сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12768

Нгуен Тхи Хонг

К ВОПРОСУ СПИНОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

1979

P2 - 12768

Нгуен Тхи Хонг

К ВОПРОСУ СПИНОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Нгуен Тхи Хонг

Р2 - 12768

К вопросу спинорного представления пространства-времени

Рассматривается представление вектор-координаты пространства-времени в виде билинейной комбинации спинорных координат, в котором можно реализовать трансляцию пространства-времени. Для этой цели необходимо ввести две спинорные координаты. В рамках лагранжева формализма выведены уравнения полей Эйлера-Лагранжа. При помощи теоремы Нётер получены сохраняющиеся физические величины. Изучены также спинорные калибровочные поля в спинорном представлении пространства-времени.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Nguyen Thi Hong

P2 - 12768

On the Problem of Spinor Representation of Space-Time

A method of realizing the bilinear spinor representation of space-time is suggested, in which the usual translation can be established. In this spinor formalism the equations of motion, the Noether theorem as well as the spinor gauge fields are considered.

The investigations has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

§1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос спинорного представления пространства-времени был рассмотрен впервые Смржем в работе [1]. Исходным пунктом автора служит идея, утверждающая, что пространство - время является самой основной физической системой и поэтому 4-вектор x_μ должен был бы строиться из более фундаментальных математических объектов, а именно, из спиноров. Используя три разных базисных спинора и придавая при этом специальную роль третьему элементу - ψ, через который выражается 4-вектор пространства-времени,

$$x_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu \psi, \qquad /1.1/$$

Смржу удалось вывести механизм расщепления масс частиц и получить массовую формулу Гелл-Манна-Окубо [2,3].

Вышеупомянутые идеи снова были рассмотрены более детально и более элегантным путем в работах Тайта и Корнвелла [4] и Араки и Окубо [5].

Следует, однако, отметить, что, как было указано в цитированных работах, при представлении вектора пространства-времени по образу /1.1/ мы не можем получить обычное трансляционное преобразование, и тогда группой симметрии пространства-времени будет являться группа де Ситтера /4+1/ вместо группы Пуанкаре.

Вопрос спинорного представления пространства-времени приобретает еще новое значение в связи с теорией суперсимметрии [6-9]. Дело в том, что при изучении суперсимметрии используется удобный метод, где обычное пространство-время расширяется путем введения новой спинорной координаты. В этом случае спинорное представление обычного пространства-времени позволяет нам трактовать преобразования суперсимметрии и Пуанкаре на равной основе, формулируя их на спинорном языке.

Здесь мы предлагаем один метод спинорного представления пространства-времени [10], в котором можно ввести обычное трансляционное преобразование и, следовательно, можно использовать обычную группу симметрии Пуанкаре. Рассматриваются уравнения движения и токи Нётер в этом спинорном формализме, а также спинорные калибровочные поля, которые появляются при локальных преобразованиях [11]. Последний параграф посвящается конформным преобразованиям [12].

§2. СПИНОРНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАНКАРЕ

В отличие от работ [1,4,5] мы вводим два базисных спинора $\theta_{\alpha i}$ и $\tau_{\alpha i}$, где α -спинорный индекс Дирака, $\alpha = 1,2,3,4$, i - изоспинорный индекс, $i = 1,2$, и налагаем следующее $SU(2)$ -ковариантное майораново условие:

$$\bar\theta^{\alpha i} = (e^{-1})^{ij}\,(C^{-1}\gamma_5)^{\alpha\beta}\,\theta_{\beta j}\,,$$
$$\bar\tau^{\alpha i} = (e^{-1})^{ij}\,(C^{-1}\gamma_5)^{\alpha\beta}\,\tau_{\beta j}\,, \qquad /2.1/$$

где C -матрица зарядового сопряжения,

$$(e^{-1})^{ij} = -e_{ij} = -i(\sigma_2)_i^{\ j}\,,$$

$\sigma_{1,2,3}$ - матрицы Паули.

Используя /2.1/, мы видим, что:

$$\bar\tau\Gamma\theta \equiv \bar\tau^{\alpha i}(\Gamma)^{\beta j}\theta_{\beta j} = \eta_\Gamma\,\bar\theta\Gamma\tau, \qquad /2.2/$$

$$\eta_\Gamma = \begin{cases} +1, & \Gamma = 1,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu^{ai},\ \gamma_5\gamma_\mu\otimes\sigma_a,\ \sigma_{\mu\nu}\otimes\sigma_a\,, \\ -1, & \Gamma = \gamma_5\gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu},\ \sigma_a,\ \gamma_5\otimes\sigma_a,\ \gamma_\mu\otimes\sigma_a\,. \end{cases}$$

В частности, из /2.2/ имеем:

$$\bar\theta\sigma_{\mu\nu}\theta = \tau\sigma_{\mu\nu}\bar\tau = 0, \qquad /2.3/$$

и поэтому

$$\bar\theta\gamma_\mu\gamma_\nu\theta = g_{\mu\nu}\bar\theta\theta,\quad \bar\tau\gamma_\mu\gamma_\nu\tau = g_{\mu\nu}\bar\tau\tau. \qquad /2.4/$$

Это свойство мы будем часто использовать при переходе от спинорных координат (θ,τ) к векторной координате x_μ.

Путем прямой проверки легко установить, что в пространстве (θ,τ) операторы

$$P_\mu = i\frac{1}{\bar\tau\tau}(\gamma_\mu\tau)_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}}\,, \qquad /2.5/$$

$$M_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\left[\tau_{\beta i}\frac{\partial}{\partial\tau_{\alpha i}} + \theta_{\beta i}\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}}\right] \qquad /2.6/$$

реализуют представление алгебры Пуанкаре, именно:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad /2.7/$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \qquad /2.8/$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \qquad /2.9/$$

Согласно /2.5/ и /2.6/ законы преобразования для $\theta_{\alpha i}$ и $\tau_{\alpha i}$ имеют вид

$$e^{-iaP}\theta_{\alpha i} = \theta_{\alpha i} + \frac{1}{\bar\tau\tau}(\hat a\tau)_{\alpha i}\,,\quad e^{-iaP}\tau_{\alpha i} = \tau_{\alpha i}\,, \qquad /2.10/$$

$$e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\theta_{\alpha i} = (e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\theta_{\alpha i}\,,\quad e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\tau_{\alpha i} = (e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\tau)_{\alpha i}. \qquad /2.11/$$

В соответствии с /2.10/ и /2.11/ закон преобразования для полевого оператора запишется в виде

$$e^{-iaP}\phi(\tau,\theta + \frac{1}{\bar\tau\tau}\hat a\tau)e^{iaP} = \phi(\tau,\theta), \qquad /2.10^1/$$

$$e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(\tau',\theta')e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}\phi(\tau,\theta), \qquad /2.11^1/$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ - спиновая матрица для поля ϕ, θ' и τ' - трансформированные спиноры /2.11/.

Строим теперь вектор пространства-времени x_μ через билинейную комбинацию θ и τ по формуле

$$x_\mu = \bar\tau\gamma_\mu\theta. \qquad /2.12/$$

Отметим, что x_μ - действительный вектор, так как $\bar\tau\gamma_\mu\theta = \bar\theta\gamma_\mu\tau$. Более того, чтобы x_μ был полярным вектором, мы определяем преобразование четности следующим образом:

$$\theta_{\alpha i} \to \eta(\gamma_0)_\alpha^{\ \alpha'}\theta_{\alpha' i}\,,\quad \tau_{\alpha i} \to \eta(\gamma_0)_\alpha^{\ \alpha'}\tau_{\alpha' i}\,, \qquad /2.13/$$

где фазовый фактор η одинаков для θ и τ и равен +1 или -1.

Действуя /2.5/ на /2.12/, мы увидим, что

$$P_\mu x_\nu - ig_{\mu\nu} \qquad /2.14/$$

и, следовательно,

$$e^{-iaP} x_\mu = x_\mu + a_\mu , \qquad /2.15/$$

т.е. мы получим обычное трансляционное преобразование для координатного вектора.

Здесь следует обратить внимание на изоспинорную структуру $\theta_{\alpha i}$ и $\tau_{\alpha i}$; именно она позволяет получить уравнения /2.3/ и /2.4/ и, следовательно, /2.14/ и /2.15/.

§3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ТОКИ НЁТЕР

В этом параграфе мы рассматриваем уравнения движения и токи Нётер на языке спинорных координат $\theta_{\alpha i}$ и $\tau_{\alpha i}$.

Из выражения /2.5/ для трансляционного генератора мы видим, что для того, чтобы иметь соответствие с известными результатами /на языке векторной координаты x_μ/ лагранжиан должен зависеть от полей $\phi(\tau,\theta)$ и их первых производных $\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{\alpha i}}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(\tau,\theta), \frac{\partial\phi(\tau, \theta)}{\partial\theta_{\alpha i}}). \qquad /3.1/$$

Мы потребуем, чтобы уравнение движения имело такую форму, при которой в частном случае поля зависят от τ и θ через билинейную комбинацию $\bar{\tau}\gamma_\mu \theta = x_\mu$. Можно показать, что самое простое уравнение, удовлетворяющее этому требованию, есть:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial\theta_{\alpha i})} = 0 . \qquad /3.2/$$

Рассмотрим некоторые простые примеры. Для свободного нейтрального скалярного поля $\Phi(\tau,\theta)$ выбираем лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\bar{\tau}\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\alpha i}} \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}^{\alpha i}} - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 , \qquad /3.3/$$

а для заряженного скалярного поля - вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\bar{\tau}\tau} \frac{\partial\Phi^+}{\partial\theta_{\alpha i}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}^{\alpha i}} - m^2\Phi^+\Phi . \qquad /3.3^1/$$

Тогда уравнение /3.2/ дает:

$$(\frac{1}{\bar{\tau}\tau} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}\,\partial\bar{\theta}^{\alpha i}} + m^2)\Phi = 0. \qquad /3.4/$$

Легко видеть, что в случае $\Phi(\tau,\theta) = \Phi(\bar{\tau}\gamma_\mu\theta)$ уравнение /3.4/ превращается в обычное уравнение Клейна-Гордона.

Для свободного спинорного поля $\psi(\tau,\theta)$ мы выбираем лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\bar{\tau}\tau} \bar{\psi}\gamma^\mu(\gamma_\mu\tau)_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}}\psi - M\bar{\psi}\psi . \qquad /3.5/$$

Уравнение /3.2/ дает

$$(-i\gamma^\mu \frac{(\gamma_\mu\tau)_{\alpha i}}{\bar{\tau}\tau} \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} + M)\psi = 0 \qquad /3.6/$$

и

$$\psi(i\frac{(\gamma_\mu\tau)_{\alpha i}}{\bar{\tau}\tau}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} + M) = 0 . \qquad /3.6^1/$$

В случае $\psi(\tau,\theta) = \psi(\bar{\tau}\gamma_\mu\theta)$ уравнения /3.6/ и /3.6 / превращаются в обычные уравнения Дирака.

В пространстве (τ,θ) определим действие, как интеграл от лагранжиана по τ и θ :

$$A_\Omega = \int_\Omega d^8\theta\, d^8\tau\, \mathcal{L} , \qquad /3.8/$$

где

$$d^8\theta\, d^8\tau = \prod_{\substack{\alpha=1,2,3,4,\\ i=1,2}} d\theta_{\alpha i} , \prod_{\substack{\beta=1,2,3,4,\\ j=1,2}} d\tau_{\beta j} . \qquad /3.8/$$

Из формул /2.10/ и /2.11/ видно, что инфинитезимальный "объем" $d^8\theta\, d^8\tau$ является пуанкаре-инвариантным и, следовательно, скалярность лагранжиана обеспечивает пуанкаре-инвариантность действия A.

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование спинорных координат θ , τ и полей ϕ и выразим вариации $\delta\theta_{\alpha i}$, $\delta\tau_{\alpha i}$ и $\delta\phi$ через параметры преобразования $\delta\omega_a$ по формулам:

$$\delta\theta_{ai} = \Theta^{(a)}_{ai}\,\delta\omega_a\,,\quad \delta\tau_{ai} = T^{(a)}_{ai}\,\delta\omega_a\,,$$
$$\delta\phi = F^{(a)}_{\phi}\,\delta\omega_a\,. \qquad /3.9/$$

Поступая аналогично [13], как при выводе теоремы Нётер для действия в обычном пространстве-времени x_μ, используя при этом уравнение движения /3.2/, мы приходим к следующей формуле для вариации действия:

$$\delta A = -\int_\Omega d^8\theta\, d^8\tau \left\{ \frac{\partial J^{\theta}_{ai(a)}}{\partial\theta_{ai}} + \frac{\partial J^{T}_{ai(a)}}{\partial\tau_{ai}} \right\} \delta\omega_a\,, \qquad /3.10/$$

где обозначаем

$$J^{\theta}_{ai(a)} = -\sum_\phi \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{ai}}\right)} \left(F^{(a)}_\phi - \frac{\partial\phi}{\partial\theta_{\beta j}}\Theta^{(a)}_{\beta j} - \frac{\partial\phi}{\partial\tau_{\beta j}} T^{(a)}_{\beta j}\right),$$
$$J^{T}_{ai(a)} = -\mathfrak{L} T^{(a)}_{ai} \qquad /3.11/$$

и называем эти величины "токами" Нётер в пространстве $/\tau\,,\theta/$.

Из /3.10/ следует, что если действие инвариантно относительно преобразования с параметром ω_a, т.е. если $\delta A/\delta\omega^a = 0$, то

$$\frac{\partial J^{\theta}_{ai(a)}}{\partial\theta_{ai}} + \frac{\partial J^{T}_{ai(a)}}{\partial\tau_{ai}} = 0. \qquad /3.12/$$

Можно показать, что в случае $\phi(\tau,\theta) = \phi(\bar{\tau}\gamma_\mu\theta)$ токи $J^{\theta}_{ai(a)}$ и $J^{T}_{ai(a)}$ связаны с обычным током Нётер $J_{\mu(a)}$ формулой

$$J_{\mu(a)} = \bar{\tau}\gamma_\mu J^{\theta}_{(a)} + \bar{\theta}\gamma_\mu J^{T}_{(a)}\,. \qquad /3.13/$$

Для иллюстрации приведем один простой пример: преобразование трансляции e^{-iaP}. Из формул /2.10/ и /2.10 / имеем:

$$\Theta^{(\nu)}_{ai} = \frac{1}{\bar{\tau}\tau}(\gamma^\nu\tau)_{ai}\,,\quad T^{(\nu)}_{ai} = 0,\quad F^{(\nu)}_{\phi} = 0. \qquad /3.14/$$

Подставляя /3.14/ в /3.11/, получаем:

$$J^{\theta}_{ai,\nu} = \frac{1}{\bar{\tau}\tau}\left\{ \sum_\phi \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta_{ai}}\right)} (\gamma_\nu\tau)_{\beta j} \frac{\partial\phi}{\partial\theta_{\beta j}} - \mathfrak{L}(\gamma_\nu\tau)_{ai} \right\}. \qquad /3.15/$$

В случае $\phi(\tau,\theta) = \phi(\bar{\tau}\gamma_\mu\theta)$ имеем:

$$(\bar{\tau}\gamma_\mu)^{ai} J^{\theta}_{ai,\nu} = T_{\mu\nu}\,, \qquad /3.16/$$

где $T_{\mu\nu}$ - обычный тензор энергии-импульса,

$$T_{\mu\nu} = \sum_\phi \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \mathfrak{L} g_{\mu\nu}\,.$$

§4. СПИНОРНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Ясно, что требование инвариантности лагранжиана при локальных преобразованиях в пространстве (θ,τ) приводит к предположению о существовании спинорных калибровочных полей. Для простоты рассмотрим здесь $U(1)$ - преобразования, и для определенности отождествим их с преобразованиями электрического заряда. Полученные результаты можно легко обобщить на случай произвольной неабелевой калибровочной группы.

Рассмотрим сначала заряженное скалярное поле с лагранжианом /3.3 /. Вместо производной $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{ai}}$ введем ковариантную производную

$$D_{ai} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{ai}} + ieA_{ai} \qquad /4.1/$$

так, чтобы $D_{ai}\Phi$ преобразовалось по тому же правилу, что и Φ, а именно:

$$D'_{ai}\Phi' = e^{-ie\lambda(\tau,\,\theta)}\, D_{ai}\Phi\,, \qquad /4.2/$$

где λ -параметр преобразования, зависящий от спинорных координат (τ,θ). Мы называем спинорное калибровочное поле A_{ai}, появляющееся в выражении /4.1/ для ковариантной производной, спинорным электромагнитным полем. Из /4.1/ и /4.2/ следует закон преобразования для A_{ai}:

$$A'_{ai} = A_{ai} + \frac{\partial\lambda}{\partial\bar{\theta}^{ai}}\,. \qquad /4.3/$$

Мы также налагаем на поле $A_{\alpha i}$ условие Майорана, аналогичное /2.1/, т.е.

$$\bar A^{\alpha i} = (e^{-1})^{ij}(C^{-1}\gamma_5)^{\alpha\beta} A_{\beta j}\,. \qquad /4.4/$$

Вместе с ковариантной производной $D_{\alpha i}$ мы имеем также

$$\bar D^{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} - ie\bar A^{\alpha i}\,. \qquad /4.5/$$

Очевидно, что $\bar D^{\alpha i}\Phi^+$ преобразуется по такому же закону, что и Φ^+, а именно:

$$\bar D'^{\alpha i}\Phi'^{+} = e^{ie\lambda(r,\theta)}\bar D^{\alpha i}\Phi^{+}. \qquad /4.6/$$

Вместо выражения /3.3 / для $\mathcal{L}_0(\Phi)$ мы имеем теперь следующий инвариантный лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\bar r r}\bar D^{\alpha i}\Phi^+ D_{\alpha i}\Phi - m^2\Phi^+\Phi = \mathcal{L}_0(\Phi)+\mathcal{L}_{int}(A_{\alpha i},\Phi), \qquad /4.7/$$

где

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{ie}{\bar r r}\left(\Phi^+\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}}\Phi\right)A_{\alpha i} + \frac{e^2}{\bar r r}\Phi^+\Phi\bar A^{\alpha i}A_{\alpha i}\,. \qquad /4.8/$$

Для спинорного поля мы поступаем аналогично. Вместо /3.5/ мы теперь имеем:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\bar r r}\{\bar\psi\gamma^\mu(\gamma_\mu r)_{\alpha i}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} + ie\bar A^{\alpha i}\right)\psi - \left(\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}} - ie\bar A^{\alpha i}\right)\bar\psi\gamma^\mu(\gamma_\mu r)_{\alpha i}\psi\} - M\bar\psi\psi = \mathcal{L}_0(\psi)+\mathcal{L}_{int}(A_{\alpha i},\psi), \qquad /4.9/$$

где

$$\mathcal{L}_{int}(A_{\alpha i},\psi) = -\frac{e}{\bar r r}\bar\psi\gamma^\mu(\gamma_\mu r)_{\alpha i}\psi\bar A^{\alpha i}\,. \qquad /4.10/$$

Из закона преобразования /4.3/ следует, что спиноры

$$F_{\alpha i,\beta j} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\alpha i}}A_{\beta j} - \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\beta j}}A_{\alpha i}\,,\quad \bar F^{\alpha i,\beta j} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha i}}\bar A^{\beta j} - \frac{\partial}{\partial\theta_{\beta j}}\bar A^{\alpha i} \qquad /4.11/$$

также инвариантны, и поэтому мы можем прибавить к /4.7/ и /4.9/ следующий калибровочно-инвариантный член, соответствующий свободному лагранжиану для поля $A_{\alpha i}$:

$$\mathcal{L}_0(A_{\alpha i}) = a F_{\alpha i,\beta j}\bar F^{\alpha i,\beta j}, \qquad /4.12/$$

где коэффициент a должен быть выбран исходя из соответствия между спинорным полем $A_{\alpha i}$ и обычным векторным электромагнитным полем $A_\mu(x)$ следующим образом.

Применяя формулы /3.9/ и /3.10/ к лагранжиану системы заряженного скалярного поля /4.7/, мы получаем следующее выражение для электромагнитного тока:

$$J^\theta_{\alpha i} = -\frac{1}{\bar r r}\{ie\Phi^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\alpha i}}\Phi - 2e^2\Phi^+\Phi A_{\alpha i}\},\ J^T_{\alpha i} = 0\,. \qquad /4.13/$$

В случае $\phi(r,\theta)=\phi(\bar r\gamma_\mu\theta)$ формула /3.13/ дает

$$J_\mu = -ie\Phi^+\partial_\mu\Phi + 2e^2\Phi^+\Phi\frac{\bar r\gamma_\mu A}{\bar r r}\,. \qquad /4.14/$$

Отсюда мы получаем следующую связь между спинорным электромагнитным полем $A_{\alpha i}$ и обычным векторным электромагнитным полем:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\bar r r}\bar r\gamma_\mu A(r,\theta). \qquad /4.15/$$

Используя свойство $\bar r\gamma_\mu\gamma_\nu r = g_{\mu\nu}\bar r r$, мы можем написать формулу, обратную /4.15/:

$$A_{\alpha i}(r,\theta) = (\gamma_\mu r)_{\alpha i}A^\mu(x)\,. \qquad /4.15^1/$$

Рассмотрим теперь систему спинорного поля ψ и электромагнитного поля $A_{\alpha i}$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi)+\mathcal{L}_0(A_{\alpha i})+\mathcal{L}_{int}(A_{\alpha i},\psi). \qquad /4.16/$$

Уравнение движения /3.2/ дает:

$$-4a\frac{\partial^2\bar A^{\alpha i}}{\partial\theta\,\partial\bar\theta} = \frac{e}{\bar r r}\bar\psi\gamma^\mu\psi(\bar r\gamma_\mu)^{\alpha i}\,. \qquad /4.17/$$

Умножая обе части /4.17/ на $\bar r r(\gamma_\nu r)_{\alpha i}$, учитывая /4.15/, а также свойство

$$\frac{\partial^2F(x)}{\partial\theta\,\partial\bar\theta} = \bar r r\,\Box F(x),\quad x_\mu = \bar r\gamma_\mu\theta,$$

мы видим, что в векторном пространстве x_μ это приводит к

$$-4a(\bar r r)^2\Box A_\mu(x) = e\bar\psi\gamma_\mu\phi\,, \qquad /4.18/$$

поэтому следует выбрать

$$a = -\frac{1}{4(\bar{\tau}\tau)^2}.$$

§5. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим теперь представление конформной алгебры в спинорном пространстве (τ, θ). Эта алгебра включает, кроме генераторов Пуанкаре $M_{\mu\nu}$ и P_μ, генераторы масштабного преобразования D и специально-конформного преобразования K_μ, удовлетворяющие коммутационным соотношениям [14,15].

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0, \qquad /5.1/$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu), \qquad /5.2/$$

$$[P_\mu, D] = -iP_\mu, \qquad /5.3/$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2i(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}), \qquad /5.4/$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu, \qquad /5.5/$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0. \qquad /5.6/$$

Эти соотношения могут быть удовлетворены следующими выражениями для D и K_μ:

$$D = -\frac{i}{2}\left(\theta_{ai}\frac{\partial}{\partial\theta_{ai}} + \tau_{ai}\frac{\partial}{\partial\tau_{ai}}\right), \qquad /5.7/$$

$$K_\mu = -i\bar{\tau}\tau(\gamma_\mu\theta)_{ai}\frac{\partial}{\partial\tau_{ai}} + 2i\bar{\tau}\gamma_\mu\theta\tau_{ai}\frac{\partial}{\partial\tau_{ai}}, \qquad /5.8/$$

и выражениями /2.5/ и /2.6/ для P_μ и $M_{\mu\nu}$. Выражение /5.7/ для D соответствует масштабной размерности 1/2 для θ и τ, а именно:

$$e^{i\alpha D}\theta = e^{\alpha/2}\theta, \quad e^{i\alpha D}\tau = e^{\alpha/2}\tau. \qquad /5.9/$$

Как известно [16], при изучении конформной инвариантности оказывается гораздо удобнее использовать /дискретный/ оператор координатной инверсии R, чем сам оператор специально-конформного преобразования K_μ. В спинорном пространстве (θ, τ) определим R следующим образом:

$$R\theta_{ai} = i\frac{\tau_{ai}}{\bar{\tau}\tau}, \quad R\tau_{ai} = i\frac{\theta_{ai}}{\bar{\theta}\theta}. \qquad /5.10/$$

С учетом условия /2.1/ из /5.10/ следует:

$$R\bar{\theta}^{ai} = i\frac{\bar{\tau}^{ai}}{\bar{\tau}\tau}, \quad R\bar{\tau}^{ai} = i\frac{\bar{\theta}^{ai}}{\bar{\theta}\theta}. \qquad /5.11/$$

Сравнивая /5.10/ и /5.11/, мы отмечаем, что

$$(R\theta_{ai})^* = -R\theta^{*ai}, \quad (R\tau_{ai})^* = -R\tau^{*ai}. \qquad /5.12/$$

Из определения /5.10/, /5.11/ и из выражений /2.5/,/2.6/, /5.7/, /5.8/ для генераторов P_μ, $M_{\mu\nu}$, D, K_μ путем прямой проверки можно установить, что:

$$R^2 = 1, \qquad /5.13/$$

$$RM_{\mu\nu}R = M_{\mu\nu}, \qquad /5.14/$$

$$RP_\mu R = K_\mu, \qquad /5.15/$$

$$RDR = -D. \qquad /5.16/$$

В частности, с помощью соотношений /5.13/ и /5.15/ мы можем легко найти закон специально-конформного преобразования для θ и τ из их закона трансляции /2.10/ и закона R-преобразования /5.10/. В результате имеем:

$$e^{icK}\theta = \theta, \qquad /5.17/$$

$$e^{icK}\tau = \frac{\tau + \bar{\tau}\tau\hat{c}\theta}{1 + 2\bar{\tau}\hat{c}\tau + c^2\bar{\theta}\theta\bar{\tau}\tau}. \qquad /5.18/$$

Очевидно, что уравнение /5.17/ также следует прямо из вида /5.8/ для K_μ.

Для вектора пространства-времени x_μ, выражающегося через билинейную комбинацию θ и τ, согласно формуле /2.12/ мы не можем, вообще говоря, получить из /5.10/, /5.11/, /2.10/ и /5.15/ обычную формулу преобразования

$$Rx_\mu = -\frac{x_\mu}{x^2}, \qquad /5.19/$$

$$e^{icK} x_\mu = \frac{x_\mu + c_\mu x^2}{1 + 2cx + c^2 x^2} \qquad /5.20/$$

при любых значениях θ и τ. Однако если мы ограничиваемся значениями θ и τ на многообразии, определяемом уравнением

$$(\bar{\tau}\gamma_\mu \theta)(\bar{\tau}\gamma^\mu \theta) - \bar{\theta}\theta\bar{\tau}\tau = 0, \qquad /5.21/$$

то сразу имеем /5.19/ и /5.20/. Отметим, что рассматриваемое многообразие конформно-инвариантное, а именно, уравнение /5.21/ инвариантно относительно преобразований /2.10/, /2.11/, /5.9/, /5.17/, /5.18/.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессорам В.А.Мещерякову и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smrz P. Can.J.Phys., 1968, 46, p.2073.
2. Gell-Mann M. Phys.Rev., 1962, 125, p.1067.
3. Okubo S. Prog.Theor.Phys.,1962, 27, p.949.
4. Tait W., Cornwell J.F. Lett.Nuovo Cim., 1970, 4, p.1109.
5. Araki S., Okubo S. Lett.Nuovo Cim., 1972, 3, p.511.
6. Гольфанд И.А., Лихтман Е.П. Письма ЖЭТФ, 1971,13,с.452.
7. Волков Д.В., Акулов В.П. Письма ЖЭТФ, 1972,16, с.621.
8. Wess J., Zumino B. Nucl.Phys., 1974, B70, 39.
9. Salam A., Strathdee J. Nucl.Phys., 1974, B76, p.477.
10. Nguyen thi Hong. Prog.Theor.Phys.,1976, 56, p.1647.
11. Nguyen thi Hong. Can.J.Phys., 1978, 56, p.395.
12. Nguyen thi Hong. Can.J.Phys., 1979, 57, p.298.
13. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, Наука, М., 1973.
14. Kastrup H.A. Phys.Rev., 1966, 142, p.1060.
15. Mack G., Salam A. Ann. of Phys. (N.Y.), 1969, 53, p.174.
16. Дао Вонг Дык. ЭЧАЯ, 1978, 9, с.759.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 сентября 1979 года.