сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12769

Дао Вонг Дык, Нгуен Тхи Хонг

СУПЕРСИММЕТРИЯ ПОЛЕЙ И ИСТОЧНИКОВ

1979

P2 - 12769

Дао Вонг Дык, Нгуен Тхи Хонг

СУПЕРСИММЕТРИЯ ПОЛЕЙ И ИСТОЧНИКОВ

Дао Вонг Дык, Нгуен Тхи Хонг P2 - 12769

Суперсимметрия полей и источников

Предложена новая схема суперсимметрии, в которой поля и источники объединяются в один супермультиплет. При этом использована супералгебра с некоторой нильпотентной константой. Установлены трансформационные свойства компонент поля и источника. Получены инвариантные уравнения для полей с источниками.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Dao Vong Duc, Nguyen Thi Hong P2 - 12769

Supersymmetry of Fields and Sources

A scheme of supersymmetry is cosidered in which the fields and their sources can be combined together in the same multiplet. This is done by using some nilpotent constant in the structure of the underlying algebra.

The investigations has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

§1. ВВЕДЕНИЕ

Теория суперсимметрии [1-6] считается одним из наиболее замечательных достижений теоретической физики. Суперсимметрия обогатила физику элементарных частиц: простейшие суперсимметричные модели уже обладают привлекательными свойствами, следующими из соотношений между функциями Грина бозонов и фермионов [1-11].

В настоящей работе мы рассматриваем вариант суперсимметрии, в рамках которой можно объединить поля и их источники в один и тот же супермультиплет. Отметим, что задача подобного типа решается также в нашей предыдущей работе [12], где обычная алгебра суперсимметрии расширяется при помощи дополнительного биспинорного генератора. Схема же, предложенная в настоящей работе, гораздо проще и не требует увеличения числа генераторов. При этом решающим фактором является использование нильпотентной константы в структуре исходной алгебры.

§2. СУПЕРАЛГЕБРА С НИЛЬПОТЕНТНОЙ КОНСТАНТОЙ

Введем некоторую нильпотентную константу g так, чтобы $g^2 = 0$, и рассмотрим следующую супералгебру:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad /1/$$

$$[P_\mu, S_\alpha] = g(\gamma_\mu S)_\alpha, \qquad /2/$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} P^\mu + g(\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} M^{\mu\nu}, \qquad /3/$$

где $M_{\mu\nu}$, P_μ - генераторы Пуанкаре, S_α - биспинорный генератор суперсимметрии. /Другие обычные коммутаторы, включающие только $M_{\mu\nu}$ и P_μ, не выписываются/. Легко проверить, что все тождества Якоби удовлетворяются. Как видно из /2/ и /3/, константа g имеет размерность обратной длины, поэтому было бы удобнее положить где $/x^{(s)}, \theta^{(s)}/$ есть сокращенные обозначения для трансформированных значений $/x, \theta/$, определяемых уравнениями /13/ и /14/.

Законы преобразования /17/, /18/ для $\psi(x,\theta)$ приводят к следующим законам преобразования для $J(x,\theta)$ и $\phi(x,\theta)$

- при преобразовании P :

$$J(x,\theta) \to J(x+a,\theta), \qquad /19/$$

$$\phi(x,\theta) \to \phi(x+a,\theta) - \frac{i}{\ell}(\hat{a}\theta)_a \frac{\partial}{\partial\theta_a} J(x+a,\theta);$$

- при преобразовании S :

$$J(x,\theta) \to J(x+\frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma\theta,\ \theta+\epsilon),$$

$$\phi(x,\theta) \to \phi(x+\frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma\theta,\ \theta+\epsilon) +$$

$$+\frac{1}{\ell}[(-\bar{\epsilon}\theta x_\mu + \bar{\epsilon}\hat{x}\gamma_\mu\theta - \frac{i}{4}\bar{\theta}\theta\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta + \frac{i}{4}\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_\mu\epsilon\bar{\theta}\gamma_5\theta + \qquad /20/$$

$$+\frac{i}{8}\bar{\epsilon}\gamma_5\epsilon\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta - \frac{i}{12}\bar{\epsilon}\epsilon\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta)\frac{\partial}{\partial y_\mu} +$$

$$+(\bar{\theta}\theta + \bar{\epsilon}\theta + \frac{1}{3}\bar{\epsilon}\epsilon)\epsilon_a \frac{\partial}{\partial\tau_a}]\,J(y,\tau),$$

$$y = x + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma\theta, \quad \tau = \theta + \epsilon .$$

Легко видеть, что произведение двух расширенных суперполей снова является расширенным суперполем.

Для полей-компонент, появляющихся в разложении

$$\phi(x,\theta) = A(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta F(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_5\theta G(x) +$$

$$+\frac{i}{4}\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta A^\mu(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\chi(x) + \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x), \qquad /21/$$

$$J(x,\theta) = A^{(J)}(x) + \bar{\theta}\psi^{(J)}(x) + \ldots\ldots\ldots,$$

мы имеем:

- при преобразовании P :

$$\delta A = a_\mu \partial^\mu A,$$

$$\delta\psi = a_\mu \partial^\mu \psi + \frac{i}{\ell}\hat{a}\psi^{(J)},$$

$$\delta F = a_\mu \partial^\mu F, \qquad /22/$$

$$\delta G = a_\mu(\partial^\mu G + \frac{2}{\ell}A^{(J)\mu}),$$

$$\delta A_\nu = a_\mu(\partial^\mu A_\nu - \frac{2}{\ell}\delta^\mu_\nu G^{(J)}),$$

$$\delta\chi = a_\mu\partial^\mu\chi + \frac{i}{\ell}\hat{a}\chi^{(J)};$$

При преобразовании S :

$$\delta A = \bar{\epsilon}\psi,$$

$$\delta\psi = \frac{1}{2}[F + \gamma_5 G + i\gamma_5\gamma_\mu A^\mu - i\hat{\partial}A]\epsilon +$$

$$+\frac{1}{\ell}[-x_\mu\partial^\mu A^{(J)} + \partial^\mu A^{(J)}\gamma_\mu\hat{x}]\epsilon,$$

$$\delta F = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}[\chi - i\hat{\partial}\psi] + \frac{1}{\ell}\bar{\epsilon}[4\psi^{(J)} + (x_\mu\partial^\mu - \hat{x}\hat{\partial})\psi^{(J)}],$$

$$\delta G = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5[\chi - i\hat{\partial}\psi] - \frac{1}{\ell}\bar{\epsilon}(x_\mu\partial^\mu - \hat{x}\hat{\partial})\gamma_5\psi^{(J)}, \qquad /23/$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5[i\gamma_\mu\chi + \hat{\partial}\gamma_\mu\psi] - \frac{i}{\ell}\bar{\epsilon}(x_\nu\partial^\nu - \hat{x}\hat{\partial})\gamma_5\gamma_\mu\psi^{(J)},$$

$$\delta\chi = \frac{1}{2}[D - i\hat{\partial}F + i\gamma_5\hat{\partial}G - \gamma_5\gamma_\mu\hat{\partial}A^\mu]\epsilon + \frac{1}{\ell}[i\hat{\partial}A + 2(F + \gamma_5 G +$$

$$+i\gamma_5\gamma_\mu A^\mu) + (-\partial^\mu F^{(J)} + \gamma_5\partial^\mu G^{(J)} + i\gamma_5\gamma_\nu\partial^\mu A^{(J)\nu})(x_\mu - \gamma_\mu\hat{x})]\epsilon,$$

$$\delta D = -i\bar{\epsilon}\hat{\partial}\chi + \frac{2}{\ell}\bar{\epsilon}\partial^\mu(x_\mu\chi^{(J)} - \hat{x}\gamma_\mu\chi^{(J)} + i\gamma_\mu\psi^{(J)}) + \frac{4}{\ell}\bar{\epsilon}\chi^{(J)} .$$

Что касается $A^{(J)}$, $\psi^{(J)}$, ..., то они имеют обычные трансформационные свойства, именно: они преобразуются по аналогичным формулам без членов, содержащих фактор $1/\ell$.

Отметим, что компоненты ψ, G, A_ν, χ еще не обладают обычными трансформационными свойствами при трансляции. Однако вместо них мы можем использовать комбинации

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{i}{\ell}\hat{x}\psi^{(J)},$$

$$\tilde{G}(x) = G(x) + \frac{2}{\ell}x_\mu A^{(J)\mu}, \qquad /24/$$

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{2}{\ell}x_\mu G^{(J)},$$

$$\tilde{\chi}(x) = \chi(x) + \frac{i}{\ell}\hat{x}\chi^{(J)},$$

для которых имеет место обычный закон трансляции.

С помощью выражений /9/ и /10/ для P_μ и S_a можно показать, что не существует ни ковариантной векторной производной, ни ковариантной спинорной производной. Тем не менее мы можем найти ковариантные операторы, включающие производные второго порядка. Прежде всего это оператор, найденный в /15/; другой, более важный оператор есть:

$$\mathfrak{D}^{(2)} = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_a\partial\bar{\theta}^a} - i(\hat{\partial}\theta)_a\frac{\partial}{\partial\theta_a} + \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\Box + \frac{k}{\ell}[2x_\mu\partial^\mu\theta_a\frac{\partial}{\partial\theta_a} -$$

$$- 2(\hat{x}\hat{\partial}\theta)_a\frac{\partial}{\partial\theta_a} + 2\bar{\theta}^a\theta_\beta\frac{\partial^2}{\partial\theta_\beta\partial\bar{\theta}^a} + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta(\hat{\partial}\theta)_a\frac{\partial}{\partial\theta_a} - \qquad /25/$$

$$- \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\Box - 8\theta_a\frac{\partial}{\partial\theta_a}].$$

При $\frac{1}{\ell}\to 0$ этот оператор сводится к $\bar{D}D$, где

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^a} - \frac{i}{2}(\hat{\partial}\theta)_a$$

есть обычная ковариантная производная /3-6/. Полезно выписать формулу действия оператора $\mathfrak{D}^{(2)}$ на расширенное суперполе /16/:

$$\mathfrak{D}^{(2)}\psi(x,\theta) = \bar{D}D(J(x,\theta) + k\phi(x,\theta)) +$$

$$+ \frac{k}{\ell}[2\bar{\theta}(-4\psi^{(J)} - x_\mu\partial^\mu\psi^{(J)} + \hat{x}\hat{\partial}\psi^{(J)}) - \qquad /26/$$

$$- 3\bar{\theta}\theta F^{(J)} - 3\bar{\theta}\gamma_5\theta G^{(J)} + i\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta(-3A^{(J)\mu} - x_\nu\partial^\mu A^{(J)\nu} + x^\mu\partial_\nu A^{(J)\nu}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}(-6\chi^{(J)} - x_\mu\partial^\mu\chi^{(J)} + \hat{x}\hat{\partial}\chi^{(J)} - i\hat{\partial}\psi^{(J)}) - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2(D^{(J)} + \Box A^{(J}$$

§4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Из формулы /23/ мы замечаем, что при преобразовании комбинация $D(x) - \frac{8}{\ell}F^{(J)}(x)$ приобретает вариацию, равную 4-дивергенции, а именно:

$$\delta(D - \frac{8}{\ell}F^{(J)}) = -i\bar{\epsilon}\hat{\partial}\chi + \frac{2}{\ell}\bar{\epsilon}\partial^\mu(x_\mu\chi^{(J)} - \hat{x}\gamma_\mu\chi^{(J)} + \qquad /27/$$

$$+ 3i\gamma_\mu\psi^{(J)}).$$

Следовательно, 4-интеграл от $D - \frac{8}{\ell}F^{(J)}$ инвариантен относительно S:

$$\int d^4x(D - \frac{8}{\ell}F^{(J)}) = \mathrm{inv}.$$

Он также инвариантен относительно трансляции, как это видн
из /22/. Используя этот результат, мы можем построить лагр
жиан, интеграл действия от которого инвариантен. При помо
щи ковариантного оператора $\mathfrak{D}^{(2)}$, найденного в /25/, мы мо
жем взять для действительного скалярного расширенного суп
поля $\psi(x,\theta)$:

$$S = \int d^4x\mathfrak{L}, \qquad /28/$$

$$\mathfrak{L} = \{-\frac{1}{4}\psi(x,\theta)\mathfrak{D}^{(2)}\psi(x,\theta) + V(\psi)\}_{D - \frac{8}{\ell}F^{(J)}},$$

где $V(\psi)$ -некоторая гладкая функция от ψ. Рассмотрим сам
простой случай:

$$V(\psi) = \frac{1}{2}m\psi^2. \qquad /29/$$

Подставляя /21/, /26/ и /29/ в /28/, мы получим:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L} = {} & \partial^{\mu} A^{(J)} \partial_{\mu} F + \partial^{\mu} F^{(J)} \partial_{\mu} A + D^{(J)} F + F^{(J)} D - \\
& - G^{(J)} \partial_{\mu} A^{\mu} - G \partial_{\mu} A^{(J)\mu} + A^{\mu} \partial_{\mu} G^{(J)} + A^{(J)\mu} \partial_{\mu} G + \\
& + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{(J)} \hat{\partial} \chi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \hat{\partial} \chi^{(J)} - \partial^{\mu} \bar{\psi}^{(J)} \partial_{\mu} \psi - \bar{\chi}^{(J)} \chi + \frac{i}{2} \bar{\chi}^{(J)} \hat{\partial} \psi + \\
& + \frac{i}{2} \bar{\chi} \hat{\partial} \psi^{(J)} + \frac{1}{\ell} [- 4 \partial^{\mu} A^{(J)} \partial_{\mu} A^{(J)} + 2 F^{(J)} F^{(J)} + 6 G^{(J)} G^{(J)} + \qquad /30/ \\
& + 6 A^{(J)}_{\mu} A^{(J)\mu} + 2 x_{\nu} A^{(J)}_{\mu} \partial^{\mu} A^{(J)\nu} - 2 x^{\mu} A^{(J)}_{\mu} \partial_{\nu} A^{(J)\nu} - \\
& - 8 \bar{\psi}^{(J)} \chi^{(J)} - \bar{\psi}^{(J)} (x\partial) \chi^{(J)} + \bar{\psi}^{(J)} \hat{x} \hat{\partial} \chi^{(J)} - \\
& - 3i \bar{\psi}^{(J)} \hat{\partial} \psi^{(J)} - \bar{\chi}^{(J)} (x\partial) \psi^{(J)} + \bar{\chi}^{(J)} \hat{x} \hat{\partial} \psi^{(J)}] + \\
& + m [A^{(J)} D + 2 F^{(J)} F + 2 G^{(J)} G + 2 A^{(J)}_{\mu} A^{\mu} + \\
& + D^{(J)} A - 2 \bar{\psi}^{(J)} \chi - 2 \bar{\chi}^{(J)} \psi + \frac{1}{\ell} (- 8 A^{(J)} F^{(J)} + 4 \bar{\psi}^{(J)} \psi^{(J)})].
\end{aligned}
$$

Лагранжиан /30/ приводит к таким же уравнениям для полей-компонент в $J(x, \theta)$, что и в случае обычного свободного скалярного суперполя, именно:

$$
\begin{aligned}
& F^{(J)} = - m A^{(J)} , \\
& \Box F^{(J)} = m D^{(J)} , \\
& \Box A^{(J)} = D^{(J)} + 2 m F^{(J)} , \\
& \frac{1}{2} (\chi^{(J)} - i \hat{\partial} \psi^{(J)}) = - m \psi^{(J)} , \qquad /31/ \\
& \frac{1}{2} \{ \Box \psi^{(J)} + i \hat{\partial} \chi^{(J)} \} = m \chi^{(J)} , \\
& \partial_{\mu} A^{(J)\mu} = m G^{(J)} , \\
& \partial_{\mu} G^{(J)} = - m A^{(J)}_{\mu} .
\end{aligned}
$$

Для полей-компонент в $\phi(x, \theta)$ имеем:

$$
\begin{aligned}
& F = - m A , \\
& \Box F = m D + \frac{8}{\ell} (\Box A^{(J)} - m F^{(J)}) , \\
& \Box A = D + 2 m F + \frac{4}{\ell} (F^{(J)} - 2 m A^{(J)}) , \\
& \frac{1}{2} (\chi - i \hat{\partial} \psi) = - m \psi + \frac{1}{\ell} (- 4 \psi^{(J)} - (x\partial) \psi^{(J)} + \hat{x} \hat{\partial} \psi^{(J)}) , \\
& \frac{1}{2} (\Box \psi + i \hat{\partial} \chi) = m \chi + \frac{1}{\ell} (- 4 m \psi^{(J)} + 3 i \hat{\partial} \psi^{(J)} + (x\partial) \chi^{(J)} - \qquad /32/ \\
& \qquad - \hat{x} \hat{\partial} \chi^{(J)} + 4 \chi^{(J)}) , \\
& \partial_{\mu} A^{\mu} = m G + \frac{6}{\ell} G^{(J)} , \\
& \partial_{\mu} G = - m A_{\mu} + \frac{2}{\ell} (- 3 A^{(J)}_{\mu} + x_{\mu} \partial_{\nu} A^{(J)\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu} A^{(J)\nu}) .
\end{aligned}
$$

Уравнения /31/ и /32/ можно сочетать соответствующим образом, чтобы получить:

$$
\begin{aligned}
& (\Box + m^2) A = - \frac{6m}{\ell} A^{(J)} , \\
& (\Box + m^2) F = - \frac{6m}{\ell} F^{(J)} , \\
& (\Box + m^2) D = - \frac{6m}{\ell} D^{(J)} , \\
& (i \hat{\partial} - m) \tilde{\psi} = \frac{4}{\ell} \psi^{(J)} , \\
& (i \hat{\partial} - m) \tilde{\chi} = \frac{4}{\ell} \chi^{(J)} , \qquad /33/ \\
& (\Box + m^2) \tilde{G} = - \frac{2m}{\ell} G^{(J)} , \\
& (\Box + m^2) \tilde{A}_{\mu} = - \frac{2m}{\ell} A^{(J)}_{\mu} .
\end{aligned}
$$

Мы видим, что поля-компоненты A, F, D, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\chi}$, $\tilde{G}$, $\tilde{A}_\mu$ являются взаимодействующими полями, а их источники есть /с точностью до мультипликативной константы, пропорциональной $1/\ell$ / соответствующие компоненты в $J(x, \theta)$.

Наконец, отметим, что уравнения /31/, /32/ могут быть объединены в общее явно ковариантное уравнение для расширенного суперполя $\psi(x, \theta)$:

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{L}^{(2)}\psi(x, \theta) + m\psi(x, \theta) = 0 .$$

Авторы выражают глубокую благодарность В.А.Мещерякову и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольфанд И.А., Лихтман Е.П. Письма в ЖЭТФ, 1971,12,с.452.
2. Volkov D.V., Akulov V.P. Phys. Lett.,1973, 46B, p.109.
3. Wess J.,Zumino B. Nucl. Phys.,1974, 70B, p.39.
4. Wess J.,Zumino B. Phys.Lett., 1974, 49B, p.52.
5. Salam A., Strathdee J. Nucl.Phys.,1974, 76B, p.477.
6. Salam A., Strathdee J. Phys.Rev.D., 1975, 11, p.1521.
7. Огиевецкий В.И., Мезинческу Л. УФН, 1975, 117, с.637.
8. Corwin L., Ne'eman Y., Sternberg S. Rev.Mod.Phys., 1975, 47, p.573.
9. Дао Вонг Дык. ТМФ, 1975, 24, с.49.
10. Dao Vong Duc. Ann.Inst.Henri Poincare,1977, 27, p.425.
11. Salam A., Strathdee J. Fortschritte der Physik, 1978, 26, p.57.
12. Dao Vong Duc. Nuovo Cim., 1976, 36A, p.305.
13. Keck B.W. J. of Phys., 1975, A8, p.1819.
14. Zumino B. Nucl.Phys., 1977, B127, p.189.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 сентября 1979 года