{(K)}) - eq^\pm \ln|\rho(a,x)|, \qquad /2.4/$$

где U_D и U_K - операторы представлений масштабного с параметром r и спецконформного с параметрами $a \equiv (a_\mu)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ преобразований соответственно, а

$$x_\mu^{(K)} = \frac{x_\mu + x^2 a_\mu}{\rho(a,x)}; \quad \rho(a,x) = 1 + 2(ax) + a^2 x^2. \qquad /2.5/$$

Как было доказано, величины $q^\pm$ являются постоянными операторами, связанными с полем $S(x)$ следующим образом:

$$q^+ = (q^-)^* = -\frac{i}{(4\pi)^2 e}\lim_{\substack{x^2<0\\ |x|\to\infty}} \frac{S^+(x)}{E^+(x)}, \qquad /2.6/$$

где e - инвариантный заряд.

Формула /2.6/ дает возможность вычислить коммутаторы операторов q^+ и q^- с полями $S^\pm(x)$ и между собой:

$$[q^\pm, S^\mp(x)] = \mp\frac{\lambda}{(4\pi)^2 e} = \mp\frac{e}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{(4\pi e)^2}{\lambda},$$

$$[q^\pm, S^\pm(x)] = [q^+, q^-] = 0. \qquad /2.7/$$

Теперь можно непосредственно проверить, что равенства /2.1/ и /2.2/ ковариантны относительно преобразований /2.3/ и /2.4/.

Поле $A_\mu(x)$ является векторным полем, и его масштабные и спецконформные преобразования также неоднородны. Однако эти преобразования можно получить из /2.3/ и /2.4/ путем простого дифференцирования, так как $A_\mu(x)$ и $\partial_\mu S(x)$ преобразуются совершенно одинаково. Поэтому конформно-инвариантные двухточечные функции Вайтмана полей $A_\mu(x)$ чисто продольные. Именно с помощью $A_\mu(x)$ удалось дать конформно-инвариантное описание градиентной модели квантовой электродинамики.

Однако кроме базовых есть и другие нелинейные реализации конформной группы. Они возникают из линейных путем переопределения линейно-преобразующихся полей с помощью локальных преобразований из той же группы /об этих представлениях см., например, [2] для конформной группы и [3] для общего случая/. Поэтому условно такие нелинейные реализации назовем производными реализациями.

Пусть задано векторное поле $h_\mu(x)$ с канонической конформной размерностью, т.е.

$$U_D(r)h_\mu(x)U_D^{-1}(r) = rh_\mu(rx), \qquad /2.8/$$

$$U_R h_\mu(x) U_R^{-1} = \frac{\partial x^{(R)\rho}}{\partial x^\mu} h_\rho(x^{(R)}). \qquad /2.9/$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться не самими спецконформными преобразованиями, а лишь преобразованиями R -инверсии. Поэтому в формуле /2.9/ U_R есть оператор представления R-инверсии, а

$$x^{(R)\mu} = -\frac{x^\mu}{x^2}. \qquad /2.10/$$

Рассмотрим величины

$$S^{\pm}(x)h_\mu(x). \qquad /2.11/$$

Они являются снова векторными полями, но преобразуются с помощью производной нелинейной реализации конформной группы. Мы принимаем, что векторные потенциалы электромагнитного поля преобразуются именно с помощью этой реализации конформной группы.

Отвлекаясь от конкретного вида выражения /2.11/, мы будем считать, что электромагнитный вектор-потенциал $A_\mu(x)$ можно разбить на две части: $A^+_\mu(x)$ и $A^-_\mu(x)$, которые преобразуются по отношению к конформной группе следующим образом:

$$U_D(r)A^{\pm}_\mu(x)U_D^{-1}(r) = rA^{\pm}_\mu(rx) + eq^{\pm} r\ln r\, h_\mu(rx), \qquad /2.12/$$

$$U_R A^{\pm}_\mu(x)U_R^{-1} = \frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu}\{A^{\pm}_\nu(x^{(R)}) - eq^{\pm}\ln|x^2|h_\mu(x^{(R)})\}. \qquad /2.13/$$

/Очевидно, что, в частности, величины $S^{\pm}(x)h_\mu(x)$ преобразуются таким же образом/.

Эти преобразования мы рассматриваем в квантовом случае, считая, кроме того, что $q^{\pm}$ и $h_\mu(x)$ между собой коммутируют, а коммутатор

$$[q^{\pm}, A^{\mp}_\mu(x)] = \mp\frac{e}{\kappa}h_\mu(x). \qquad /2.14/$$

Эти коммутаторы мы постулируем, хотя и можно привести соображения в пользу их справедливости. Отметим только, что равенство /2.14/ следует из /2.12/, /2.13/ и предположения о коммутативности $q^{\pm}$ и $h_\mu(x)$. /Конечно и здесь, как в случае реализации /2.3/ и /2.4/, $q^{\pm}$ являются инвариантными операторами/.

С учетом /2.14/ равенства /2.12/ и /2.13/ можно записать в виде

$$U_D(r)A^{\pm}_\mu(x)U_D^{-1}(r) = r^{1\pm\kappa q^+q^-} A^{\pm}_\mu(rx)r^{\mp\kappa q^+q^-}, \qquad /2.15/$$

$$U_R A^{\pm}_\mu(x)U_R^{-1} = \frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu}|x^2|^{\mp\kappa q^+q^-} A^{\pm}_\nu(x^{(R)})|x^2|^{\pm\kappa q^+q^-}. \qquad /2.16/$$

В эти равенства поле $h_\mu(x)$ явно не входит. Видно, что они переходят, кроме того, в равенства /2.8/ и /2.9/, если в них вместо $A_\mu(x)$ подставить $h_\mu(x)$.

3. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Согласно нашему предположению электромагнитные потенциалы преобразуются по отношению к конформной группе с помощью равенств /2.15/ и /2.16/ /или, что то же самое, /2.12/ и /2.13//. Преобразуя таким образом $A_\mu(x)$ в уравнении /1.1/ и потребовав его инвариантности, мы можем найти и конформные преобразования для спинорного поля $\psi(x)$. Однако прежде чем это сделать, следует определить правую часть уравнения /1.1/ в терминах введенных здесь полей. В предыдущем пункте значки $\pm$ у поля $A_\mu(x)$ мы ставили по аналогии с выражением /2.11/, и по смыслу они должны обозначать соответствующие частотные части. Если такое предположение правильно, то тогда

$$:A_\mu(x)\psi(x): = A^+_\mu(x)\psi(x) + \psi(x)A^-_\mu(x). \qquad /3.1/$$

Ответ на вопрос о правильности данного равенства получается однозначно из конформной инвариантности уравнения. Действительно, подставим /3.1/ в уравнение /1.1/ и произведем конформное преобразование. Для того чтобы выражение /3.1/ при этом сохраняло свой вид, необходимо предположить справедливость следующих преобразований для спинорного поля $\psi(x)$:

$$U_D(r)\psi(x)U_D^{-1}(r) = r^{3/2+\kappa q^+q^-}\psi(rx)r^{\kappa q^+q^-}, \qquad /3.2/$$

$$U_R\psi(x)U_R^{-1} = |x^2|^{-2-\kappa q^+q^-}\hat{x}\psi(x^{(R)})|x^2|^{-\kappa q^+q^-};\ \hat{x} = \gamma^\mu x_\mu. \qquad /3.3/$$

/При этом пока не возникает вопроса о коммутаторах операторов $q^{\pm}$ и поля $\psi(x)$ /.

Однако после этого уравнение /1.1/ все же не приводится к первоначальному виду. Можно убедиться, что никакими разумными переформулировками равенств /2.15/, /2.16/ или /3.2/ и /3.3/ не удается привести преобразованное уравнение к начальному виду. Отсюда мы приходим к выводу, что равенство /3.1/ для полей с нашими конформными свойствами не существует.

Если, однако, вместо /3.1/ величину: $:A_\mu(x)\psi(x):$ определить согласно равенству

$$:A_\mu(x)\psi(x): \stackrel{def}{=} \lim_{x_2 \to x_1 = x} \{A_\mu^+(x_1)\psi(x_2) + \psi(x_2)A_\mu^-(x_1) - \qquad /3.4/$$

$$- \frac{i\kappa}{e}\partial_\mu \ln|x_{12}^2|\,[q^+q^-\psi(x_2) + \psi(x_2)q^+q^-]\},$$

где

$x_{12} = x_1 - x_2$,

то сразу можно показать, что при этом уравнение /1.1/ конформно-инвариантно относительно преобразований /2.15/, /2.16/, /3.2/ и /3.3/. Доказательство этого утверждения мы приводим в приложении. Из этого доказательства видно, что в нем не приходится переставлять q^+ и q^- с полем $\psi(x)$. Все же эти коммутаторы будут нужны при вычислении функций Вайтмана. Постулируем их, как это мы уже сделали с коммутатором /2.14/. Именно, предположим:

$$[q^\pm, \psi(x)] = \omega^\pm \psi(x), \qquad /3.5/$$

где $\omega^+ = (\omega^-)^*$ /звезда означает комплексное сопряжение/ является комплексным числом. Вообще равенство /3.5/ взято по аналогии с соответствующим равенством в градиентной модели. С другой стороны, /3.5/ является простейшим конформно-инвариантным коммутатором. Кроме /3.5/ имеем также

$$[q^\pm, \bar\psi(x)] = -\omega^\pm \bar\psi(x), \qquad /3.6/$$

где $\bar\psi(x)$ - дираковски-сопряженное поле.

Наконец, следует рассмотреть и коммутатор спинорного поля $\psi(x)$ с затравочным полем $h_\mu(x)$. Поскольку последнее поле преобразуется с помощью канонических конформных преобразований, то, очевидно, оно свободно. Поэтому мы должны предположить, что

$$[\psi(x_1), h_\mu(x_2)] = 0.$$

4. ДВУХ- И ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА

Будем считать, что теория, основанная на квантовом уравнении /1.1/ с определением /3.4/, имеет конформно-инвариантный вакуум $|0\rangle$, т.е.

$$U_D|0\rangle = U_R|0\rangle = |0\rangle. \qquad /4.1/$$

Тогда мы можем вычислить двух- и трехточечные функции Вайтмана и проверить их согласованность с уравнением /1.1/. Методика получения этих функций известна, и она уже применялась /см., например, [4] /. Не вдаваясь в подробности, мы просто приведем соответствующие уравнения и их общие решения.

Начнем с двухточечной функции полей $A_\mu(x)$. Обозначим ее следующим образом:

$$\delta_{\mu\nu}(x_{12}) = \langle 0|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle. \qquad /4.2/$$

Тогда условия масштабной и R-инвариантности имеют соответственно вид

$$\delta_{\mu\nu}(x_{12}) = r^2\delta_{\mu\nu}(rx_{12}) + \frac{2e^2\Delta}{\kappa}\ln r\,\partial_\mu\partial_\nu \ln|x_{12}^2|,$$

$$\delta_{\mu\nu}(x_{12}) = \frac{\partial x_1^{(R)\rho}}{\partial x_1^\mu}\frac{\partial x_2^{(R)\sigma}}{\partial x_2^\nu}\delta_{\rho\sigma}(x_{12}^{(R)}) - \qquad /4.3/$$

$$- \frac{e^2\Delta}{\kappa}\ln|x_1^2x_2^2|\,\partial_\mu\partial_\nu \ln|x_{12}^2|,$$

где Δ - нормировочная постоянная двухточечной функции поля $h_\mu(x)$:

$$\delta^\circ_{\mu\nu}(x_{12}) = \langle 0|h_\mu(x_1)h_\nu(x_2)|0\rangle = \Delta\partial_\mu\partial_\nu \ln|x_{12}^2|.$$

Неоднородные члены в равенствах /4.3/ возникают при коммутировании операторов q^+ и q^- с полем $A_\mu(x)$. При этом согласно равенству /2.14/ возникают поля $h_\mu(x)$ и функция $\delta_{\mu\nu}(x_{12})$ оказывается связанной с $\delta^\circ_{\mu\nu}(x_{12})$.

Общее решение функциональных уравнений /4.3/ имеет вид

$$\delta_{\mu\nu}(x_{12}) = -\frac{e^2\Delta}{\kappa}\ln|x_{12}^2|\,\partial_\mu\partial_\nu\ln|x_{12}^2| + C\partial_\mu\partial_\nu\ln|x_{12}^2| \qquad /4.4/$$

/ C - произвольная постоянная/. Самым замечательным свойством этой функции является наличие в ней поперечного слагаемого. Действительно, не составляет труда убедиться, что функцию /4.4/ можно представить в виде

$$\delta_{\mu\nu}(x_{12}) = \frac{e^2\Delta}{\kappa}\frac{g_{\mu\nu}}{x_{12}^2} + \text{калибровка}. \qquad /4.5/$$

Рассмотрим теперь двухточечную функцию спинорных полей:

$$G_{\alpha\beta}(x_{12}) = \langle 0|\bar\psi_\beta(x_1)\psi_\alpha(x_2)|0\rangle. \qquad /4.6/$$

Требования масштабной и R-инвариантности приводят к стандартным уравнениям, и поэтому мы их приводить не будем. Приведем сразу окончательное выражение для функции /4.6/:

$$G(x_{12}) = N\hat{x}_{12}(x^2_{12})^{-2-\kappa\omega^+\omega^-}, \qquad /4.7/$$

где N - произвольная постоянная.

Наконец, подобным образом можно получить и трехточечную функцию. Требования масштабной и R-инвариантности в нашем случае, например для функции

$$\Gamma_{\mu,\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|\bar{\psi}_\beta(x_1)A^+_\mu(x_2)\psi_\alpha(x_3)|0\rangle, \qquad /4.8/$$

приводят соответственно к уравнениям

$$\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3) = r^{4+2\kappa\omega^+\omega^-}\,\Gamma_\mu(rx_1, rx_2, rx_3), \qquad /4.9/$$

$$\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3) = |x^2_1 x^2_2|^{-2-\kappa\omega^+\omega^-}\frac{\partial x^{(R)\nu}_2}{\partial x^\mu_2}\hat{x}_3\Gamma_\gamma(x^{(R)}_1, x^{(R)}_2, x^{(R)}_3)\hat{x}_1. \qquad /4.10/$$

Эти уравнения очевидно стандартны, и поэтому их общее решение известно:

$$\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3) = (x^2_{13})^{-1-\kappa\omega^+\omega^-}\left(C_1\frac{\hat{x}_{13}}{x^2_{13}}\partial_{2\mu}\ln\frac{x^2_{12}}{x^2_{32}} + C_2\frac{\hat{x}_{32}\gamma_\mu\hat{x}_{21}}{x^2_{32}x^2_{21}}\right), \qquad /4.11/$$

где C_1 и C_2 являются произвольными постоянными.

Чтобы определить эти постоянные, рассмотрим функцию

$$\tilde{\Gamma}_\mu(x_{12}) = \langle 0|\bar{\psi}(x_1){:}A_\mu(x_2)\psi(x_2){:}|0\rangle. \qquad /4.12/$$

Очевидно, что согласно определению /3.4/ она должна получаться с помощью равенства

$$\tilde{\Gamma}_\mu(x_{12}) = \lim_{x_3 \to x_2}\left\{\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3) - \frac{i\kappa\omega^+\omega^-}{e}\partial_\mu \ln|x^2_{23}|\,G(x_{13})\right\}. \qquad /4.13/$$

Условие существования ненулевого предела /4.13/ и дает возможность определить произвольные постоянные C_1 и C_2. Действительно, подставим в /4.13/ $\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3)$ и $G(x_{13})$ из /4.7/ и /4.11/ соответственно. Теперь, если положим

$$C_1 = -\frac{i\kappa\omega^+\omega^-}{e}N, \quad \text{а} \quad C_2 = 0, \qquad /4.14/$$

то предел /4.13/ существует и

$$\tilde{\Gamma}_\mu(x_{12}) = \frac{2i\kappa\omega^+\omega^-}{e}N\hat{x}_{12}(x_{12})_\mu(x^2_{12})^{-3-\kappa\omega^+\omega^-}. \qquad /4.15/$$

Наконец, покажем, что полученные нами функции Вайтмана согласованы с уравнением /1.1/. Для этого обозначим аргумент в уравнении /1.1/ через x_2, умножим обе части слева на $\bar{\psi}(x_1)$ и возьмем вакуумное среднее от полученного операторного равенства. В результате имеем:

$$i\gamma^\mu\partial_{2\mu}G(x_{12}) = e\gamma^\mu\tilde{\Gamma}_\mu(x_{12}). \qquad /4.16/$$

Не составляет труда подставить /4.7/ и /4.15/ в верхнее равенство и убедиться, что оно удовлетворяется тождественно.

5. ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Градиентная инвариантность уравнения /1.1/ накладывает некоторые дополнительные связи между функциями Вайтмана, полученными в предыдущем пункте. Оставляя пока в стороне вопрос о возможных локальных градиентных преобразованиях, сохраняющих уравнение /1.1/, мы рассмотрим только те из них, которые связаны с полем $S(x)$. Эти преобразования имеют вид:

$$A^g_\mu(x) = A_\mu(x) + z\partial_\mu S(x), \qquad /5.1/$$

$$\psi^g(x) = {:}e^{-iezS(x)}\psi(x){:} \equiv e^{-iezS^+(x)}\psi(x)e^{-iezS^-(x)}. \qquad /5.2/$$

Они однопараметрические, и z - их параметр.

Электромагнитное поле $A^g_\mu(x)$ имеет новые законы преобразования относительно конформной группы. Эти законы здесь мы не будем выписывать, так как функцию Вайтмана

$$\delta^g_{\mu\nu}(x_{12}) = \langle 0|A^g_\mu(x_1)A^g_\nu(x_2)|0\rangle \qquad /5.3/$$

можно получить и непосредственно из формулы /5.1/ с учетом равенств /2.2/ и /4.4/. Окажется, что после этого вид функции $\delta^g_{\mu\nu}(x_{12})$ совпадает с видом /4.4/, но с другой постоянной C. Новая постоянная имеет вид

$$C_g = \lambda z^2 + C. \qquad /5.4/$$

Одновременно с этим преобразование /5.2/ меняет степень однородности двухточечной функции спинорного поля. Действительно, конформные преобразования поля $\psi^g(x)$ теперь имеют вид

$$U_D(r)\psi^g(x)U_D^{-1}(r) = r^{3/2+\kappa q^+q^- - ie^2zq^+}\,\psi^g(rx)\,r^{\kappa q^+q^- - ie^2zq^-}, \qquad /5.5/$$

$$U_R\psi^g(x)U_R^{-1} = |x^2|^{-2-\kappa q^+q^- + ie^2zq^+}\,\hat{x}\psi^g(x^{(R)})\,|x^2|^{-\kappa q^+q^- + ie^2zq^-}, \qquad /5.6/$$

причем

$$[q^{\pm}, \psi^g(x)] = \omega_g^{\pm}\,\psi^g(x), \qquad /5.7/$$

где

$$\omega_g^{\pm} = \omega^{\pm} \pm \frac{i\lambda}{(4\pi)^2} z. \qquad /5.8/$$

Если заново вычислить функцию Вайтмана /4.6/, то получим:

$$G^g(x_{12}) \equiv \langle 0|\bar{\psi}^g(x_1)\psi^g(x_2)|0\rangle =$$

$$= \hat{x}_{12}(x_{12}^2)^{-2-2\kappa\omega_g^+\omega_g^- - ie^2z(\omega_g^- - \omega_g^+)}. \qquad /5.9/$$

Эти результаты показывают, что постоянные, которые появляются при вычислении функции Вайтмана, каким-то образом связаны между собой. Эту связь, в частности, можно учесть, рассматривая величины $C, \omega^{\pm}$ и d /степенной показатель в формуле /5.9// как функции от калибровочного параметра z. С учетом /5.8/ мы заключаем, что $\omega^{\pm}(z)$ являются линейными функциями от z. Более того, из-за мнимости калибровочной добавки к $\omega^{\pm}$ приходим к выводу, что

$$\mathrm{Re}\,\omega^{\pm}(z) \equiv \sigma_1 = \text{const}. \qquad /5.10/$$

Тогда для

$$\mathrm{Im}\,\omega^+(z) \equiv \sigma_2(z)$$

имеем

$$\sigma_2(z) = \frac{\lambda}{(4\pi)^2} z + B. \qquad /5.11/$$

Обозначим через $d(z)$ степенной показатель в правой части равенства /5.9/, т.е.

$$d(z) = -2 - 2\kappa\omega^+(z)\omega^-(z) + ie^2z[\omega^+(z) - \omega^-(z)]. \qquad /5.12/$$

Из равенств /5.10/ и /5.11/ получим

$$\omega^{\pm}(z) = \pm\frac{i\lambda}{(4\pi)^2} z \pm iB + \sigma_1. \qquad /5.13/$$

Подстановка /5.13/ в /5.12/ даст

$$d(z) = -2 - \frac{32\pi^2}{\lambda} e^2(\sigma_1^2 + B^2) - 6e^2Bz - \frac{\lambda e^2}{(4\pi)^2} z^2. \qquad /5.14/$$

И, наконец, в силу равенства /5.4/ имеем

$$C(z) = \lambda z^2 + C_0. \qquad /5.15/$$

Равенства /5.13/, /5.14/ и /5.15/ показывают, как следует согласовать основные характеристики функции Вайтмана $\omega^{\pm}$, d и C в случае фиксации калибровки. При заданных константах C_0, σ_1 и B каждому значению z соответствует некоторая калибровка и с помощью равенств /5.13/, /5.14/ и /5.15/ можно вычислить согласованные значения величин $\omega^{\pm}$, d и C в этой калибровке.

Авторы выражают благодарность В.Петковой и И.Т.Тодорову за весьма полезные обсуждения и критические замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С учетом /3.4/ уравнение /1.1/ имеет вид

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = e\gamma^\mu \lim_{x_2\to x_1 = x}\{A_\mu^+(x_1)\psi(x_2) + \psi(x_2)A_\mu^-(x_1) -$$

$$- i\frac{\kappa}{e}\partial_\mu \ln|x_{12}^2|[q^+q^-\psi(x_2) + \psi(x_2)q^+q^-]\}. \qquad /A/$$

а/ Доказательство масштабной инвариантности

Умножая уравнение /а/ слева на $U_D(r)$, а справа на $U_D^{-1}(r)$ с учетом равенств /2.15/ и /3.2/, имеем:

$$r^{5/2+\kappa q^+q^-}\; i\gamma^\mu \partial_\mu^D \psi(rx) r^{\kappa q^+q^-} =$$

$$= r^{5/2+\kappa q^+q^-}\, e\gamma^\mu \lim_{x_2\to x_1=x}\{A_\mu^+(rx_1)\psi(rx_2)+\psi(rx_2)A_\mu^-(rx_1) -$$

$$- i\frac{\kappa}{e}\partial_\mu^D \ln|r^2x_1^2|[q^+q^-\psi(rx_2)+\psi(rx_2)q^+q^-]\}\, r^{\kappa q^+q^-} ,$$

где $\partial_\mu^D=\frac{\partial}{\partial r x^\mu}$. Сокращая слева и справа на $r^{5/2+\kappa q^+q^-}$ и $r^{\kappa q^+q^-}$ соответственно, получаем первоначальное уравнение в точке $x'=rx$, что и требовалось доказать.

б/ Доказательство R-инвариантности уравнения /А/

Умножим обе стороны этого уравнения слева на U_R, справа на U_R^{-1} и воспользуемся формулами /2.16/ и /3.3/. После необходимых сокращений получим преобразованное уравнение в виде

$$i\gamma^\mu\hat{x}\frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu}\partial_\nu^R\psi(x^{(R)}) - 2i\kappa[q^+q^-\psi(x^{(R)})+\psi(x^{(R)})q^+q^-] =$$

$$= e\gamma^\mu\hat{x} \lim_{x_2\to x_1=x}\{\frac{\partial x_1^{(R)\nu}}{\partial x_1^\mu}[A_\nu^+(x_1^{(R)})\psi(x_2^{(R)})+\psi(x_2^{(R)})A_\nu^-(x_1^{(R)})] - \qquad /Б/$$

$$- i\frac{\kappa}{e}\partial_\mu \ln|x_{12}^2|[q^+q^-\psi(x_2^{(R)})+\psi(x_2^{(R)})q^+q^-]\}.$$

Первый член в правой части верхнего равенства получается при помощи следующей цепочки равенств:

$$\lim_{x_1\to x_2=x} U_R A_\nu^+(x_1)\psi(x_2)U_R^{-1} =$$

$$= \lim_{x_2\to x_1=x}\frac{\partial x_1^{(R)\nu}}{\partial x_1^\mu}|x_1^2|^{-\kappa q^+q^-} A_\mu^+(x_1^{(R)})\left|\frac{x_1^2}{x_2}\right|^{\kappa q^+q^-}\psi(x_2^{(R)})|x_2^2|^{-2-\kappa q^+q^-} =$$

$$= \lim_{x_2\to x_1=x}\frac{\partial x_1^{(R)\nu}}{\partial x_1^\mu}|x_1^2|^{-\kappa q^+q^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n|x_1^2/x_2^2|}{n!}A_\mu^+(x_1^{(R)})(\kappa q^+q^-)^n\psi(x_2^{(R)})|x_2^2|^{-2-\kappa q^+q^-} =$$

$$= |x^2|^{-2-\kappa q^+q^-}\lim_{x_2\to x_1=x}\left[\frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x_1^\mu}A_\mu^+(x_1^{(R)})\psi(x_2^{(R)})\right]|x^2|^{-\kappa q^+q^-} .$$

Введем обозначение:

$$x_{12}^{(R)} = x_1^{(R)} - x_2^{(R)} .$$

Тогда имеет место следующее тождество:

$$\partial_\mu \ln|x_{12}^2| = \frac{\partial x_1^{(R)\nu}}{\partial x_1^\mu}\partial_\nu^{(R)}\ln|(x_{12}^{(R)})^2| + \frac{2x_{1\mu}}{x_1^2},$$

где через $\partial_\nu^{(R)}$ обозначена операция $\partial/\partial x^{(R)\nu}$. Подставляя последнее тождество во второе слагаемое в правой части равенства /Б/, получим:

$$i\gamma^\mu\hat{x}\frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu}\partial_\nu^{(R)}\psi(x^{(R)}) = e\gamma^\mu\hat{x}\frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu}:A_\nu(x^{(R)})\psi(x^{(R)}): \quad /В/$$

Наконец, следует воспользоваться еще одним тождеством:

$$\gamma^\mu\hat{x}\frac{\partial x^{(R)\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\hat{x}}{x^2}\gamma^\nu .$$

После сокращения на невырожденную матрицу $\hat{x}/x^2$ мы убеждаемся, что уравнение /В/ совпадает с уравнением /А/ в точке $x'=x^{(R)}$.

Таким образом, масштабная и спецконформная инвариантность уравнения /А/ - доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadjiivanov L.K., Mikhov S.G., Stoyanov D.T. J. of Phys., 1979, A12, p.119.
2. Salam A., Strathdee J.Phys.Rev., 1969, 184, p.1760.
3. Ogievetsky V.I.Acta Universitatis Wratislaviensis, No.207. X-th Winter School of Theor. Phys. in Karpacz. /В этих лекциях можно найти ссылки по нелинейным реализациям групп Ли/.
4. Todorov I.T., Mintchev M.C., Petkova V.B. Conformal Invariance in Quantum Field Theory. Publicazione della Classe di Scienze della Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 октября 1979 года.