объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12813

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ПРИМЕР РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ.
III. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

1979

P2 - 12813

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ПРИМЕР РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ. III. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Направлено в ТМФ

Черников Н.А., Шавохина Н.С. P2 - 12813

Пример релятивистской задачи двух тел.
III. Специальный вид уравнений движения

Рассмотренные ранее носители релятивистского взаимодействия двух тел называются здесь минимонами. Формулы Монжа и краевые условия для минимальной поверхности записаны в специальном виде, приспособленном к заранее выбранной инерциальной системе отсчета. В соответствующем виде записаны интегралы движения рассматриваемого объекта. Особо отмечен случай, когда в заданной инерциальной системе объект как целое покоится.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Chernikov N.A., Shavokhina N.S. P2 - 12813

An Example of the Two-Body Relativistic Problem
III. Eqvations of Motion in a Special Form

The considered earlier carriers of the two-body relativistic interaction are here called minimons. The Monge formulae and boundary conditions for the minimal surface are written in a special form adjusted to a priori chosen inertial reference frame. The integrals of motion of the considered object are written in a corresponding form. The case is shown particularly, when in the given inertial system the object as a whole is at rest.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. НОСИТЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ - МИНИМОНЫ

В работах [1,2] релятивистская задача двух тел представлена как задача о мировой минимальной поверхности /обозначаем ее Σ /, ограниченной двумя асимптотическими линиями постоянной кривизны. Эти линии являются мировыми траекториями рассматриваемых тел.

Поверхность Σ задается формулами Монжа

$$x^a = U^a(u) + V^a(v), \quad (U', U') = 0, \quad (V', V') = 0, \qquad /1/$$

означающими, что изотропная сеть поверхности Σ является сетью переноса. Краевые условия для поверхности Σ таковы:

$$p_1^a = \frac{G}{c}[U^a(u_1) - V^a(v_1)] + \mathcal{P}_1^a,$$
$$p_2^a = \frac{G}{c}[V^a(v_2) - U^a(u_2)] + \mathcal{P}_2^a. \qquad /2/$$

Переносчиками взаимодействия двух тел являются частицы, мировые траектории которых составляют изотропную сеть поверхности Σ. Такие частицы движутся со скоростью света и имеют нулевую массу покоя. Будем называть их минимонами.

Через каждую точку (u_0, v_0) поверхности Σ проходят мировые траектории

$$x^a = U^a(u) + V^a(v_0), \quad x^a = U^a(u_0) + V^a(v)$$

ровно двух минимонов. Первый минимон излучается первым телом и поглощается вторым. Второй минимон излучается вторым телом и поглощается первым.

Мировые траектории двух тел вместе с мировыми траекториями минимонов составляют сплошной граф Фейнмана. Минимоны взаимодействуют друг с другом, поскольку их мировые траектории непрямолинейны. Значит, каждая точка поверхности Σ является узлом сплошного графа.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД ФОРМУЛ МОНЖА

В предлагаемой работе мы постараемся выделить в задаче роль времени $t = x^\circ$, задавая поверхность Σ в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t), \quad \xi_1(t) \le \eta \le \xi_2(t), \qquad /3/$$

где $\vec{x}$ - совокупность координат x^j, $j = 1, \ldots, N$.

Положим

$$u = t + \frac{\eta}{c}, \quad v = t - \frac{\eta}{c}, \qquad /4/$$

а значит,

$$U^\circ(u) = \frac{u}{2}, \qquad V^\circ(v) = \frac{v}{2}. \qquad /5/$$

Обозначая $U^j = \frac{c}{2}A^j$, $V^j = \frac{c}{2}B^j$, из формул /1/ находим

$$\vec{x} = \frac{c}{2}[\vec{A}(u) + \vec{B}(v)], \quad \vec{a}^2 = 1, \quad \vec{b}^2 = 1, \qquad /6/$$

где

$$\vec{a}(u) = \frac{d}{du}\vec{A}(u), \quad \vec{b}(v) = \frac{d}{dv}\vec{B}(v). \qquad /7/$$

Подставляя /4/ в /6/, получаем поверхность Σ в виде /3/.

Формулы /6/ задают проекцию σ поверхности Σ в евклидово пространство с декартовыми координатами x^j. Как видно, проекция σ является поверхностью переноса. Опорные кривые

$$\vec{x} = c\vec{A}(u), \quad \vec{x} = c\vec{B}(v) \qquad /8/$$

задаются в /6/ произвольно, но параметр cu является длиной на первой, а параметр cv - длиной на второй опорной кривой. Середина отрезка $c\vec{A}(u)$, $c\vec{B}(v)$ принадлежит поверхности σ. Таким образом, если известны опорные кривые /8/, то известна поверхность σ, а с помощью формулы

$$t = \frac{u + v}{2} \qquad /9/$$

восстанавливается поверхность Σ.

Формулы /6/ и /9/ представляют формулы Монжа /1/ в специальном виде.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Согласно /3/, $\eta = \xi_1(t)$ на одном крае и $\eta = \xi_2(t)$ - на другом крае поверхности Σ. Поэтому в соответствии с /4/ в формулах /2/ полагаем

$$u_1 = u_1(t) = t + \frac{\xi_1(t)}{c}, \quad v_1 = v_1(t) = t - \frac{\xi_1(t)}{c},$$

$$u_2 = u_2(t) = t + \frac{\xi_2(t)}{c}, \quad v_2 = v_2(t) = t - \frac{\xi_2(t)}{c}. \qquad /10/$$

Ввиду /5/ формулы /2/ при $\alpha = 0$ дают

$$p_1^\circ(t) = \frac{G}{c^2}\xi_1(t) + \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{P}_1^\circ,$$

$$p_2^\circ(t) = -\frac{G}{c^2}\xi_2(t) + \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{P}_2^\circ. \qquad /11/$$

а при остальных значениях α дают

$$\vec{p}_1(t) = \frac{G}{2}[\vec{A}(u_1(t)) - \vec{B}(v_1(t))] + \vec{\mathcal{P}}_1,$$

$$\vec{p}_2(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v_2(t)) - \vec{A}(u_2(t))] + \vec{\mathcal{P}}_2. \qquad /12/$$

Траектории же тел задаются формулами

$$\vec{x}_1(t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_1(t)) + \vec{B}(v_1(t))],$$

$$\vec{x}_2(t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_2(t)) + \vec{B}(v_2(t))]. \qquad /13/$$

Импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ тел вычисляются через их массы и скорости по формулам

$$\vec{p} = p^\circ\frac{d\vec{x}}{dt}, \quad p^\circ = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}} \qquad /14/$$

релятивистской механики материальной точки. Поэтому

$$c^2\frac{dp^\circ}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad /15/$$

Подставляя сюда /12/ и /13/, получаем

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt}\frac{d\vec{p}_1}{dt} = G\frac{c}{4}\left[\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2\right] = G\frac{d\xi_1}{dt},$$

$$\frac{d\vec{x}_2}{dt}\frac{d\vec{p}_2}{dt} = G\frac{c}{4}\left[\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2\right] = -G\frac{d\xi_2}{dt},$$

а отсюда следуют формулы /11/. Таким образом, формулы /11/ следуют из формул /12/ и /13/.

4. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР

Согласно /11/, сохраняется энергия системы, равная

$$\mathcal{E}=p_1^\circ(t)+p_2^\circ(t)+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} d\eta=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2 . \qquad /16/$$

Докажем, что сохраняется импульс системы, равный

$$\vec{\mathcal{P}}=\vec p_1(t)+\vec p_2(t)+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\vec x(\eta,t)d\eta . \qquad /17/$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec x(\eta,t)=\frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec A(t+\frac{\eta}{c})-\vec B(t-\frac{\eta}{c})],$$

то

$$\vec{\mathcal{P}}=\vec p_1(t)+\vec p_2(t)+\frac{G}{2}[\vec A(u_2(t))-\vec B(v_2(t)) \;-\vec A(u_1(t))+\vec B(v_1(t))].$$

Подставляя сюда /12/, находим

$$\vec{\mathcal{P}}=\vec{\mathcal{P}}_1+\vec{\mathcal{P}}_2 . \qquad /18/$$

Энергия $\mathcal{E}$ и импульс $\vec{\mathcal{P}}$ составляют вектор $\mathcal{P}^a$ в пространственно-временном мире. Будем называть его главным вектором системы.

Так как

$$(\frac{\partial\vec x}{\partial t})^2=c^2\,\frac{1+\vec a(u)\vec b(v)}{2}\le c^2 ,$$

то в случае притяжения /когда $G>0$ /, главный вектор направлен в "будущее", и тогда можно выбрать инерциальную систему, в которой $\vec{\mathcal{P}}=0$.

5. МОМЕНТ

Момент системы, равный

$$\mathfrak{M}=[\vec x_1(t),\ \vec p_1(t)]+[\vec x_2(t),\ \vec p_2(t)]+$$
$$+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}[\vec x(\eta,t),\ \frac{\partial}{\partial t}\vec x(\eta,t)]d\eta, \qquad /19/$$

также сохраняется. Действительно, из /14/ следует формула $\frac{d}{dt}[\vec x,\vec p]=[\vec x,\frac{d\vec p}{dt}]$.

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{M}=[\vec x_1,\vec q_1]+[\vec x_2,\vec q_2]+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1}^{\xi_2}[\vec x,\frac{\partial^2\vec x}{\partial t^2}]d\eta ,$$

где

$$\vec q_1=\frac{d\vec p_1}{dt}-\frac{G}{c^2}\frac{d\xi_1}{dt}\vec x_t(\xi_1,t),$$
$$\vec q_2=\frac{d\vec p_2}{dt}+\frac{G}{c^2}\frac{d\xi_2}{dt}\vec x_t(\xi_2,t).$$

Согласно /12/ и /13/, отсюда получаем

$$\vec q_1=\frac{G}{2}[\vec a(u_1)-\vec b(v_1)]=G\vec x_\eta(\xi_1,t),$$
$$\vec q_2=\frac{G}{2}[\vec b(v_2)-\vec a(u_2)]=-G\vec x_\eta(\xi_2,t),$$

так что

$$[\vec x_1,\vec q_1]+[\vec x_2,\vec q_2]=-G\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec x,\frac{\partial\vec x}{\partial\eta}]d\eta=-G\int_{\xi_1}^{\xi_2}[\vec x,\frac{\partial^2\vec x}{\partial\eta^2}]d\eta ,$$

а значит,

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{M}=G\int_{\xi_1}^{\xi_2}[\vec x,\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\vec x}{\partial\eta^2}]d\eta .$$

Эта производная равна нулю, так как входящая под интеграл функция /3/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\vec x}{\partial\eta^2}=0. \qquad /20/$$

Следовательно, момент /19/ сохраняется.

6. ГЛАВНЫЙ БИВЕКТОР

Рассмотрим функцию

$$\vec\Pi(t)=p_1^\circ(t)\vec x_1(t)+p_2^\circ(t)\vec x_2(t)+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}\vec x(\eta,t)d\eta . \qquad /21/$$

Ее производная, как нетрудно видеть, равна

$$\frac{d}{dt}\vec\Pi=p_1^\circ\frac{d\vec x_1}{dt}+p_2^\circ\frac{d\vec x_2}{dt}+\frac{G}{c^2}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial\vec x}{\partial t}d\eta+$$

$$+\left(\frac{dp^\circ_1}{dt}-\frac{G}{c^2}\frac{d\xi_1}{dt}\right)\vec{x}_1+\left(\frac{dp^\circ_2}{dt}+\frac{G}{c^2}\frac{d\xi_2}{dt}\right)\vec{x}_2=\vec{\mathcal{P}}. \qquad /22/$$

Следовательно, комбинация

$$\vec{\mathfrak{N}}(t)-t\vec{\mathcal{P}} \qquad /23/$$

не зависит от времени t.

Компоненты $\mathfrak{M}^{ij}$ момента $\mathfrak{M}$ вместе с компонентами $\mathfrak{M}^{jo}=\mathfrak{N}^j-t\mathcal{P}^j$ составляют антисимметричный тензор $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ в пространственно-временном мире. Будем называть его главным бивектором системы.

7. СОБСТВЕННАЯ ОСЬ ВРЕМЕНИ

Пусть главный вектор направлен в "будущее". Тогда главный вектор и главный бивектор задают собственную ось времени системы как решение уравнения

$$x^\alpha(\mathcal{P},\mathcal{P})-\mathcal{P}^\alpha(\mathcal{P},x)=\mathfrak{M}^{\alpha\beta}\mathcal{P}_\beta. \qquad /24/$$

Собственная ось времени параллельна главному вектору. В инерциальной системе, где $\vec{\mathcal{P}}=0$, она задается уравнением

$$\vec{x}=\frac{\vec{\mathfrak{N}}}{\mathcal{E}}. \qquad /25/$$

Если координатная ось времени совпадает с собственной осью времени системы, то

$$\vec{\mathcal{P}}=0\ ,\quad \vec{\mathfrak{N}}=0. \qquad /26/$$

При $\vec{\mathcal{P}}=0$ можно положить $\vec{\mathcal{P}}_1=\vec{\mathcal{P}}_2=0$.

8. СКОРОСТИ ТЕЛ

Дифференцируя /12/ и /13/, получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1(t)=\frac{G}{2}\left[\vec{a}(u_1(t))\frac{d}{dt}u_1(t)-\vec{b}(v_1(t))\frac{d}{dt}v_1(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_2(t)=\frac{G}{2}\left[\vec{b}(v_2(t))\frac{d}{dt}v_2(t)-\vec{a}(u_2(t))\frac{d}{dt}u_2(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_1(t)=\frac{c}{2}\left[\vec{a}(u_1(t))\frac{d}{dt}u_1(t)+\vec{b}(v_1(t))\frac{d}{dt}v_1(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_2(t)=\frac{c}{2}\left[\vec{a}(u_2(t))\frac{d}{dt}u_2(t)+\vec{b}(v_2(t))\frac{d}{dt}v_2(t)\right]. \qquad /27/$$

Отсюда следуют формулы

$$1-\frac{1}{G^2}\left(\frac{d\vec{p}_2}{dt}\right)^2=\frac{1+\vec{a}(u_2)\vec{b}(v_2)}{2}\dot{u}_2\dot{v}_2,$$

$$1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)^2=\frac{1-\vec{a}(u_2)\vec{b}(v_2)}{2}\dot{u}_2\dot{v}_2, \qquad /28/$$

причем

$$1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2=\dot{u}_2\dot{v}_2,$$

и такие же формулы с заменой номера 2 на 1.

В соответствии с этими формулами полагаем

$$\dot{\xi}_1^2\le\dot{\vec{x}}_1^2<c^2,\qquad \dot{\xi}_2^2\le\dot{\vec{x}}_2^2<c^2. \qquad /29/$$

9. УСКОРЕНИЕ ТЕЛ

Из /14/ следует формула

$$p^\circ\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\frac{d\vec{p}}{dt}-\frac{dp^\circ}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Подставляя сюда /27/ и /11/, получаем

$$p^\circ_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}=\frac{G}{2}\left[\vec{a}(u_1)-\vec{b}(v_1)\right]\dot{u}_1\dot{v}_1,$$

$$p^\circ_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2}=\frac{G}{2}\left[\vec{b}(v_2)-\vec{a}(u_2)\right]\dot{u}_2\dot{v}_2. \qquad /30/$$

Из /30/ следуют равенства

$$\left[\vec{a}(u_1)+\vec{b}(v_1)\right]\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}=0,\qquad \left[\vec{a}(u_2)+\vec{b}(v_2)\right]\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2}=0. \qquad /31/$$

10. НОВОЕ ТОЛКОВАНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим одно из краевых условий, скажем, второе. Номер тела для краткости опустим.

Согласно /27/,

$$\frac{d\vec p}{dt} + \frac{G}{c}\frac{d\vec x}{dt} = G\vec b(v)\dot v, \quad \frac{d\vec p}{dt} - \frac{G}{c}\frac{d\vec x}{dt} = -G\vec a(u)\dot u \ . \qquad /32/$$

Дифференцируя это по времени t, получаем

$$\frac{d^2\vec p}{dt^2} + \frac{G}{c}\frac{d^2\vec x}{dt^2} = G\vec b(v)\ddot v + G\vec b'(v)\dot v^2 \ ,$$

$$\frac{d^2\vec p}{dt^2} - \frac{G}{c}\frac{d^2\vec x}{dt^2} = -G\vec a(u)\ddot u - G\vec a'(u)\dot u^2 \ . \qquad /33/$$

Следовательно:

$$\vec b(v)\left[\frac{d^2\vec p}{dt^2} + \frac{G}{c}\frac{d^2\vec x}{dt^2}\right] = G\ddot v \ ,$$

$$\vec a(u)\left[\frac{d^2\vec p}{dt^2} - \frac{G}{c}\frac{d^2\vec x}{dt^2}\right] = -G\ddot u \ ,$$

а так как

$$\ddot u + \ddot v = 0, \qquad /34/$$

то

$$[\vec b(v)-\vec a(u)]\frac{d^2\vec p}{dt^2} + \frac{G}{c}[\vec b(v)+\vec a(u)]\frac{d^2\vec x}{dt^2} = 0.$$

В силу /31/ отсюда получаем

$$[\vec b(v)-\vec a(u)]\frac{d^2\vec p}{dt^2} = 0, \qquad /35/$$

а учитывая /30/, заключаем, что

$$\frac{d^2\vec x}{dt^2}\,\frac{d^2\vec p}{dt^2} = 0. \qquad /36/$$

Наряду с /36/ из /33/ можно получить еще два следствия. Умножая первое из равенств /33/ на $\vec a(u)$, а второе - на $\vec b(v)$ и учитывая /31/ и /35/, приходим к следствию

$$\vec a(u)\vec b'(v)\dot v^2 + \vec b(v)\vec a'(u)\dot u^2 = 0. \qquad /37/$$

Возводя /33/ в квадрат и учитывая /36/, приходим к другому следствию, а именно:

$$|\vec a'(u)|^2\dot u^4 = |\vec b'(v)|^2\dot v^4 ,$$

то есть

$$|\vec a'(u)|\,\dot u^2 = |\vec b'(v)|\,\dot v^2 \ . \qquad /38/$$

В свою очередь, из /37/ и /38/ следует, что

$$\vec a(u)\frac{\vec b'(v)}{|\vec b'(v)|} + \vec b(v)\frac{\vec a'(u)}{|\vec a'(u)|} = 0. \qquad /39/$$

Согласно /34/ и /38/, если середина отрезка $c\vec A(u)$, $c\vec B(v)$ является мировой траекторией рассматриваемого тела, то его концы движутся по опорным кривым /8/ с равными ускорениями.

11. СЛУЧАЙ N=2

В этом случае проекция σ является плоской фигурой, а опорные кривые /8/ - плоскими кривыми. Единичные векторы $\vec a(u)$, $\vec b(v)$ можно представить в виде

$$\vec a(u) = \{\cos\phi(u),\ \sin\phi(v)\},$$

$$\vec b(v) = \{\cos\psi(v),\ \sin\psi(v)\}.$$

Согласно /37/,

$$\sin(\phi(u)-\psi(v))[\psi'(v)\dot v^2 - \phi'(u)\dot u^2] = 0,$$

а согласно /38/,

$$|\phi'(u)|\dot u^2 = |\psi'(v)|\,\dot v^2 \ .$$

Следовательно,

$$\phi'(u)\dot u^2 = \psi'(v)\dot v^2 \ , \qquad /40/$$

или

$$d\phi\, du = d\psi\, dv. \qquad /41/$$

Отметим, что функции $\phi'(u)$, $\psi'(v)$ задают натуральные уравнения[3] опорных кривых /8/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-11295, Дубна, 1978.
3. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, М., 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 сентября 1979 года.