сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

741/2-80

25/2-80

Р2 - 12800

С.И.Златев, Г.М.Сотков, Д.Ц.Стоянов

О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ГРАДИЕНТНОЙ МОДЕЛИ

1979

Златев С.И., Сотков Г.М., Стоянов Д.Ц. P2 - 12800

О конформной инвариантности градиентной модели

Рассматривается градиентная модель квантовой электродинамики спинорных частиц с нулевой массой. Показано, что основное уравнение этой модели конформно-инвариантно относительно некоторых нестандартных преобразований полей. Основными особенностями этих преобразований являются, во-первых, их нелинейность и, во-вторых, наличие операторной размерности. Предполагается, что пространство векторов состояний и, в частности, вакуумное состояние конформно-инвариантны. Это дает возможность вычислить конформно-инвариантные двух- и трехточечные функции Вайтмана, которые определяются однозначно и совпадают с точными выражениями. Показано, что полученные функции Вайтмана согласованы с основным уравнением. Таким образом, в работе построен альтернативный метод для точного решения градиентной модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zlatev S.I., Sotkov G.M., Stoyanov D.Ts. P2 - 12800

On Conformal Invariance of Gradient Model

The gradient model of the quantum electrodynamics of spinor particles with zero mass is discussed. It is shown that the basic equation of this model is conformal invariant with respect to some non-standard field transformations. The main features of these transformations are their nonlinearity and the presence of operator dimensions. It is supposed that the state vector space and in particular the vacuum state are conformal invariant. It makes it possible to calculate the conformal invariant two- and three-point Wightman functions, which are uniquely defined and coincide with exact expressions. It is shown that the obtained Wightman functions are in accordance with the equation. Thus, an alternative method for the exact solution of the gradient model is built.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

© 1979 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

В работе [1] рассматривается своеобразная градиентная модель спинорной квантовой электродинамики, в которой вектор-потенциалы являются градиентами от некоторого скалярного поля. Хотя такая модель с физической точки зрения не представляет интереса, все же она имеет определенное методическое значение. Последнее обусловлено наличием точного решения, что дает возможность на этом простом примере проследить некоторые характерные особенности квантовой электродинамики. В частности, в цитированной работе, а также и в работе [2] на основе результатов исследований упомянутой модели сделаны определенные выводы о способах построения квантовой электродинамики.

Данная градиентная модель будет объектом рассмотрения настоящей работы. Здесь, однако, мы ее рассмотрим с несколько иной точки зрения. Нас будут интересовать ее свойства по отношению к преобразованиям конформной группы в том случае, когда у спинорных частиц нет массы покоя. Мы покажем, что аналогично модели Тирринга в двухмерном пространстве-времени [3] уравнения градиентной модели являются ковариантными по отношению к определенной реализации конформной группы в пространстве Минковского. Поэтому, применив методы конформно-инвариантной квантовой теории поля к данной реализации конформной группы, мы получим выражения для двух- и трехточечных функций Вайтмана, которые совпадают с соответствующими точными выражениями. Таким образом, на уровне двух- и трехточечных функций методами конформно-инвариантной квантовой теории поля можно сформулировать альтернативный способ точного решения градиентной модели. Формулировке этого способа и посвящена настоящая работа. Следует отметить, что в принципе такой способ решения можно применять к любым конформно-ковариантным уравнениям для квантованных полей. Это дает нам право надеяться, что изложенный ниже способ дает возможность находить точные решения и для более реалистических моделей.

1. Основным уравнением градиентной модели для частиц с полуцелым спином и с нулевой массой является уравнение

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)=e\gamma^{\mu}:\partial_{\mu}S(x)\psi(x):, \qquad /1/$$

где $\psi(x)$ - спинорное поле, $S(x)$ - скалярное поле, γ^{μ} - матрицы Дирака, символ :...: означает виковское нормальное произведение. Скалярное поле $S(x)$ удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\Box^2 S(x)=0 \qquad /2/$$

и каноническому коммутационному соотношению

$$[S(x),S(y)]=-\frac{i\lambda}{8\pi}\epsilon(x^0-y^0)\,\theta[(x-y)^2], \qquad /3/$$

где $\Box$ - оператор Клейна-Гордона:

$\Box=g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ $(g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1)$.

Уравнение /1/ имеет точное операторное решение вида

$$\psi=:\psi_0 e^{-ieS}:, \qquad /4/$$

где ψ_0 - свободное спинорное поле с нулевой массой, коммутирующее с полем S. Поэтому главным моментом при рассмотрении градиентной модели является построение квантовой теории скалярного поля S. Этому вопросу и посвящена большая часть работы /1/. Кроме того, поля данного типа можно встретить и в ряде других работ /4-6/.

Поле $S(x)$ является четырехмерным аналогом двухмерного скалярного поля, рассмотренного в работе /7/. Его можно разбить на положительно- и отрицательночастотные части $S^+(x)$ и $S^-(x)$ соответственно. Каждая из них также удовлетворяет уравнению /2/, т.е.

$$\Box^2 S^{\pm}(x)=0, \qquad /5/$$

и вместе с этим - следующему перестановочному соотношению:

$$[S^+(x),S^-(y)]=-i\lambda E^+(x-y), \qquad /6/$$

где

$$E^+(x)=\frac{i}{(4\pi)^2}\ln(-\mu^2x^2-i0x_0), \qquad /7/$$

а μ - произвольная постоянная с размерностью массы. /В приложении приведены более подробные сведения о перестановочных функциях полей $S^{\pm}(x)$ /.

2. Перейдем к рассмотрению свойств поля $S(x)$ по отношению к преобразованиям конформной группы в четырехмерном пространстве-времени. Уравнение /5/ и перестановочное соотношение /6/, очевидно, трансляционно- и лоренц-инвариантны / $S^{\pm}(x)$ преобразуются по скалярному представлению группы Лоренца/. Вместе с этим легко заметить, что функция $E^+(x)$ не имеет ковариантных свойств при масштабных и специальных конформных преобразованиях. Пусть эти преобразования в координатном пространстве заданы в виде

а/ масштабных преобразований:

$$x_{\mu}^{(D)}=rx_{\mu}, \quad r>0;$$

б/ спецконформных преобразований:

$$x_{\mu}^{(K)}=\frac{x_{\mu}+a_{\mu}x^2}{\rho(a,x)}, \qquad /8/$$

где

$$\rho(a,x)=1+2(a,x)+a^2x^2,$$

а a_{μ}, r - параметры преобразований. Тогда легко убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\left.\begin{aligned} E^+(x^{(D)})&=E^+(x)+\frac{i}{(4\pi)^2}\ln r, \\ E^+(x^{(K)})&=E^+(x)-\frac{i}{(4\pi)^2}\ln|\rho(a,x)|. \end{aligned}\right\} \qquad /9/$$

Последние равенства показывают, что соотношение /6/ не может быть инвариантным, если поля $S^{\pm}(x)$ преобразуются с помощью линейных представлений конформной группы. Все же существует реализация этой группы, которая сохраняет как уравнение /5/, так и перестановочные соотношения /6/. В случае классических полей в работах /8-12/ были использованы подобные реализации для масштабных и спецконформных преобразований

$$\left.\begin{aligned} S^{\pm\prime}(x)&=S^{\pm}(x^{(D)})+\Lambda^{\pm}\ln r, \\ S^{\pm\prime}(x)&=S^{\pm}(x^{(K)})-\Lambda^{\pm}\ln|\rho(a,x)| \end{aligned}\right\} \qquad /10/$$

соответственно. Здесь $\Lambda^\pm$ - постоянные, которые являются инвариантами представления. Легко заметить, что эти преобразования с любыми $\Lambda^\pm$ сохраняют уравнение /5/.

В квантовом случае можно добиться инвариантности перестановочного соотношения /6/ относительно преобразования /10/, предположив, что $\Lambda^\pm$ являются операторами. Основанием для подобного предположения служат свойства двухмерного скалярного поля, рассмотренного в работах /3/ и /7/, где уже встречались аналогичные преобразования. Чтобы доказать наше предположение, рассмотрим операторы

$$B^\pm = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x^2<0}} \frac{S^\pm(x)}{E^\pm(x)} . \qquad /11/$$

Сначала можно проверить, что операторы $B^\pm$ /если они существуют/ являются трансляционно- и лоренц-инвариантными. То же самое имеет место и для масштабных преобразований /первое из равенств /10//.

Далее, из равенств /10/ и /8/ имеем:

$$(B^\pm)' = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x^2<0}} \frac{S^\pm\left(\frac{x_\mu + a_\mu x^2}{\rho(a,x)}\right) - \Lambda^\pm \ln|\rho(a,x)|}{E^\pm(x)} = -\Lambda^\pm \lim_{\substack{x\to\infty \\ x^2<0}} \frac{\ln|\rho(a,x)|}{\pm\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\mu^2|x|^2} =$$

$$= \pm i(4\pi)^2\Lambda^\pm . \qquad /12/$$

Полученное равенство показывает, что $B^\pm$, во-первых, существуют и, во-вторых, они не изменяются при специальных конформных преобразованиях, т.к. $\Lambda^\pm$ /как мы уже отмечали/ конформно-инвариантны. Следовательно,

$$\Lambda^\pm = \mp \frac{i}{(4\pi)^2} B^\pm , \qquad /13/$$

и, значит, они являются операторами. Для дальнейшего нам удобно вместо $\Lambda^\pm$ пользоваться операторами

$$q^\pm = \frac{1}{e}\Lambda^\pm , \qquad /14/$$

где e - безразмерный заряд, входящий в уравнение /1/. С помощью равенств /6/, /11/, /13/ и /14/ можно вычислить коммутаторы операторов $q^\pm$ с полями $S^\pm(x)$ и между собой. Эти перестановочные соотношения имеют следующий вид:

$$[q^\pm, S^\mp(x)] = \mp \frac{\lambda}{(4\pi)^2 e} ,$$

$$[q^\pm, S^\pm(x)] = [q^+, q^-] = 0. \qquad /15/$$

Теперь легко можно проверить, что коммутатор /6/ в силу равенств /15/ инвариантен по отношению к преобразованиям /10/, куда $\Lambda^\pm$ подставлены из /14/. Таким образом, квантовую теорию скалярного поля $S(x)$, основанную на уравнениях /5/ и /6/, можно построить конформно-инвариантным образом. Пространство состояний этой теории следует строить наподобие пространства Фока, исходя из состояния вакуума $|0\rangle$, определенного согласно равенствам

$$J^s|0\rangle = S^-(x)|0\rangle = 0, \qquad /16/$$

где J^s - генераторы конформной группы. Такой вакуум единственен и, очевидно, уничтожается также оператором q^-:

$$q^-|0\rangle = 0. \qquad /17/$$

Основные характеристики этого пространстве аналогичны характеристикам пространства состояний двухмерного квантованного скалярного поля, рассмотренного в работах /3/ и /7/ /см. по этому поводу обзор /13/ /. В частности, и здесь метрика пространства состояний индефинитна и физический вакуум однопараметрично вырожден.

Действительно, легко, например, заметить, что все вектора типа

$$|a\rangle = e^{a q^+}|0\rangle \qquad /18/$$

конформно-инвариантны:

$$J^s|a\rangle = 0, \qquad /19/$$

т.к. в силу конформной инвариантности операторов q

$$[J^s, q^\pm] = 0. \qquad /20/$$

Векторы $|a\rangle$ являются, кроме того, собственными векторами оператора $S^-(x)$:

$$S^-(x)|a\rangle = \frac{a\lambda}{(4\pi)^2 e}|a\rangle . \qquad /21/$$

3. Теперь рассмотрим уравнение

$$j\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = e\gamma^{\mu} : A_{\mu}\psi : \quad . \qquad /22/$$

Оно совпадает с уравнением /1/, если положить $A_{\mu} = \partial_{\mu}S$. С другой стороны, /22/ является одним из уравнений безмассовой спинорной электродинамики. Как известно, это уравнение конформно-инвариантно при условии, что ψ и A_{μ} преобразуются как поля с каноническими размерностями -3/2 и -1 /в единицах длины/ соответственно.

Уравнение /22/, однако, инвариантно и по отношению к более общим, чем канонические, преобразованиям:

$$\psi \xrightarrow{D} r^{-d-\frac{1}{2}}\psi(rx), \quad \psi \xrightarrow{R} |x^2|^{d}\hat{x}\psi(x_R), \quad \hat{x} = \gamma^{\mu}x_{\mu}; \qquad /23/$$

$$A_{\mu} \xrightarrow{D} rA_{\mu}(rx), \; A_{\mu} \xrightarrow{R} \frac{1}{x^2}\frac{\partial(x_R)^{\nu}}{\partial x^{\mu}}A_{\nu}(x_R) + i\frac{d+2}{e}\partial_{\mu}\ln|x^2|. \qquad /24/$$

Здесь масштабные преобразования /дилатации/ обозначены значком D, а R означает R-инверсию. В данной работе в целях краткости и наглядности формул вместо специальных конформных преобразований мы будем пользоваться соответствующими R-инверсиями. При этом

$$x^{\mu} \xrightarrow{R} (x_R)^{\mu} = -\frac{x^{\mu}}{x^2}. \qquad /25/$$

В силу действительности электромагнитных потенциалов A_{μ} из /24/ следует, что размерность d поля $\psi(x)$ должна быть комплексной. Точнее, $d+2$ является чисто мнимым числом. Если еще потребовать, чтобы в пределе $e \to 0$ преобразование /24/ переходило к каноническому, то, очевидно, что, кроме того, $d+2$ должно быть пропорциональным e^2.

Комплексная размерность поля $\psi(x)$ вряд ли может иметь сколько-нибудь приемлемое физическое толкование, и, стало быть, преобразования /23/ и /24/ следует рассматривать как некий математический курьез. Однако мы сейчас покажем, что во вторично-квантованной теории существует механизм, с помощью которого можно обойти указанную трудность. Для этой цели предположим, что

$$d+2 = ie^2q,$$

где $q=q^{+}+q^{-}$ и $q^{\pm}$ заданы равенством /14/. Тогда вместо /23/ и /24/ будем иметь:

$$\psi \xrightarrow{D} :r^{\frac{3}{2}-ie^2q}\psi(rx):, \quad \psi \xrightarrow{R} :|x^2|^{-2+ie^2q}\hat{x}\psi(x_R):, \qquad /26/$$

$$A_{\mu} \xrightarrow{D} rA_{\mu}(rx), \quad A_{\mu} \xrightarrow{R} \frac{1}{x^2}\frac{\partial(x_R)^{\nu}}{\partial x^{\mu}}A_{\nu}(x_R) - eq\partial_{\mu}\ln|x^2|. \qquad /27/$$

Нормальное произведение :...: на практике означает, что все операторы со значком "+" следует писать слева от поля $\psi(x)$, а операторы со значком "-" - справа от поля $\psi(x)$. Не составляет труда проверить, что уравнение /22/ инвариантно и по отношению к преобразованиям /26/ и /27/.

Легко убедиться, что если заданы поля $S(x)$ и спинорное поле $\psi_0(x)$ с канонической размерностью, то преобразования /26/ и /27/ можно сконструировать из преобразований /10/, положив

$$A_{\mu} = \partial_{\mu}S, \qquad /28/$$

а $\psi(x)$ выразить согласно равенству /4/. Таким образом, эта чисто групповая конструкция приводит как раз именно к тому решению уравнения /22/, которое нами было рассмотрено в начале нашей работы.

Очевидно, эта конструкция задает новый, групповой способ решения уравнения /22/, основанный на инвариантности этого уравнения по отношению к конформной группе, если считать, что поля $\psi(x)$ и $A_{\mu}(x)$ преобразуются согласно равенствам /26/ и /27/. Такой способ хотя и прост по идее, все же на практике может оказаться совершенно неэффективным, в особенности тогда, когда решение заранее неизвестно /т.е. как раз в интересных случаях/.

С другой стороны, если преобразования /26/ и /27/ могут приводить к однозначным конформно-инвариантным двух- и трехточечным функциям Вайтмана полей $\psi(x)$ и $A_{\mu}(x)$, как это имеет место в конформно-инвариантных квантовых теориях поля, то очевидно, что эти функции должны совпадать с функциями, полученными стандартным способом. В нашем случае, если предположить, что вакуум $|0\rangle$ конформно-инвариантен, для вычисления конформно-инвариантных многоточечных функций необходимо, кроме преобразований /26/ и /27/, еще знать коммутатор полей $\psi(x)$ и $A_{\mu}(x)$ с операторами $q^{\pm}$. Поскольку мы считаем, что квантовая теория, основанная на уравнении /22/, конформно-инвариантна, то следует предположить, что этот коммутатор также инвариантен по отношению к преобразованиям /26/. В таком случае мы придем к выводу, что он должен быть пропорционален полю $\psi(x)$, т.е.

$$[q^{\pm}, \psi(x)] = \pm i\omega\psi(x), \qquad /29/$$

где ω - неизвестная вещественная постоянная.

Подобные соображения приводят нас к выводу, что должно выполняться и следующее равенство:

$$[q^{\pm}, A_{\mu}(x)] = 0. \qquad /30/$$

4. Теперь перейдем к вычислению двух- и трехточечных функций. Пусть

$$\Delta_{ij}(x_1, x_2) = \langle 0|\bar{\psi}_j(x_1)\psi_i(x_2)|0\rangle. \qquad /31/$$

В силу нашего предположения о конформной инвариантности теории легко получить следующие функциональные уравнения для функции /31/:

$$\Delta(x_1, x_2) = r^{3+2e^2\omega}\Delta(rx_1, rx_2), \qquad /32/$$

$$\Delta(x_1, x_2) = (|x_1^2||x_2^2|)^{-2-e^2\omega}\,\hat{x}_2\Delta((x_1)_R, (x_2)_R)\,\hat{x}_1. \qquad /33/$$

Продемонстрируем, как, например, получается второе из приведенных уравнений. В силу конформной инвариантности вакуумного состояния мы можем написать, что

$$\langle 0|\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)|0\rangle =$$
$$= \langle 0|:|x_1^2|^{-2-ie^2q}\,\bar{\psi}((x_1)_R)\hat{x}_1 : :|x_2^2|^{-2+ie^2q}\,\hat{x}_2\psi((x_2)_R):|0\rangle$$

/здесь использовано второе из преобразований /26//. Расписав нормальное произведение, имеем:

$$\langle 0|\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)|0\rangle = (|x_1^2||x_2^2|)^{-2}\,\hat{x}_2\langle 0|\bar{\psi}((x_1)_R)|x_1^2|^{-ie^2q^-}|x_2^2|^{ie^2q^+}\times$$
$$\times\psi((x_2)_R)|0\rangle\hat{x}_1,$$

где мы учли равенство /17/. Теперь, прокоммутировав $|x_1^2|^{-ie^2q^-}$ и $|x_2^2|^{ie^2q^+}$ с ψ и $\bar{\psi}$ соответственно, мы получим равенство /33/ /опять с учетом /17//. Уравнения /32/ и /33/ имеют однозначное решение /с точностью до мультипликативной постоянной N /:

$$\Delta(x_1, x_2) = N\frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^{2+e^2\omega}}. \qquad /34/$$

Теперь ясно, что двухточечная функция спинорного поля имеет действительную аномальную размерность, несмотря на комплексность преобразований /26/. Таким образом, в квантовой теории конформная размерность имеет двойственный характер: она комплексна и неопределенна для самих полевых операторов, но действительна и вполне определенна для двухточечных функций этих же полей.

Этот механизм "двойственной размерности" имеет место для всех многоточечных функций, и они получаются самосогласованными. Чтобы показать это, рассмотрим трехточечную функцию

$$\Gamma_{\mu ij}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|\bar{\psi}_j(x_1) : A_{\mu}(x_2)\psi_i(x_3) : |0\rangle$$
$$\equiv \langle 0|\bar{\psi}_j(x_1)A_{\mu}^{+}(x_2)\psi_i(x_3)|0\rangle, \qquad /35/$$

где $A_{\mu}^{+}(x_2)$ - положительно-частотная часть электромагнитного поля. /Оно преобразуется по закону /27/, где вместо q оставлено лишь q^{+}/. Требование конформной инвариантности функции /35/ приводит к следующим двум уравнениям:

$$\Gamma_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = r^{4+2e^2\omega}\Gamma_{\mu}(rx_1, rx_2, rx_3), \qquad /36/$$

$$\Gamma_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = (|x_1^2||x_3^2|)^{-2-e^2\omega}\,\hat{x}_3\frac{\partial(x_2)_R^{\nu}}{\partial x_2^{\mu}}\Gamma_{\nu}((x_1)_R, (x_2)_R, (x_3)_R) -$$
$$- ie\omega\partial_{\mu}\ln|x_2^2|\Delta(x_1, x_2). \qquad /37/$$

Видно, что функция $\Gamma_{\mu}(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет неоднородному уравнению - такой ситуации почти не встречается в стандартной конформно-инвариантной теории поля. Общее решение уравнений /36/ и /37/ имеет вид:

$$\Gamma_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \left(b_1\frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}}\ln|x_{32}^2| + b_2\frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}}\ln|x_{12}^2|\right)\Delta(x_1, x_3) +$$
$$+ |x_{13}^2|^{-1-e^2\omega}\left\{c_1\frac{\hat{x}_{13}}{x_{13}^2}\frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}}\ln\left|\frac{x_{12}^2}{x_{32}^2}\right| + c_2\frac{\hat{x}_{32}\gamma^{\mu}\hat{x}_{21}}{x_{32}^2x_{21}^2}\right., \qquad /38/$$
$$x_{ik} = x_i - x_k,$$

где, например, b_1, c_1 и c_2 - произвольные, а

$$b_2 = ie\omega - b_1. \qquad /39/$$

Из-за наличия нормального произведения в определении функция /35/ должна иметь конечный предел, когда

$x_2 \to x_3$.

Это требование приводит еще к двум условиям для трех произвольных констант:

$$c_2 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = b_1 N. \qquad /40/$$

Учитывая все эти условия, вместо /38/ окончательно получим:

$$\Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3) = -2ie\omega N \frac{|x_{13}^2|^{-2-e^2\omega}}{x_{12}^2}(x_{12})_\mu \hat{x}_{13}. \qquad /41/$$

Теперь с помощью уравнения /22/ покажем согласованность полученных нами функций /34/ и /41/. Если аргумент в этом уравнении обозначить через x_2, умножить его слева на одну из компонент $\bar{\psi}(x_1)$ и потом взять вакуумное среднее из обеих его частей, то получим:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu}\Delta(x_1, x_2) = e\gamma^\mu \Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3). \qquad /42/$$

Подставляя /34/ и /41/ в последнее равенство, можно убедиться, что функции /34/ и /41/ удовлетворяют уравнению /42/ тождественно, что и доказывает согласованность полученных нами двух- и трехточечных функций.

Наконец, можно найти и двухточечную функцию потенциалов A_μ, используя ту же конформную инвариантность:

$$\delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) = \langle 0| A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)|0\rangle. \qquad /43/$$

В силу равенства /30/ уравнения для конформной инвариантности функции $\delta_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ не отличаются от стандартных, причем конформная размерность в нашем случае - каноническая. В итоге получим:

$$\delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) \sim \partial_\mu \partial_\nu \ln|x_{12}^2|. \qquad /44/$$

Последний результат показывает, что таким образом полученные функции Вайтмана относятся к теории с чисто продольными электромагнитными потенциалами. Если положить

$$\omega = \frac{\lambda}{(4\pi)^2},$$

то данная конформно-инвариантная электродинамика полностью совпадает с моделью, рассмотренной в начале нашей работы.

Авторы выражают свою глубокую благодарность И.Т.Тодорову и В.Петковой за обсуждение и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим двухточечные функции поля $S(x)$: перестановочную функцию и ее частотные части. Двухточечная функция

$$W(x) = \langle 0|S(x)S(0)|0\rangle$$

равна определенной подходящим образом частотной части $-i\lambda E^-(x)$ перестановочной функции $-i\lambda E(x)$. Обобщенная функция $E(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box^2 E(x) = 0$$

и однозначно определяется граничными условиями

$$E(x)|_{x^0=0} = \partial_0 E(x)|_{x^0=0} = \partial_0^2 E(x)|_{x^0=0} = 0, \quad \partial_0^3 E(x)|_{x^0=0} = \delta(\vec{x}).$$

Преобразование Фурье

$$\tilde{E}(k) = \int E(x) e^{ikx} d^4x$$

нетрудно найти, если рассмотреть сначала такое преобразование только по пространственным переменным

$$f(t, \vec{k}) = \int E(t, \vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x.$$

Задача сводится /см. [14]/ к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)^2 f(t, \vec{k}) = 0, \qquad \omega^2 = \vec{k}^2 \qquad /A/$$

при начальных условиях

$$f(0, k) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{k})\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \vec{k})\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(t, \vec{k})\Big|_{t=0} = 1.$$

Уравнение /A/ имеет четыре независимых решения: $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$, $te^{i\omega t}$, $te^{-i\omega t}$. Начальным условиям удовлетворяет решение

$$f(t, \vec{k}) = \frac{1}{2\omega^3}[\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)],$$

и для полного преобразования Фурье функции $E(x)$ находим

$$\tilde{E}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^0 t} f(t, \vec{k}) dt = \frac{\pi i}{\omega^2}\left[\omega \frac{\partial}{\partial k^0}\delta(k^2) + \epsilon(k^0)\delta(k^2)\right].$$

При попытке разбить $E(x)$ на частотные части возникает трудность из-за того, что произведения $\theta(\pm k^0)\tilde{E}(k)$, строго говоря, не существует в классе обобщенных функций над $S(R_4)$. Действительно, в выражении

$$\tilde{E}^-(k) = \theta(k^0)\tilde{E}(k) = \frac{\pi i}{2\omega^3}\left[\omega \frac{\partial}{\partial k^0}\delta(k^0 - \omega) + \delta(k^0 - \omega)\right]$$

второй член имеет неинтегрируемую особенность при $k \to 0$. Среди множества возможных регуляризаций естественно выбрать такую, которая сохраняла бы свойство

$$\tilde{E}^+(k) + \tilde{E}^-(k) = \tilde{E}(k). \qquad /B/$$

Этому требованию удовлетворяет регуляризация при помощи вычитания δ-функции, умноженной на бесконечный коэффициент:

$$\tilde{E}^{\pm}_{\kappa}(k) = \frac{\pi i}{2\omega^2}\frac{\partial}{\partial k^0}\delta(k^0 \pm \omega) \mp \frac{\pi i}{2\omega^3}\delta(k^0 \pm \omega) \pm \frac{\pi i}{2}\delta^4(k) \times \qquad /C/$$

$$\times \int \frac{d^3 q}{|\vec{q}|^3}\theta(\kappa - |\vec{q}|).$$

Для произвольной функции $g \in S(R_4)$ интегралы

$$\int \tilde{E}^{\pm}_{\kappa}(k) g(k) d^4 k = \frac{\pi i}{2}\int \frac{d^3 k}{\omega^3}\{-\omega \frac{\partial}{\partial k^0} g(\omega, \vec{k}) \mp [g(\omega, \vec{k}) - g(0)\theta(\kappa - \omega)]\}$$

существуют. При переходе к обратному преобразованию Фурье функции $\tilde{E}^{\pm}(k)$ удобно пользоваться вспомогательной регуляризацией, которая не сохраняет свойство /B/, но регуляризует второй и третий члены в правой стороне /C/:

$$\tilde{E}^{\pm}_{\kappa,a}(k) = \frac{\pi i}{2\omega^2}\theta(\omega - a)\frac{\partial}{\partial k^0}\delta(k^0 \pm \omega) \mp$$

$$\mp \frac{\pi i}{2\omega^3}\delta(k^0 \pm \omega)\theta(\omega - a) \pm \frac{\pi i}{2}\delta^4(k)\int \frac{d^3 q}{|\vec{q}|^3}\theta(|\vec{q}| - a)\theta(\kappa - |\vec{q}|),$$

$$0 < a < \kappa .$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{a \to 0} \tilde{E}^{\pm}_{\kappa,a}(k) = \tilde{E}^{\pm}_{\kappa}(k).$$

Теперь легко находим обратное преобразование Фурье функции $\tilde{E}^{-}_{\kappa}(k)$:

$$E^{-}_{\kappa}(x) = -\frac{i}{(4\pi)^2}[\ln(\mu^2 |x_0^2 - \vec{x}^2|) + i\pi\epsilon(x^0)\theta(x^2) = -\frac{i}{(4\pi)^2}\ln(-\mu^2 x^2 + i o x^0),$$

где $\mu = e^{C-1}\kappa$, C - постоянная Эйлера

$$C = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = -\int_0^{\infty} ds\, e^{-s}\ln s .$$

Индекс κ в дальнейшем писать не будем.

Таким образом, получаем

$$\frac{i}{\lambda}W(x) = E^{-}(x) = -\frac{i}{(4\pi)^2}\ln(-\mu^2 x^2 + i o x^0) = \overline{(E^{+}(x))},$$

$$E(x) = E^{+}(x) + E^{-}(x) = \frac{1}{8\pi}\epsilon(x^0)\theta(x^2).$$

Если известна функция $E(x)$, можно решать задачу Коши для уравнения /2/ при граничных условиях

$$S(x)|_{x^0 = y^0} = a_0(\vec{x}), \qquad \partial_0 S(x)|_{x^0 = y^0} = a_1(\vec{x}),$$

$$\partial_0^2 S(x)|_{x^0 = y^0} = a_2(\vec{x}), \qquad \partial_0^3 S(x)|_{x^0 = y^0} = a_3(\vec{x}).$$

Формула, аналогичная представлению

$$\phi(x) = \int D(x - y)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(y) d^3 y$$

для свободного скалярного поля, в этом случае выглядит так:

$$S(x) = -\int \partial_0^3 E(x - y) a_0(\vec{y}) d^3 y - \int \partial_0^2 E(x - y) a_1(\vec{y}) d^3 y$$

$$+ \int \partial_0 E(x - y) a_2(\vec{y}) d^3 y + \int E(x - y) a_3(\vec{y}) d^3 y$$

$$+ 2\int \partial_0 D(x - y) a_0(\vec{y}) d^3 y + 2\int D(x - y) a_1(\vec{y}) d^3 y,$$

где $D(x) = \Box E(x)$ — перестановочная функция безмассового свободного скалярного поля:

$$\Box D(x) = 0, \quad D(0, \vec{x}) = 0, \quad \partial_0 D(0, \vec{x}) = \delta(\vec{x}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Zwanziger D. Phys.Rev., 1978, D17, p.457.
2. Zwanziger D. NYU/TR8/78 Infrared Catastrophe Averted by Hertz potential.
3. Hadjiivanov L., Mikhov S.G., Stoyanov D.T. Journ. of Phys., 1979, A12, p.119.
4. Ferrara S., Zumino B. Nucl.Phys., 1978, B134, p.301.
5. Todorov I.T., Mintchev M.C., Petkova V.B. Conformal Invariance in QFT.Scuola Normale Superiore,Pisa, Italy.
6. Mintchev M., Strocchi F. Pisa preprint, S.N.S., 3/1977.
7. Hadjiivanov L., Stoyanov D.Ts. JINR, E2-10950, Dubna, 1977.
8. Salam A., Strathdee J. Phys.Rev., 1969, 184, p.1750.
9. Salam A., Strathdee J. Phys.Rev., 1969, 184, p.1760.
10. Isham C.J., Salam A., Strathdee J. Phys.Lett., 1970, 31B, p.300.
11. Dass T., Shyam R. Phys.Rev., 1977, D15, p.1580.
12. Matsubara Y. Preprint Nagoya University, Japan - DPNU - 15-79.
13. Стоянов Д.Ц. В кн.: Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. НРБ, 1978. ОИЯИ, Д1,2-12450, Дубна, 1979.
14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1979 года.