объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12743

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ
V. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1979

P2 - 12743

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ
V. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Направлено в "Болгарский физический журнал".

Христов Хр., Дамянов Б.П. Р2 - 12743

Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. V. Преобразования Фурье

В первых частях этой работы [1-4] введены асимптотические функции /АФ/, общие понятия оператора и функционала над ними. Показано, что множество АФ содержит δ-функцию Дирака и ее производные, точнее,их асимптотические аналоги, и оно замкнуто по отношению к ряду операций, включая умножение. В данной части показано, что существует второй ряд АФ, таких,что преобразование Фурье осуществляет взаимнооднозначное соответствие между АФ обоих родов. При определении представителей АФ второго рода было необходимо в одном пункте использовать распределения Соболева-Шварца. Поэтому мы рассматриваем также второй вариант - после незначительных ограничений на множество представителей АФ первого рода оказалось возможным определить представителей АФ второго рода, не выходя из класса обычных функций /или т.н. уточненные обычные функции, которые здесь вводятся/.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Christov Chr.Ya., Damianov B.P. P2 - 12743

Asymptotic Functions - a New Class of Generalized Functions. V. Fourier Transform

In the former parts of this investigation [1-4] the classes of asymptotic functions (AF) as well as the concepts of operators and functionals on them have been introduced. It has been shown that the set AF contains the Dirac δ-functions and their derivatives, rather their asymptotic analogues, and that it is closed in respect to series of operations, including multiplication. Here it is shown that there is a second kind of AF, such that the Fourier transform conveys the AF of first kind in the second ones and vice versa. By introducing the representatives of the AF of second kind it has been necessary at one point to make use of the distributions of Sobolev-Schwartz. That is why we consider also a second approach - after a slight restriction of the classes of representatives of the original AF it proves possible to define the representatives of AF of second kind remaining in the field of ordinary functions, precisely - the specified ordinary functions which are also defined.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В [1,2] был предложен новый класс обобщенных функций - класс асимптотических функций /АФ/ $f(x)$. Каждая из них задается, как всегда, классом последовательностей обычных функций $f(s,x)$ - представителей $f(x)$,но, в отличие от общей практики, классы здесь не являются взаимно чужими, и поэтому их нельзя считать классами эквивалентности. В [3,4] были даны определения общего оператора и квазиклассического оператора, действующих над АФ. На базе этих определений рассмотрены основные алгебраические и аналитические операции над АФ и показана замкнутость множества АФ по ряду операций /в т.ч. умножение/. Были введены также общие и квазиклассические асимптотические функционалы, значения которых являются асимптотическими числами /АЧ/. На этой основе показано родство АФ с обычными функциями и обобщенными функциями Соболева-Шварца [5,6].

Здесь мы рассмотрим фурье-преобразование АФ. Покажем, что оно существует, но определяет другой класс АФ - АФ второго рода, довольно похожие на те, которые мы до сих пор рассматривали, и которые будем называть АФ первого рода. Примерами АФ первого и второго рода могут служить волновые пакеты в импульсном и координатном представлениях [7].

1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АФ

Фиксируем обозначения: фурье-преобразование $g(y)$ данной АФ $f(x)$,вводимое через

$$f(x) = \int g(y) e^{ixy}\, dy\,, \qquad /1/$$

или, что то же самое,

$$g(y) = \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-ixy}\, dx\,, \qquad /2/$$

задается теми же соотношениями между представителями $f(x)$ и $g(y)$:

$$f(s,x) = \int g(s,y)e^{ixy}\,dy \qquad /3/$$

или

$$g(s,y) = \frac{1}{2\pi}\int f(s,x)e^{-ixy}dx. \qquad /4/$$

/точнее см. определения 1,2 и 3 в [3] /. При этом подразумевается, что $g(y)$ должны быть АФ в том же смысле, что и $f(x)$ /см. определения 8,12 и 14 в [1] /. В этой постановке множество функций $f(x)$, имеющих фурье-преобразования, оказывается практически пустым:

Теорема 1. Абсолютная нулевая АФ $f_{00}(x)$ /см.определение 5 в [2]/ единственная, которая имеет фурье-образ. Он тоже является абсолютной нулевой АФ $g_{00}(y)$ /в пространстве АФ второго рода/.

В самом деле, сингулярная компонента $f_{\ell m}(s,(x-x_\ell)s^{-m})$ переходит в

$$g(s,y) = \frac{1}{2\pi}\int f_{\ell m}(ds,(x-x_\ell)s^{-m})e^{-ixy}dx = e^{-ix_\ell y}g_{\ell m}(s,r_m) \qquad /5/$$

$(r_m = ys^m)$,

$$g_{\ell m}(s,r) = \frac{s^m}{2\pi}\int f_{\ell m}(s,t)e^{-itr}dt. \qquad /6/$$

Функции $e^{-ix_\ell y}g_{\ell m}(s,r_m)$ при конечном $\nu_{\ell m}$ не принадлежат ни одному из классов $F_{\ell m}(s,y)$ /см. определение 3 в [2]/ - они имеют иную структуру/. При $s\to 0$ $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ суживаются в точке x_ℓ, а $e^{-ix_\ell y}g_{\ell m}(s,r_m)$ расплываются и переходят в плоские волны.

Фурье-образ

$$g_0(s,y) = \frac{1}{2\pi}\int f_0(s,x)e^{-ixy}dx \qquad /7/$$

регулярной компоненты $f_0(s,x)$, ввиду ее неограниченного роста при $x\to\pm\infty$, в общем не существует /в множестве обычных функций/.

Остается рассмотреть /5/ при $\nu_{\ell m}=\infty$. По теореме 5 в [2] $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ при любом выборе ℓ и m задает абсолютную нулевую АФ /определение 5 в [2] /. Перейдем к ее стандартным представителям $f_{00}(s,x)$. Они являются функциями типа $f_0(s,x)$ с $\nu_0=\nu_0^* = \infty$, которые вместе с производными везде непрерывны и при $x\to\pm\infty$ удовлетворяют условию быстрого исчезновения:

$$|f_{00}^i(s,x)| < \hat{o}_{00}(s)\hat{f}_{00}^i(x), \qquad (i=0,1,2,\dots), \qquad /8/$$

где $\hat{o}_{00}(s)$ ограничена при $s<s_0$ / $s_0>0$ может зависеть от $f_{00}(s,x)$ / и быстро исчезает при $s\to 0$, а $\hat{f}^i_{00}(x)$ повсюду ограничены и быстро исчезают при

$$x\to\pm\infty \qquad \left(f_{00}^i(s,x) = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}f_{00}(s,x)\right).$$

Очевидно, их фурье-образы

$$g_{00}(s,y) = \frac{1}{2\pi}\int f_{00}(s,x)e^{-ixy}dx \qquad /9/$$

удовлетворяют условиям A,B,D определения 8 в [1]. Остается доказать C. Дифференцируем /9/ k раз по y, делим на $k!$ и умножаем на y^h. В правой части интегрируем h раз по частям и находим

$$y^h g_{00}^k(s,y) = \frac{i^{-h-k}}{2\pi k!}\int \left(x^k f_{00}(s,x)\right)^{(h)} e^{ixy}dx.$$

Следовательно, с учетом /8/,

$$|y|^h|g^k_{00}(s,y)| \le \hat{o}_{00}(s)I_{hk},$$

$$I_{hk} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell} \frac{h}{\ell!(h-\ell)!(k-\ell)!}\int |x|^{k-\ell}\hat{f}^{\ell}_{00}(x)dx \qquad /10/$$

/вследствие быстрого исчезновения $\hat{f}^i_{00}(x)$ эти интегралы существуют/. Ввиду того, что /10/ имеет место при любых $h,k=0,1,2,\dots$, если выберем

$$\hat{g}^i_{00}(y) = \inf_h I_{hi}|y|^{-h},$$

то получаем, что $g_{00}(s,y)$ тоже удовлетворяет неравенству типа /8/, причем $\hat{g}^i_{00}(y)$ повсюду ограничены и быстро исчезают, когда $y\to\pm\infty$. Этим мажорирование доказано. То, что обратное фурье-преобразование переводит $g_{00}(s,y)$ в $f_{00}(s,x)$, доказывается аналогично.

Мы, конечно, хотим, чтобы круг допустимых действий над АФ был возможно более широким, так что результат, который мы получили, очень неблагоприятен. Но, с другой стороны, видно, что все сингулярные компоненты $f_{\ell m}(s,t)$ $(\ell,m\in LM)$ каждого представителя $f(s,x)$ любой АФ $f(x)$ имеют вполне определенные фурье-образы. А согласно /7/, и все представители регулярной компоненты тоже имеют фурье-образы, хотя бы в пространстве обобщенных функций $Z'(y)$ [/5/]. Отсюда ясно, что при подходящей постановке фурье-образы АФ должны существовать. Достаточно ввести второе множество АФ - $G(y)$, АФ второго рода, составленное из фурье-образов введенных уже АФ $f(x)$, которые будем называть АФ первого рода:

Определение 1. Множество $G(y)$ АФ второго рода $g(y)$ и множество $G(s,x)$ их представителей $g(s,y)$ задаются таким условием, чтобы представители $g(s,y)$ любой функции $g(y)$ из $G(y)$ были фурье-образами представителей $f(s,x)$ соответствующей функции $f(x)$ из $F(x)$.

Этим множества $G(y)$ и $G(s,y)$ /а в соответствии с определением 14 в [/1/], - и множества $\underline{G}(y)$ и $\underline{G}(s,y)$/, определены. Определено также и правило разбиения $G(s,y)$ /и $G(s,y)$ / на классы, задающие отдельные функции $g(y)$ /и $\underline{g}(y)$ /. Естественно, возникает задача - дать внутреннюю характеристику функций $g(y)$ и $g(s,y)$ типа той, которая была дана для $f(x)$ и $f(s,x)$, но не зависящую от нее, и потом доказать, что функции $f(x)$ и $f(s,x)$ из $F(x)$ и $F(s,x)$ путем фурье-преобразования переходят в функции $g(y)$, соответственно $g(s,y)$ из $G(y)$ и $G(s,y)$, и наоборот: $g(y)$ и $g(s,y)$ путем обратного фурье-преобразования переходят в $f(x)$ и $f(s,x)$.

Эту задачу мы будем решать в двух вариантах: А/ при уже заданной постановке, т.е. для множества всех функций $g(s,x)$, являющихся фурье-образами всех функций $f(s,x)$ из $F(s,x)$, причем при определении фурье-образа регулярной компоненты $f_0(s,x)$ нам, очевидно, понадобится использовать обобщенные функции Соболева-Шварца /над $Z(y)$ [/5/] /, и В/ для некоторого, по возможности, менее суженного подмножества функций $f(s,x)$, такого, что при составлении их фурье-образов можно было бы оставаться в множестве обычных функций.

Будем пользоваться разложением регулярной компоненты /22/ в [/2/]. Для удобства напишем $f_{\ell_0}(s,t)$ вместо $\underline{f}_{\ell_0}(s,t)$ и $f_0(s,x)$ вместо $\underline{f}_0(s,x)$. Тогда разложение запишется в виде:

$$f(s,x)=f_0(s,x)+\sum_{\ell,m}^{LM_0} f_{\ell m}(s,t_{\ell m}) \qquad (t_{\ell m}=(x-x_\ell)s^{-m}). \qquad /11/$$

Значит, $f_0(s,x)$ задает гладкую часть регулярной компоненты, а $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ охватывают сингулярные компоненты и разрывные части регулярной компоненты функции $f(s,x)$. Варианты А и В относятся только к составлению фурье-образа $f_0(s,x)$. Компоненты $f_{\ell m}(s,t)$, $((\ell,m\in LM_0)$ можно рассматривать как одно целое.

АФ $f(x)$ были введены как обобщение классического понятия функции, точнее, как вариант для функций Соболева-Шварца, причем их представители являлись обычными функциями от двух переменных s и x. Чтобы оправдать свое существование, АФ в некоторых случаях должны быть более удобными и полезными, чем обобщенные функции Соболева-Шварца. Об этом говорилось в [/1/], а в [/4/] мы видели, что эти функции сочетают мультипликативность с существованием тех функционалов, которые характерны для функции Дирака и ее производных. Но, конечно, АФ не претендуют на полное их замещение. Поэтому и нет противоречия, если в некотором пункте развиваемой здесь теории нам придется воспользоваться функциями Соболева-Шварца. Только с точки зрения простоты теории было бы лучше, чтобы представители $f(s,x)$ и $g(s,y)$ были обычными функциями, а если это не так, то число тех пунктов, где это условие нарушено, было бы небольшим. Так оно и есть: обобщенные функции Соболева-Шварца необходимы только при составлении гладкой части регулярной компоненты АФ второго рода $g_0(s,y)$, а, как увидим, небольшим сужением множества $F_0(s,x)$ можно не выходить за пределы теории обычных функций.

Определение 2. С учетом /6/ и /7/ и в соответствии с /11/ выберем представителей АФ второго рода в виде

$$g(s,y)=g_0(s,y)+\sum_{\ell,m}^{LM_0} g_{\ell m}(s,r_m)e^{-ix_\ell y} \qquad (r_m=ys^m). \qquad /12/$$

Дальше определение $g(s,y)$ сводится к определению $g_0(s,y)$ и $g_{\ell m}(s,r)$.

2. ФУРЬЕ-ОБРАЗЫ КОМПОНЕНТ $f_{\ell m}(s,t)$

Рассмотрим сначала фурье-образы $g_{\ell m}(s,r)$ функций $f_{\ell m}(s,t)$ $((\ell,m)\in LM_0)$ сингулярных компонент и разрывных частей регулярной компоненты функции $f(s,x)$.

Определение 3. Функции $g_{\ell m}(s,r_m)$ $((\ell,m)\in LM_0)$ характеризуются свойствами A′, B′, C′, SD′, аналогичными свойствам A, B, C, D определения 8 в [/1/].

Свойство A′ имеет такое же содержание, как и A. Степени и точности $g_{\ell m}(s,r)$ обозначим через $\nu'_{\ell m}$ и $\nu^{*\prime}_{\ell m}$ $(\nu'_{\ell m}\le\nu^{*\prime}_{\ell m}+\epsilon)$.

Свойство B′ подобно свойству B. При $s<s_0$, где $s_0\le s_1$ может зависеть от выбора $g_{\ell m}(s,r)$, функции $g_{\ell m}(s,r)$ бесконечно дифференцируемы при всех r без исключения, а при $r\to\pm\infty$ разложимы по убывающим отрицательным степеням r:

$$g_{\ell m}(s,r) = \underline{g}_{\ell m}(s,r) + g^{\times}_{\ell m}(s,r), \qquad /13/$$

$$\underline{g}_{\ell m}(s,r) = \sum_{j=0}^{\infty} g^{j}_{\ell m}(s) r^{-j-1}. \qquad /14/$$

Здесь $g^{j}_{\ell m}(s)$ имеют вид /19/ в [1]. Их степени $\nu^{j'}_{\ell m} \geq \nu'_{\ell m}$, а их точности $\nu^{j*'}_{\ell m} = \nu^{*'}_{\ell m}$. В интервале $s' < s < s_0$ при любом /положительном/ $s' < s_0$ каждая из функций $g^{j}_{\ell m}(s)$ ограничена. Ряд /14/ асимптотичен при $r \to \pm\infty$. К его членам относятся стандартные обрезающие множители типа /10/-/13/ в [2] при замене

$$t, \sigma \text{ и } r < \sigma \text{ на } 1/r, 1/\sigma \text{ и } 1/r < 1/\sigma. \qquad /15/$$

Они сохраняют асимптотику ряда при $r \to \pm\infty$, но обеспечивают его сходимость и бесконечную дифференцируемость при всех r /его сумма даже исчезает при $|r| < \rho$ /.

Условие C' требует, чтобы имело место мажорирование типа

$$|g^{\times j*}_{\ell mn}(s,r)| < \hat{o}'_{\ell mn}(s)\hat{g}^{j}_{\ell mn}(r). \qquad /16/$$

Здесь $\hat{o}'_{\ell mn} : s^n \to 0$ при $s \to 0$, а $\hat{g}^{j}_{\ell mn}(r)$ ограничены повсюду и при $r \to \pm\infty$ быстро стремятся к нулю. В духе определения 8 в [1] нижний индекс n с верхним знаком $*$ означают n-тую остаточную сумму разложения по степеням s, верхний индекс j означает j-тую производную по r, деленную на $j!$, а верхний знак $\times$ указывает на то, что все это относится не к функции $g_{\ell m}(s,r)$, а к остаточному члену бесконечной точности ее стандартного асимптотического разложения по убывающим степеням r при $r \to \pm\infty$.

Свойство D' требует, чтобы вся сумма $\sum_{\ell,m} g_{\ell m}(s, ys^m)e^{-ix_\ell y}$ убывала быстро при $y \to \pm\infty$. Это сводится к условиям

$$\sum_{m}^{M\ell_0} g^{j}_{\ell m}(s)s^{-jm} = 0 \qquad /17/$$

при всех ℓ и j.

В связи с определением 3 возникает один вопрос.

Ряд в правой стороне /14/ асимптотический. Как уже было сказано, мы всегда подразумеваем некоторый определенный - стандартный способ суммирования. Имеются общие способы, применимые к любому асимптотическому ряду, например, по Риту /построение 2 в [2], при фиксированном выборе a, σ и r / при замене /15/, так что сумма /14/ вполне определена. Од-

нако таких способов много, и нет принципиальных оснований предпочесть один другому. Если бы разложение /14/ и условие /17/, а следовательно, множества функций $G_{\ell m}(s,r)$ и все результаты, которые мы будем получать, зависели от выбранного способа суммирования, то вся теория была бы слишком искусственной. Такая же проблема стояла и тогда, когда мы вводили функции $f(s,x)$ и предполагали разложения /13/ и /14/ в [1]. В случае, когда $\nu^*_0 = \infty$ или $\nu^*_{\ell m} = \infty$ при некоторых ℓ, m, ряды были тоже асимптотическими. Чтобы обойти эту неоднозначность, мы, во-первых, сформулировали условие мажорирования не к остаточному члену, а к остаточным суммам, которые независимы от способа суммирования. Во-вторых, мы ставили условие мажорирования только при $t \neq 0$, в результате чего выпали линейные комбинации из функций $\delta^{(k)}(t)$, которые ввиду разрывов в $f_{\ell m}(s,t)$ появятся в их производных, и которые неограничены /точнее, не аппроксимируются ограниченными функциями/. Здесь нужен более тонкий подход, так как носители фурье-преобразования функций $\delta^{(k)}(t)$ не являются точечными - остаточные суммы ряда /14/ убывают медленно, и оценка остаточного члена разложения с помощью остаточных сумм была бы недостаточно точной, чтобы обратное фурье-преобразование переводило функции $g(s,y)$ в $f(s,x)$. Здесь мы введем некоторый общий и, естественно, оформленный класс допустимых способов суммирования асимптотических рядов P и поставим условие, чтобы множество функций $g_{\ell m}(s,r)$ в целом, как и его разбиение на классы, не зависели от выбора стандартного суммирования p среди допустимых P.

Так по существу вопрос сводится к нахождению класса P.

<u>Определение 4</u>. Пусть задан асимптотический ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} f^j x^j \quad (x > 0) \qquad /18/$$

с совершенно произвольными /комплексными/ коэффициентами. В качестве суммы поставим ему в соответствие функцию $\underline{f}(x)$, определенную и бесконечно дифференцируемую при $x > 0$ /и даже аналитическую, или, точнее, аналитически продолжимую на отрезке $0 < x < \xi$, где ξ - произвольно выбранное положительное число/, причем при $x \to 0$ она и ее производные равномерно стремятся к $j!f^j$, или такую, что

$$\underline{f}(x) - \sum_{j=0}^{k} f^j x^j = o^k(x) \qquad (o^k(x) : x^k \to 0). \qquad /19/$$

Эта функция $\underline{f}(x)$ представляет собой асимптотическую сумму ряда /18/ при $x \to 0$.

Она, конечно, определена с точностью до некоторой добавочной функции $f^{\times}(x)$, бесконечно дифференцируемой и быстро исчезающей вместе с ее производными при $x \to 0$. И наоборот: если $\underline{f}(x)$ - некоторая сумма ряда /18/, то $\underline{f}(x) + f^{\times}(x)$ тоже можно считать его суммой.

Построение 1. Те способы суммирования асимптотических рядов, которые мы будем считать допустимыми, состоят из двух шагов. Первый определяет сумму $\underline{f}(x)$ как аналитическую функцию от x при $x<\zeta$, где ζ - некоторое положительное число, большее ξ, а второй определит $\underline{f}(x)$ при $x \geq \xi$. При этом найденные уже значения $\underline{f}(x)$ в интервале $\xi<x<\zeta$ могут измениться.

Построение 2. Первым шагом, каждому члену $f^j x^j$ ряда /18/ поставим в соответствие обрезающий множитель $g_j(\underline{f}_j, x)$, где $\underline{f}_j$ - положительный параметр: $\underline{f}_j \geq |f^j|$. Множители $g_j(\underline{f}_j, x)$ положительные и аналитические при $x>0$. При $x \to 0$ стремятся к 1, а их производные - к 0. При $j \geq J$, где J - некоторое натуральное число, и при фиксированном $\underline{f}_j$ произведения $\underline{f}_j x^j g_j(\underline{f}_j, x)$ растут с возрастанием x. При фиксированном x они исчезают, когда $\underline{f}_j \to 0$, и растут с возрастанием $\underline{f}_j$, причем стремятся к определенным границам $g_j(x)$, таким, что при $x<\zeta$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$ сходится абсолютно и равномерно. Тогда, очевидно, при $x<\zeta$ ряд

$$\sum_j f^j x^j g_j(\underline{f}_j, x) \qquad /20/$$

тоже будет сходиться абсолютно и равномерно и будет удовлетворять условию /19/ при $k=0$. Предположим еще, что производная ряда /20/ является функцией того же самого типа, с точностью до некоторой разницы, бесконечно дифференцируемой и вместе со своими производными быстро исчезающей при $x \to 0$. То, что /20/ удовлетворяет /19/ при всех k, доказывается методом полной индукции. То, что функции $g_j(\underline{f}_j, x)$ существуют, видно из примеров, которые были даны в /1/. В самом деле, дифференцируя

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \left(1 - e^{-\frac{1}{\underline{f}_j x^{\alpha}}}\right),$$

получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} j f_j x^j \left(1 - e^{-\frac{1}{\underline{f}_j x^{\alpha}}}\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha \frac{f_j}{\underline{f}_j} x^{j-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\underline{f}_j x^{\alpha}}}.$$

Первый ряд здесь того же типа, как и исходный, а второй, очевидно, быстро исчезает при $x \to \infty$.

Этим еще сумма $\underline{f}(x)$ не найдена, так как ряд /20/ имеет смысл только при $x<\zeta$. Чтобы продлить $\underline{f}(x)$ при $x \geq \zeta$, причем новая функция была повсюду бесконечно дифференцируемой, достаточно сохранить значения /20/ при $x \leq \xi$, где $\xi<\zeta$ - некоторый новый параметр, и дать новое определение $\underline{f}(x)$ при $x>\xi$. Этот второй шаг тоже можно сделать различными способами. Мы примем

Построение 3. Допустимыми вторыми шагами задаем умножение ряда /20/ на функцию $h(x)$, бесконечно дифференцируемую при всех $x>0$, равную 1 при $x<\xi$ и равную 0 при $x \geq \eta$, где η - параметр в интервале (ξ, ζ). /Естественно, при $x \geq \zeta$ произведение будем считать равным нулю/. Примером функции $h(x)$ может служить построение 2 в /2/, если заменить там t на $r(x-\eta)/(\zeta-\eta)$.

Имеются также асимптотические ряды другой формы, суммы которых вводятся аналогично:

Определение 5. Асимптотическая сумма $g(y)$ ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} g^j y^{-j-1} \qquad (y>0), \qquad /21/$$

при $y \to \infty$ задается условием

$$g(y) - \sum_{j=0}^{k-1} g^j y^{-j-1} = o(y^{-k-1})(y \to \infty) \qquad /22/$$

типа /19/. Обрезающие множители $k_j(y)$ и $\ell(y)$ здесь имеют такой же вид, как и $g^j(x)$ и $h(x)$, при замене x, ξ, η и ζ на

$$1/y, \quad 1/\xi, \quad 1/\eta, \quad 1/\zeta. \qquad /23/$$

Аналогично рассматриваются /18/ и /21/ в случае, когда x и y пробегают все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Определение 6. Суммирование рядов

$$\sum_{j=0}^{\infty} \ln|x| f^j x^j \qquad (-\infty<x<+\infty, \quad x \to 0) \qquad /24/$$

и

$$\sum_{j=0}^{\infty} g^j \underline{y}^j \qquad (-\infty<y<+\infty, \quad y \to \pm\infty), \qquad /25/$$

как и полученных дифференцированием, вводится аналогично. К членам, содержащим отрицательные степени x, обрезающие множители не ставятся, а члены, содержащие $\delta(r)$-функцию и ее производные, не пишутся.

На базе введенных понятий можно доказать

Теорему 2. Если задан ряд /18/ и если $\underline{f}'(x)$ и $\underline{f}''(x)$- его суммы, полученные двумя допустимыми способами P' и P'' , то их разность

$$\Delta\underline{f}(x)=\underline{f}'(x)-\underline{f}''(x)$$

является функцией, которая при $x\to 0$ быстро исчезает с ее производными.

Выберем параметры $\underline{f}_{\Delta j}$ обрезающих множителей для разности $\Delta\underline{f}(x)$, так, чтобы $\underline{f}_{\Delta j}\geq\underline{f}'_j+\underline{f}''_j$. Тогда, очевидно, $\Delta\underline{f}(x)$ будет удовлетворять условию /19/ и, следовательно, будет принадлежать классу P. Но так как, с другой стороны, разность $\Delta\underline{f}(x)$ и ее производные стремятся к нулю при $x\to 0$, то этим теорема доказана.

Уточним класс допустимых способов суммирования для рядов $\underline{g}_{\ell m}(s,r)$ /14/. Мы должны сделать это так, чтобы обратное фурье-преобразование переводило $g_{\ell m}(s,r)$ в функцию типа $f_{\ell m}(s,t)$ /, удовлетворяющую /23/ в /1/ /.

Построение 4. Пусть $g_{\ell m}(s,r)\in G_{\ell m}(s,r)$, а $g^*_{\ell mn}(s,r)$ - остаточные суммы разложения $g_{\ell m}(s,r)$ по степеням s. Согласно определению 3, они тоже имеют асимптотические разложения типа /13/ и /14/. Обозначим через $\hat{o}_{\ell mn}(s)$ $(\hat{o}_{\ell mn}(s)/s^n \underset{s\to 0}{\to} 0)$ функции от s, которые по построению 1 в /2/ мажорируют $g^j_{\ell mn}(s)$. Согласно /13/ и /14/, если

$$g^*_{\ell mn}(s,r)=\tilde{g}^*_{\ell mn}(s,r)\cdot\hat{o}_{\ell mn}(s), \qquad /26/$$

то

$$\tilde{g}_{\ell mn}(s,r)=\tilde{g}^*_{\ell mn}(s,r)+\tilde{g}^{*\times}_{\ell mn}(s,r),$$

$$\underline{\tilde{g}}^*_{\ell mn}(s,r)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{g}^{*j}_{\ell mn}(s)r^{-j-1}, \qquad /27/$$

причем по построению 1 в /2/ коэффициенты $\tilde{g}^{*j}_{\ell mn}(s)$ допускают не зависящие от s мажоранты $\underline{\tilde{g}}^{*j}_{\ell mn}$. Выбираем их в качестве параметров типа $\underline{f}^j$ при составлении обрезающих множителей $k_{\ell mnj}(r)$ к членам $\tilde{g}^{*j}_{\ell mn}(s)r^{-j-1}$. С учетом /23/ ряд в /27/ уточняется как

$$\underline{\tilde{g}}^*_{\ell mn}(s,r)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{g}^{*j}_{\ell mn}(s)r^{-j-1}k_{\ell mnj}(\underline{g}^{*j}_{\ell mn}r). \qquad /28/$$

Формулы /26/ и /28/ дают первый шаг допустимых способов суммирования. Второй шаг осуществляется по общим правилам.

После того, как множества функций $F_{\ell m}(s,t)$ и $G_{\ell m}(s,r)$ определены, мы можем доказать

Теорему 3. Фурье-преобразование /прямое и обратное/ осуществляет взаимно однозначное соответствие между функциями этих двух множеств, причем

$$\nu'_{\ell m}=\nu_{\ell m}+m\ ,\quad \nu^{*\prime}_{\ell m}=\nu^*_{\ell m}+m\ ,\quad \nu^{j\,\prime}_{\ell m}=\nu^j_{\ell m}+m\ , \qquad /29/$$

$$g^j_{\ell m}(s)=\frac{(-1)^{j+1}\,j!\,s^m}{2\pi}\Delta f^j_{\ell m}(s). \qquad /30/$$

Множители $\hat{o}_{\ell mn}(s)$, при помощи которых осуществляется мажорирование остаточных членов $f^{*\times}_{\ell mn}(s,t)$ и $g^{*\times}_{\ell mn}(s,r)$, можно выбрать одинаковыми. Иными словами, если возьмем функцию $f_{\ell m}(s,t)$ с разрывами $\Delta f^j_{\ell m}(s)$ и функцию $g_{\ell m}(s,r)$ с асимптотикой при $r\to\infty$, заданной коэффициентами $g^j_{\ell m}(s)$, и если они связаны соотношениями /29/ и /30/, то фурье-образ $f_{\ell m}(s,t)$ может отличаться от $\underline{g}_{\ell m}(s,r)$ только на функцию типа $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$, и наоборот: обратное фурье-преобразование $g_{\ell m}(s,r)$ может отличаться от $\underline{f}_{\ell m}(s,t)$ только на функцию типа $f^{\times}_{\ell m}(s,t)$($f_{\ell m}(s,t)$, но без разрывов при $t=0$). Эти два класса функций $F^{\times}_{\ell m}(s,t)$ и $G^{\times}_{\ell m}(s,r)$ отличаются от $F_{00}(s,t)$ и $G_{00}(s,r)$ только тем, что степени и точности здесь конечны. Они тоже связаны фурье-преобразованием.

В самом деле, обозначим

$$g^F_{\ell m}(s,r)=\frac{s^m}{2\pi}\int f_{\ell m}(s,t)e^{-itr}dt.$$

Интегрируем k раз по частям от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$. Учитывая, что при $t=0$ функция $f_{\ell m}(s,t)$ и ее производные имеют разрывы, находим

$$g^F_{\ell m}(s,r)=\frac{s^m}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j!\,\Delta f^j_{\ell m}(s)}{(ir)^{j+1}}+\frac{s^m}{2\pi(ir)^k}\int f^{(k)}_{\ell m}(s,t)e^{-itr}\,dt. \qquad /31/$$

Если $g^{F\times k}_{\ell m}$ обозначает остаточный член в правой стороне /31/, то

$$r^n g^{F\times k}_{\ell m}(s,r)=\frac{s^m}{2\pi(ir)^k}\int r^n f^{(k)}_{\ell m}(s,t)e^{-itr}\,dt.$$

Интегрируем еще n раз по частям от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$.

Учитывая разрывы функции $f^{(k)}_{\ell m}(s,t)$ и ее производных при $t=0$, находим

$$r^n g^{F\times k}_{\ell m}(s,r) = \frac{(-i)^n s^m}{2\pi (ir)^k} \int f^{(k+n)}_{\ell m}(s,t) e^{-itr}\, dt + \frac{s^m}{2\pi (ir)^k} \sum_{j=0}^{n-1} (-i)^j r^j \Delta f^{k+n-j-1}_{\ell m}(s). \quad /32/$$

Отсюда находим

$$|r|^n |g^{F\times k}_{\ell m}(s,r)| \leq (k+n)!\, \frac{\hat{o}_{\ell m}(s)}{r^k} \int \hat{f}^{k+n}(t)\, dt + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s^m}{2\pi |r|^{k-j}} |\Delta f^{k+n-j-1}(s)|.$$

Имея в виду /23/ в [/1/] и /5/ во [/2/], при $n \leq k$ и $|r| > \rho$, где ρ - некоторое положительное число, находим

$$|r|^n |g^{F\times k}_{\ell m}(s,r)| \leq \hat{o}_{\ell m}(s) c^{kn}_{\ell m},$$

где $c^{kn}_{\ell m}$ - положительные константы. Пользуясь методом, примененным при доказательстве теоремы 1, находим, что остаточная сумма $g^{F\times k}_{\ell m}(s,r)$ допускает мажорирование типа

$$|g^{F\times k}_{\ell m}(s,r)| \leq \hat{o}_{\ell m}(s) \hat{g}^{k}_{\ell m}(r),$$

причем функция $\hat{g}^{k}_{\ell m}(r)$ повсюду ограничена и при $r \to \pm\infty$ стремится к нулю быстрее, чем $|r|^{-k}$. Оставляем k расти неограниченно. Имея в виду, что с возрастанием k можно обеспечить $\hat{g}^{k''}_{\ell m}(r) < c\, \hat{g}^{k'}_{\ell m}(r)$, где c - некоторая константа, которая может зависеть от k' и k'', а также и от ℓ, m, но не от r, получаем, что при $k \to \infty$ остаточный член $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$ удовлетворяет условию быстрого исчезновения. Здесь мы не учитывали, что ряд /14/ асимптотический. Подразумевается, что каждому члену суммы в /31/ поставлен в соответствие обрезающий множитель $\hat{o}_{\ell m}(s) k^{j}_{\ell m}(\tilde{g}_{\ell m}, r)\, \ell_{\ell m}(r)$. Этим он изменится на функцию типа $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$, что несущественно. Аналогично рассматривается мажорирование производных $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$ по r: заменяем в /31/ $f_{\ell m}(s,t)$ на $(-i)^h f_{\ell m}(s,t)$ и $g^{F}_{\ell m}(s,r)$ на $g^{F(h)}_{\ell m}(s,r)$. Функции $g^{F(h)}_{\ell m}(s,r)$ имеют такой же вид, как и $g_{\ell m}(s,r)$, только ряд типа /14/ будет начинаться со степени r^{-h-1}. Это понятно, потому что производная $g^{(h)}_{\ell m}(s,r)$ соответствует произведению $(-it)^h f_{\ell m}(s,t)$, а производные функции такого типа могут иметь разрывы, только если их порядок более высок, чем h. Переход от функции $g_{\ell m}(s,r)$ /и ее производных/ к остаточным суммам $g^{*}_{\ell mn}(s,r)$ /и их производным/, что, собственно, в силу /16/ нам и нужно, не создает затруднений: достаточно в /31/ формально заменить $f_{\ell m}(s,t)$ и $g_{\ell m}(s,r)$ на $f^{*}_{\ell mn}(s,t)$ и $g^{*}_{\ell mn'}(s,r)$ $(n' = n+m)$. Вычитанием $y_{\ell m}(s,r)$ и $g^{F}_{\ell m}(s,r)$

с учетом /13/ и /14/, получаем, что $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$ удовлетворяет условию быстрого исчезновения. Этим первая часть теоремы 3 доказана.

Докажем вторую часть. Из /6/, /13/ и /14/ находим

$$f^{F}_{\ell m}(s,t) = s^{-m} \int g_{\ell m}(s,r) e^{irt}\, dr = s^{-m} g^{\circ}_{\ell m}(s) \int \frac{1}{ir} e^{irt}\, dr + f^{\times\circ}_{\ell m}(s,t).$$

/по общим правилам, $g^{\times j}_{\ell m}(s,r)$, j -тая остаточная сумма разложения $g_{\ell m}(s,r)$ по убывающим степеням r /. Подстановка $rt=q$ дает

$$f^{F}_{\ell m}(s,t) = \pm s^{-m} g^{\circ}_{\ell m}(s) \int \frac{1}{iq} e^{-iq}\, dq + f^{\times\circ}_{\ell m}(s,t).$$

При этом знак + или -, смотря по тому, $t > 0$ или $t < 0$. При $t \to \pm 0$ находим

$$f^{F}_{\ell m}(s,+0) = i\pi s^{-m} g^{\circ}_{\ell m}(s),$$

$$f^{F}_{\ell m}(s,-0) = -i\pi s^{-m} g^{\circ}_{\ell m}(s)$$

и, следовательно,

$$\Delta f^{\circ}_{\ell m}(s) = f^{F}_{\ell m}(s,+0) - f^{F}_{\ell m}(s,-0) = 2\pi i s^{-m} g^{\circ}_{\ell m}(s).$$

После того, как разрыв $\Delta f^{\circ}_{\ell m}(s)$ найден, составляем непрерывную при $t=0$ функцию

$$f^{F}_{\ell m1}(s,t) = f^{F}_{\ell m}(s,t) - \frac{1}{2}\Delta f^{\circ}_{\ell m}(s) t^{\circ} = s^{-m} g^{1}_{\ell m}(s) \int \frac{1}{(ir)^2} e^{irt}\, dr + f^{\times 1}_{\ell m}(s,t).$$

/Последнее равенство написано с учетом /14//. Дифференцируем по t и находим

$$f^{F'}_{\ell m 1}(s,t) = s^{-m} g^{1}_{\ell m}(s) \int \frac{1}{ir} e^{irt}\, dr + f^{\times 1}_{\ell m}(s,t).$$

Та же самая подстановка $rt = q$ приводит к

$$\Delta f^{1}_{\ell m}(s) = f^{F'}_{\ell m 1}(s,+0) - f^{F'}_{\ell m 1}(s,-0) = -2\pi s^{-m} g^{1}_{\ell m}(s).$$

Составляем непрерывную вместе с ее первой производной функцию

$$f_{\ell m 2}(s,t) = f_{\ell m}(s,t) - \frac{1}{2}\Delta f^{\circ}_{\ell m}(s) t^{\circ} - \frac{1}{2}\Delta f'_{\ell m}(s) t^{1} =$$

$$= s^{-m} g^{2}_{\ell m}(s) \int \frac{1}{(ir)^3} e^{irt}\, dr + \dot{f}^{\times 2}_{\ell m}(s,t).$$

Дифференцируем два раза по t и тем же способом находим

$$\Delta f^{2}_{\ell m}(s) = -i2\pi s^{-m} g^{2}_{\ell m}(s).$$

В общем опять находим /29/ и /30/.

Вывод остальных свойств $f_{\ell m}(s,t)$ не составляет трудности. Остановимся только на вопросе мажорирования. Пусть $g_{\ell m}(s,r) \in G_{\ell m}(s,r)$ и пусть

$$f^{F}_{\ell m}(s,t) = s^{-m} \int g_{\ell m}(s,r) e^{irt} dt. \qquad /33/$$

При $t \neq 0$ получаем

$$(-it)^{h} f^{F(k)}(s,t) = s^{-m} \int [(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]^{(h)}_{\times} e^{irt} dt. \qquad /34/$$

При этом, в силу /13/ и /14/, произведение $(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)$ имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} i^{k} g^{j}_{\ell m}(s) r^{k-j-1} + (ir)^{k} g^{\times}_{\ell m}(s,r).$$

В этой сумме участвуют k членов с неотрицательными степенями r. Их фурье-образ задается линейной комбинацией функций $\delta^{j}(t)$, $j=0,1,\dots,k-1$ /которые появляются вследствие разрывов у $f^{F}_{\ell m}(s,t)$ и ее производных/. Их следует отбросить, потому что условие /23/ в [1] не затрагивает значения функции $f_{\ell m}(s,t)$ при $t=0$. Эта простая операция, которую мы обозначили индексом $\times$ к скобке в /34/, соответствует операции перехода от $g_{\ell m}(s,r)$ к $g^{\times j}_{\ell m}(s,r)$ и $g^{\times}_{\ell m}(s,r)$ в первой части доказательства данной теоремы. Если $k>0$ или $h>0$, из /34/ сразу получаем

$$|t|^{h} |f^{Fk}(s,t)| \leq \left| \sum_{j=0}^{h} \frac{i^{k} h!\, k!}{j!(h-j)!(k-j)!} \int r^{k-j} g^{h-j}_{\ell m}(s,r) e^{irt} dt \right| \qquad /35/$$

$$\leq \hat{o}_{\ell m}(s) c^{hk}_{\ell m},$$

$$c^{hk}_{\ell m} = \sum_{j=0}^{h} \frac{h!\,k!}{j!(k-j)!} \int |r|^{k-j} \hat{g}^{h-j}_{\ell m \times}(r) dr.$$

При этом и здесь знак $\times$ напоминает, что $|r|^{k-j} g^{h-j}_{\ell m \times}(r)$ мажорирует функцию $r^{k-j} g^{h-j}_{\ell m \times}(s,r)$ после того, как у $g_{\ell m}$ отброшены члены со степенями r выше или равными $-k$, так что

интегралы сходятся. Соотношение типа /35/ выводится и при $h=0$, хотя и для $c^{0k}_{\ell m}$ получаем выражения, отличные от вышеприведенного. В этом случае под интегралом будет функция $[(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{\times}$, которая при $r \to \pm\infty$ исчезает как r^{-1}, и $\hat{g}_{\ell m}(r)$ не является интегрируемой. Выделим член, содержащий r^{-1}:

$$[(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{\times} = [(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{0} + [(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{1},$$

где

$$[(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{0} = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < \rho, \\ i^{k} g^{k}_{\ell m}(s) \frac{1}{r} & \text{при } |r| \geq \rho, \end{cases}$$

причем ρ - некоторое положительное число, а функция $[(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{1}$ исчезает как r^{-2}. В соответствии с этим

$$|f^{Fk}_{\ell m}(s,t)| \leq \hat{o}_{\ell m}(s)(\hat{f}^{k}_{\ell m 0}(t) + \hat{f}^{k}_{\ell m 1}(t)), \qquad \hat{f}^{k}_{\ell m 1}(t) \leq \int |r|^{k} \hat{g}_{\ell m 1}(r) dr,$$

причем интеграл сходится. С другой стороны,

$$\hat{o}_{\ell m}(s) |\hat{f}^{k}_{\ell m 0}(t)| = \left| \int [(ir)^{k} g_{\ell m}(s,r)]_{0} e^{irt} dr \right| =$$

$$= |g^{k}_{\ell m}(s)| \cdot \left| \int_{-\infty}^{\rho} \frac{1}{r} e^{irt} dr + \int_{\rho}^{+\infty} \frac{1}{r} e^{irt} dr \right| =$$

$$= 2 |g^{k}_{\ell m}(s)| \cdot \left| \int_{\rho}^{+\infty} \frac{1}{r} \sin rt\, dr \right|.$$

Интеграл, фигурирующий здесь, очевидно, мажорируем /мы даже можем выбрать ρ так, чтобы он просто исчезал/.

При наличии /35/ мажорирование $f^{Fk}_{\ell m}(s,t)$ проводится способом, примененным при доказательстве теоремы 1. Аналогично мажорируются и остаточные суммы $f^{*}_{\ell mn}(s,t)$ и их производные $f^{*(k)}_{\ell mn}(s,t)$. Вычитанием $f^{F}_{\ell m}(s,t)$ от $f_{\ell m}(s,t)$ находим, что $f^{\times}_{\ell m}(s,t)$ удовлетворяет условию быстрого исчезновения.

3. ФУРЬЕ-ОБРАЗ ГЛАДКОЙ ЧАСТИ РЕГУЛЯРНОЙ КОМПОНЕНТЫ

Остается рассмотреть функцию $g_{0}(s,y)$ - фурье-образ от гладкой части $f_{0}(s,x)$ регулярной компоненты функции $f(s,x)$ /11/.

Напомним свойства функций $f_{0}(s,x)$:

1. Обычные функции определены при всех вещественных x и $s<s_{1}$.

2. Имеют разложения по степеням s от ν_0 до ν_0^* $(\nu_0 \leq \nu_0^* + \epsilon)$.

3. При всех x и при $s < s_0$, где $s_0 < s_1$ может зависеть от выбора $f_0(s,x)$, бесконечно дифференцируемы по x.

4. Остаточные суммы $f^*_{on}(s,x)$ разложения $f_0(s,x)$ по степеням s допускают мажорирование

$$|f^{*\,i}_{on}(s,x)| \leqq \hat{o}_n(s) \hat{f}^{\,i}_{on}(x), \qquad /36/$$

где $\hat{o}_n(s) : s^n \xrightarrow[s \to 0]{} 0$, а $\hat{f}^{\,i}_{on}(x)$ ограничены в любом конечном интервале на оси x. /При $x \to \pm\infty$ они могут расти сколь угодно быстро/. Из-за быстрого роста функции $f_0(s,x)$ при $x \to \pm\infty$, ее фурье-преобразование $g_0(s,x)$ /7/ явно не может быть обычной функцией. Но, как известно /5,6,8/, при каждом $s < s_0$ оно существует в множестве обобщенных функций $Z'(y)$ - аналитических функционалов над функциями класса $Z(y)$. Функция $g_0(s,x)$ /7/ при $s < s_0$ определена как аналитический функционал на всей плоскости y - когда интегрирование идет не только вдоль вещественной оси y, но и на любой кривой L /это, конечно, не означает, что в случаях, когда функционал

$$J(s) = \int g_0(s,y) \psi(y) dy \qquad /37/$$

регулярен, т.е. когда $g_0(s,y)$ при фиксированном s является обычной функцией, она должна быть аналитической на всей плоскости y /.

Так как $f_0(s,x)$ при каждом s является мультипликатором над $D(x)$, то $g_0(s,y)$ будет свертывателем над $Z(y)$. Это свойство характеризует $g_0(s,y)$ при каждом заданном s, но оно не дает возможности сформулировать условие мажорирования. Поэтому мы поищем иную характеристику для функций $g_0(s,y)$, затрагивающую более непосредственно ее структуру.

Определение 7. Пусть $D(x,a)$ - множество функций $\phi(x)$ из $D(x)$, таких, что $\phi(x) = 0$ при $|x| \geq a$ $(a > 0)$, а $Z(y,a)$ - множество их фурье-преобразований $\psi(y)$ /5,6/. Множество $G_0(s,y)$ составлено из обобщенных функций $g_0(s,y)$, которые при каждом $s < s_0$ принадлежат пространству $Z'(y)$, т.е. при любом $a > 0$ они являются аналитическими функционалами над функциями $\psi(y)$ из $Z(y,a)$, разложимыми по степеням s при $\nu_0 \leqq n \leqq \nu_0^*$ $(\nu_0 \leq \nu_0^* + \epsilon)$, причем остаточные суммы этого разложения удовлетворяют неравенствам

$$\left|\int y^k g^*_{on}(s,y) \psi(y) dy\right| \leq \hat{o}_{on}(s) \hat{g}^{\,k}_{on}(a) \|\psi\| \quad (k = 0,1,2,\ldots). \qquad /38/$$

При этом $\|\psi\|$ - норма $\psi(y)$ в $L_2(y)$, $\hat{o}_{on}(s) : s^n \to O$ $(s \to 0)$, а $\hat{g}^{\,k}_{on}(a)$ - функции, которые определены при $a > 0$ и ограничены в любом конечном интервале. Они могут расти сколь угодно быстро с возрастанием a и k.

Теорема 4. Фурье-преобразование переводит каждую функцию $f_0(s,x)$ из $F_0(s,x)$ в функцию $g_0(s,y)$ из $G_0(s,y)$ /которая удовлетворяет определению 7/, и каждая функция $g_0(s,y)$ из $G_0(s,y)$ путем /обратного/ фурье-преобразования переходит в функцию $f_0(s,x)$ из $F_0(s,x)$. При этом ν_0, ν_0^*, s_0 и $\hat{o}_{on}(s)$ у $f_0(s,x)$ и $g_0(s,y)$ одинаковы, а $\hat{g}^{\,k}_{on}(a)$ и $\hat{f}^{\,k}_{on}(x)$ связаны неравенствами

$$\hat{g}^{\,k}_{on}(a) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \hat{f}^{\,k}_{on}(x) dx, \quad \hat{f}^{\,k}_{on}(x) \leqq 2\pi \left| \frac{d}{da} \hat{g}^{\,k}_{on}(a) \right|_{a=x}. \qquad /39/$$

В самом деле, пусть $f_0(s,x)$ - некоторая функция из $F_0(s,x)$, а $g_0(s,y)$ - ее фурье-образ. Очевидно, $g_0(s,y)$ существует как последовательность обобщенных функций из $Z'(y)$, элементы которой характеризуются параметром s. Ввиду равенства Парсеваля, из /7/ находим

$$I(s) = \frac{2\pi}{k!} \int (iy)^k g^*_{on}(s,y) \psi(y) dy = \int f^{*\,k}_{on}(s,x) \phi(x) dx \qquad /40/$$

и, следовательно, ввиду /36/,

$$|I(s)| \leqq \hat{o}_{on}(s) \int \hat{f}^{\,k}_{on}(x) |\phi(x)| dx \leqq \hat{o}_{on}(s) \hat{g}^{\,k}_{on}(a) \|\psi\|,$$

где $\hat{g}^{\,k}_{on}(a)$ задается через /39/. Этим первая часть теоремы доказана.

Примем теперь, что $g_0(s,y)$ - заданная функция из $G_0(s,y)$. Вводим функцию $f_0(s,x)$ и тем самым ее остаточные суммы и их производные $f^{*(k)}_{on}(s,x)$ через /40/. Очевидно, они существуют хотя бы как последовательности обобщенных функций класса $D'(x)$, характеризуемых параметром s /мы еще не можем утверждать, что они являются обычными функциями, потому что о функциях класса $G_0(s,y)$ известно, что они удовлетворяют /38/, но пока не известно, являются ли они свертывателями над $Z(y)$. Обозначаем

$$J(s) = \int f^{*(k)}_{on}(s,x) \phi(x) dx = 2\pi \int (-iy)^k g^*_{on}(s,y) \psi(y) dy \quad (\phi(x) \in D(a)).$$

Ввиду /38/, находим

$$|J(s)| \leqq \int_{-a}^{a} |f^{*(k)}(s,x)| dx \,.\, \|\phi\| = 2\pi \hat{o}_{on}(s) \hat{g}^{\,k}_{on}(a) \|\phi\|. \qquad /41/$$

функции $\phi(x)\in D(a)$ являются плотным подмножеством в $L_2(a)$ $(-a\leq x\leq a)$ по топологии в этом же пространстве. Отсюда по теореме Хана-Банаха [9] следует, что найденная оценка будет справедливой, если выбирать в качестве $\phi(x)$ любую функцию из $L_2(a)$. Но тогда по теореме Рисса $f^{*k}_{on}(s,x)$ как функции от x при каждом выборе n, k и s сводятся к обычным функциям из $L_2(\hat{a})$, которые в интервале $-a\leq x\leq a$ мажорируются функциями $\hat{o}_{on}(s)\hat{g}^{k}_{on}(a)$ /41/. Но отсюда, как известно[5], следует, что $f^{*}_{on}(s,x)$ дифференцируемы и в обычном смысле в интервале $(-a\leq x\leq a)$, и их производные задаются через /40/. А так как все сказанное имеет место при любом a, из /41/ следует, что $f^{*}_{on}(s,x)$ определены, бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют условию мажорирования /39/ при любом x. Этим и вторая часть теоремы доказана.

<u>Примечание.</u> Так как обратный фурье-образ каждой функции из класса $G_0(s,y)$ является обычной функцией класса C^{∞}, т.е. является мультипликатором над D, то следует, как было упомянуто, что функции $g_0(s,y)$, задаваемые условием /38/, будут свертывателями над $Z(y)$.

Формулировка теоремы 4 и ее доказательство были уточнены при помощи В.С.Владимирова и И.К.Гордиева.

4. ФУРЬЕ-ОБРАЗ ГЛАДКОЙ ЧАСТИ РЕГУЛЯРНОЙ КОМПОНЕНТЫ В МНОЖЕСТВЕ ОБЫЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Перейдем к варианту В: Сузим множество гладких частей регулярных компонент $f_0(s,x)$ так, чтобы при составлении их фурье-образов $g_0(s,y)$ нам не приходилось выходить за пределы теории обычных функций. Эта задача, естественно, может иметь различные решения. Мы дадим одно, на наш взгляд, довольно общее и естественное формированное

<u>Определение 8.</u> Обозначим через $F_0(s,x)$ множество всех функций $f_0(s,x)$, имеющих все свойства функций $\underline{f}_0(s,x)$, указанных в варианте А, за исключением мажорирования. В замене предположим, что функция $f_0(s,x)$ при $s<s_0$, где s_0 может зависеть от выбора $f_0(s,x)$, представима в виде

$$f_0(s,x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_0^j(s)x^{-j}+\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \underline{f}_0^j(s)\underline{x}^{-j}+f_0^{\times}(s,x). \qquad /42/$$

Как уже было сказано, $\underline{x}^j=x^j\operatorname{sgn}x=\begin{cases} x^j & \text{при } x>0, \\ -x^j & \text{при } x<0\end{cases}$. Наличие двух сумм в /42/ означает, что разложение $f_0(s,x)$ по степеням x при $x>0$ и $x<0$ может иметь различные коэффициенты: $f_0^j(s)+\frac{1}{2}\underline{f}_0^j(s)$ и $f(s)-\frac{1}{2}\underline{f}(s)$. Коэффициенты $f_0^j(s)$ и $\underline{f}_0^j(s)$ являются функциями типа /1/ в [1], т.е. представителями асимптотических чисел, степени которых ν_0^j и $\underline{\nu}_0^j$ ограничены снизу: $\nu_0^j, \underline{\nu}_0^j\geq\nu_0$. Когда $j\to-\infty$, $f_0^j(s)$ и $\underline{f}_0^j(s)$ при любом $s<s_0$ стремятся к нулю так быстро, что

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{i!\,|f_0^{-i}(s)|}=\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{i!\,|\underline{f}_0^{-i}(s)|}=0 \qquad (i=-j). \qquad /43/$$

Никакие другие условия на $f_0^j(s)$ и $\underline{f}^j(s)$ не ставятся. Это значит, что вверх /при $j\to+\infty$/ ряды могут расходиться сколь угодно быстро, они асимптотические, и их суммы следует найти по построению 4. При этом особенности, которые члены с $j>0$ имеют в точке $x=0$, а также и разрывы знакопеременных степеней при $j\leq 0$, исчезнут. Остаточный член $f_0^{\times}(s,x)$ разложения /42/ по степеням x является функцией типа $f_0(s,x)$ степени ν_0 и точности $\nu_0^*(\nu_0\leq\nu_0^*+\epsilon)$, которая удовлетворяет условию быстрого исчезновения:

$$|f^{\times * j}_{on}(s,x)|\leq\hat{o}_{on}(s)\hat{f}^{j}_{on}(x),$$

причем $\hat{o}_n(s):s^n\to 0$, а $\hat{f}^j_{on}(x)$ повсюду ограничены и быстро исчезают при $x\to\pm\infty$. Разложение /42/ даже при фиксированном выборе способа суммирования асимптотических рядов неоднозначно: имеются функции такие, напр., как e^{-x^2}, которые разложимы по степеням x и в то же время быстро исчезают при $x\to\pm\infty$, а имеются и функции, такие, как $e^{-e^{x^2}}$ или фурье-образ от e^{-ay^2-b/y^2} $(a,b>0)$, которые при этом удовлетворяют условию /43/. Так приходим к

<u>Теореме 5</u>. Существует непустой модуль $\tilde{F}_0(s,x)$ функции $\tilde{f}_0(s,x)$ типа /42/ такой, что, добавляя функцию $\tilde{f}_0(s,x)$ из $\tilde{F}_0(s,x)$ к $f_0^{\times}(s,x)$ и вычитая ее разложение по степеням x из сумм в /42/, получим иное разложение той же самой функции $f_0(s,x)$, и каждое разложение данной функции $f_0(s,x)$ можно получить этим способом из любого другого эквивалентного ее разложения.

Нашей целью будет доказать, что фурье-образы функций типа /42/, т.е. представителей данного суженного класса АФ, задаются обычными функциями или уточненными обычными функциями, теория которых немного выходит за пределы обычного классического анализа, но которые дают возможность намного расширить класс АФ, фурье-образы которых являются обычными функциями /в указанном смысле/. Теория уточненных обычных функций дана в Дополнении к этой работе.

Определение 8. Обозначим через $G_0(s,y)$ множество двухкомпонентных уточненных обычных функций - с одной особой точкой $y_0=0$, у которых коэффициенты - АЧ, а остаточный член - АФ, все с одной и той же точностью и с ограниченными снизу степенями:

$$g_0(s,y)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{oj}(s)\left(\frac{1}{y}\right)^{(-j)}+\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \underline{g}_{oj}(s)\left(\frac{1}{y}\right)^{(-j)}+g_0^{\times}(s,y),$$

$$(\nu_j,\ \nu_{j-}\geq \nu^{\times};\quad \nu_j^{*},\nu_{j-}=\nu^{\times *}). \qquad /44/$$

Первый ряд здесь уточнен в смысле /Д.27/, а второй - в смысле - /Д.28/. Существует число $s_0>0$, такое, что $g_{oj}(s)$ и $\underline{g}_{oj}(s)$ ограничены при любом s в интервале $s'<s<s_0$. Суммирование асимптотических рядов в /44/ производится по построению 4 так, что функция $g_0^{\times}(s,y)$ бесконечно дифференцируема по y, причем остаточные суммы ее разложения по степеням s и их производные по y удовлетворяют условию быстрого исчезновения при $y\to 0$.

Теорема 6. Разложение /44/ неоднозначно. Существует некоторый модуль $\tilde{G}_0(s,y)$ функции $\tilde{g}_0(s,y)$ типа $g_0^{\times}(s,y)$, такой, что добавляя ее к $g_0^{\times}(s,y)$ и вычитая ее разложение из сумм в /44/, мы получаем иное разложение той же функции и этим способом можем получить весь класс разложений данной функции $g_0(s,y)$.

Примером функции $\tilde{g}_0(s,y)$ может служить e^{-ay^2-b/y^2}.

После того, как классы $F_0(s,x)$ и $G_0(s,y)$ в варианте В указаны, мы можем сформулировать

Теорему 7. Функции $f_0(s,x)$ из класса $F_0(s,x)$ имеют фурье-образы в множестве $G_0(s,y)$, а функции $g_0(s,y)$ из $G_0(s,y)$ имеют обратные фурье-образы в множестве $F_0(s,x)$. Учитывая неоднозначность разложений /42/ и /44/, мы можем потребовать еще, чтобы парциальным суммам рядов в /42/ при $j\geq J$, где J - некоторое целое /убывающее/число, соответствовали парциальные суммы при том же J в /44/ и наоборот. Тогда точности и степени, а также коэффициенты членов в /42/ будут совпадать с точностями, степенями и коэффициентами соответствующих членов в /44/. Этим обеспечено то, что разности рядов в /44/ и фурье-образы рядов в /42/ являются быстро исчезающими при $y\to 0$ функциями типа $g_0^{\times}(s,y)$, а разности рядов в /42/ и фурье-образы рядов в /44/ являются быстро исчезающими при $x\to\pm\infty$ функциями типа $f_0^{\times}(s,x)$. Остаточные члены $f_0^{\times}(s,x)$ и $g_0^{\times}(x,y)$ также взаимно однозначно связаны, но эта связь имеет более сложный вид, так как она зависит от

выбранного способа суммирования асимптотических рядов в /42/ и /44/. Ряды в /44/ при каждом $s<s_0$ задают уточненные обычные функции, т.е. обычные но неинтегрируемые, и поэтому их фурье-преобразования задаются как в теории обобщенных функций:

$$\iint g_0(s,y)e^{ixy}\phi(x)\,dx\,dy=\int f_0(s,x)\phi(x)\,dx,\qquad (\phi(x)\in D(x)),$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint f_0(s,x)e^{-ixy}\psi(y)\,dx\,dy=\int g_0(s,y)\psi(y)\,dy,\qquad (\psi(y)\in Z(y)). \qquad /45/$$

Представим /42/ в виде

$$f_0(s,x)=f_-(s,x)+\underline{f}_-(s,x)+f_+(s,x)+\underline{f}_+(s,x)+f_0^{\times}(s,x), \qquad /46/$$

$$f_-(s,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{-j}(s)x^{j},\qquad \underline{f}_-(s,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{-j}(s)\underline{x}^{j}. \qquad /47/$$

$$f_+(s,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+1}(s)x^{-j-1},\quad \underline{f}_+(s,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+1}(s)\underline{x}^{-j-1}. \qquad /48/$$

С учетом /Д.29/ можем также написать /44/ в виде

$$g_0(s,y)=g_-(s,y)+\underline{g}_-(s,y)+g_+(s,y)+\underline{g}_+(s,y)+g_0^{\times}(s,y). \qquad /49/$$

$$g_-(s,y)=\sum_{j=0}^{\infty} g_{-j}(s)\delta^{j}(y),\quad \underline{g}_-(s,y)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}j!\,\underline{g}_{-j}(s)y^{-j-1}. \qquad /50/$$

$$g_+(s,y)=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1}y^{j},\quad \underline{g}_+(s,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\underline{g}_{j+1}(s)y^{j}(\ln|y|-c_j), \qquad /51/$$

$$(c_j=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}).$$

Подразумеваем, что ряды /47/ и /50/ асимптотические при $x\to\pm\infty$, соответственно при $y\to 0$, их члены снабжены обрезающими множителями $g_j(s,x)$ и $h(x)$, соответственно $k_j(s,y)$ и $\ell(y)$, сохраняющими поведение рядов $f_-(s,x)$ и $\underline{f}_-(s,x)$ при $x\to\pm\infty$ и рядов $g_-(s,y)$ и $\underline{g}_-(s,y)$ при $y\to 0$.

Далее мы покажем, что с точностью до членов, быстро исчезающих при $x\to\pm\infty$, фурье-преобразование переводит каждый из пяти членов разложения /46/ в соответствующий член в /49/ и наоборот. Следовательно, нам предстоит доказать 5 теорем, из двух частей каждая, о том, что функции типа f переходят в g и функции g - в f.

Все эти теоремы являются теоремами типа теорем 4 и 1 и поэтому не будем их подробно доказывать. Отметим только некоторые моменты.

Функции $f_-(s,x)$ /47/ разложимы в ряд по степеням x, абсолютно сходящийся при всех x. Согласно[5], фурье-образом

x^{-j} $(j=0,-1,2,\ldots)$ является обобщенная функция $\frac{1}{2\pi i}\delta^{(-j)}(y)$. Но в пространстве $Z'(y)$ она задается обычной функцией $\frac{(-1)^j(-j)!}{y-j+1}=(\frac{1}{y})^{-j}$, уточненной способом /Д.28/, так что, подставляя в /7/, находим первое выражение /50/.

Функции $\underline{f}_-(s,x)$ тоже разложимы по степеням x, хотя коэффициенты разложения при $x>0$ и $x<0$ отличаются по знаку, т.е. они разложимы по $\underline{x}^j$. Согласно [5], фурье-образ $\underline{x}^j$ задается через производную $(\frac{1}{y})^{(-j)}$, уточненную согласно /Д,29/. Подставляя в /7/, находим второе соотношение /50/.

Абсолютная и равномерная сходимость рядов /50/, очевидно, обеспечена условием /43/, так что они задают обычные функции. Обрезающие множители типа $\ell(y)$ нужны только, чтобы обеспечить быстрое исчезновение при $y\to\pm\infty$. Мажорирование следует из сходимости. Поэтому переход из /50/ в /47/ осуществляется аналогично.

С функциями типа $f_+(s,x)$ и $g_+(s,y)$ мы уже встречались. Они имеют точно такие же характеристики, что и $g_{\ell m}(s,r)$ /определение 3/ и $f_{\ell m}(s,t)$ /определение 8 в [1]/, при формальной замене $g_{\ell m}$ и r на f_+ и x, и, соответственно, $f_{\ell m}$ и t на g_+ и y. Все вопросы о связи коэффициентов в первых равенствах /48/ и /51/ были рассмотрены в теореме 3.

Что касается функций типа $\underline{f}_+(s,x)$ и $\underline{g}_+(s,y)$, то они рассматриваются как в предыдущем случае. Связь между коэффициентами задается формулами на стр. 449 и 450 в [5].

Наконец, функции $f_0^\times(s,x)$ и $g_0^\times(s,y)$ имеют такие же свойства, что и $f_{\ell m}^\times(s,t)$ и $g_{\ell m}^\times(s,r)$, при формальной замене t, r и ℓm на x, y и 0. Классы $F_0^\times(s,x)$ и $G_0^\times(s,y)$ связаны фурье-преобразованием, однако $f_0^\times(s,x)$ и $g_0^\times(s,y)$ в /42/ и /44/ не являются фурье-образами друг друга, потому что способы суммирования асимптотических рядов /48/ и /51/, которые мы сочли допустимыми, таковы, что фурье-образ функции /48/ отличается от /51/ функцией типа $g_0^\times(s,y)$, а обратный фурье-образ функции /48/ отличается от /51/ функцией типа $f_0^\times(s,x)$. Поэтому, если $f_0(s,x)$ и $g_0(s,y)$ связаны фурье-преобразованием, то, очевидно, будет взаимно-однозначное соответствие между $f_0^\times(s,x)$ и $g_0^\times(s,y)$, но они, в общем, не будут фурье-образами друг друга. Чтобы доказать мажорирование, достаточно вычесть фурье-образ /46/ из /49/ или обратный фурье-образ /49/ из /46/ и учесть, что все остальные разности, которые получатся, будут функциями типа $g_0^\times(s,y)$, соответственно $f_0^\times(s,x)$.

Этим вопрос о фурье-преобразовании в варианте В решен. В смысле определений, которые были даны, фурье-преобразование функции $f_0(s,x)$ /42/, а следовательно, и всей функции $f(s,x)$ /11/ при этом выборе $f_0(s,x)$ задается уточненными обычными функциями /44/. Повторим еще раз, что эти функции были названы обычными в том смысле, что они задаются своими значениями, которые соответствуют значениям аргумента y $(y\neq 0)$. Но они, как и их прообразы /42/, неинтегрируемы, и поэтому прямое и обратное фурье-преобразования, которыми они связаны, задаются не обычными правилами фурье-преобразования, а при помощи выражений /45/, характерных для теории обобщенных функций. В данной, довольно естественной теории оказалось, что выражения типа /Д4/ можно уточнить различными способами, и поэтому функции /44/ оказались двузначными /или точнее - двухкомпонентными/ уточненными обычными функциями.

Отметим, что у $g_0(s,y)$ только одна особая точка - при $y=0$. Это связано с выбором представления /42/, задающего асимптотику $f_0(s,x)$ при $x\to\pm\infty$. Если в правой части /42/ вставим множитель e^{-iy_0x}, то особая точка у $g_0(s,y)$ передвинется в $y=y_0$. Если в качестве $f_0(s,x)$ возьмем сумму таких функций с различными значениями y_0, то $g_0(s,y)$ будет многозначной уточненной функцией общего типа, такой, какие рассмотрены в Дополнении.

Если сочтем, что излагаемый здесь вариант В слишком усложнен, мы можем упростить теорию, ограничиваясь более простыми выражениями для $f_0(s,x)$, чем /42/. А именно, если хотим работать однозначно уточненными функциями, достаточно оставить один из рядов в /42/. Если хотим, чтобы разложения /42/ и /44/ были однозначными, следует оборвать ряды до $j\geq J(<0)$. Если не хотим пользоваться теорией обобщенных функций, можем предположить, что $j\geq 0$. Если не хотим пользоваться обрезающими множителями, предположим, что ряды /42/ и /44/ сходятся равномерно и абсолютно не только вниз, но и вверх. Все же результат останется нетривиальным.

Вариант В, представленный здесь, замечателен тем, что существование фурье-образа обеспечено для очень обширного класса функций /42/.

ДОПОЛНЕНИЕ

Понятие уточненной обычной функции

Как известно, обычные функции $g(y)$ задаются своими значениями при каждом заданном значении аргумента y /будем считать его вещественным, пробегающим все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а сами функции будем считать бесконечно дифференцируемыми, причем их производные задаются по обычному, классическому способу/. Обобщенные функции Соболева-Шварца $g_\eta(y)$ задаются значениями непрерывного линейного функционала

$$J[\psi] = \int g_\eta(y)\psi(y)dy, \qquad /1/$$

который условно записан в виде интеграла. Функции $\psi(y)$ принадлежат некоторому плотному линейному множеству бесконечно дифференцируемых функций, например, $D(y)$, $S(y)$, $Z(y)$ и т.д. [5], причем их производные $\psi^{(\ell)}(y)$ принадлежат тому же самому множеству. Тогда функционалы

$$[J^{(\ell)}[\psi] = (-1)^\ell J[\psi^{(\ell)}] = (-1)^\ell \int g_\eta(y)\psi^{(\ell)}(y)dy \qquad /2/$$

($\ell = 0,1,2,$) по определению, задают производные $g_\eta^{(\ell)}(y)$ обобщенной функции $g_\eta(y)$. Множества функций, соответствующих этим двум определениям, не совпадают. Отсюда возникает понятие регулярных обобщенных функций - таких, что функционалы /1/ и /2/ можно рассматривать как интегралы при заданном выборе обычной функции $g_\eta(y)$, а если $g_\eta(y)$ - гладкая, то кроме /2/ имеем

$$J^{(\ell)}[\psi] = \int g_\eta^{(\ell)}(y)\psi(y)dy \qquad (\ell = 0,1,2,\ldots). \qquad /3/$$

Возникает также понятие регуляризованных обобщенных функций, когда функционалы /1/ и /2/ задаются как несобственные интегралы одной обычной, в общем неинтегрируемой функции $g(y)$ при некоторых дополнительных правилах, уточняющих способ интегрирования. Уточненные функции, которые мы будем здесь рассматривать, являются функциями, регуляризованными в смысле, который будет указан. Они связаны еще с понятием аналитического функционала [5]. Все же их определение не сводится автоматически к этим понятиям. Мы вводим эти функции для решения той проблемы, которую рассматриваем в настоящей работе: для расширения и более естественного оформления класса АФ, представители фурье-образов которых являются тоже обычными функциями. Но нам кажется, что они могут быть интересными и для других целей. Уточнение обычных функций, о котором будет итти речь, можно совершить разными способами, т.е. уточнение расщепляет каждую обычную функцию на некоторое множество функций $g(y)$, и эта дополнительная свобода именно дает возможность найти искомые фурье-образы.

Определение 1. Уточненная обычная функция $g_\eta(y)$ одного вещественного аргумента $y(-\infty<y<+\infty)$ задается одной обычной функцией $g(y)$ из некоторого множества $G(y)$, бесконечно дифференцируемой за исключением конечного множества особых точек y_k $(k=1,2,\ldots,K)$, причем ее производные принадлежат тому же самому множеству $G(y)$, и еще некоторыми дополнительными указаниями, дающими возможность определить функционал /1/ при любом выборе $g(y)\in G(y)$ и $\psi(y)\in Z(y)$. При этом $J^{(\ell)}[\psi]$ задаются через /3/. Указания на то, как понимать /1/, фиксируются выбором конечного множества, в общем, комплексных параметров η_h $(h=1,2,\ldots,H)$ или выбором одной точки η в некотором комплексном H-мерном линейном пространстве. При этом /1/ является линейной функцией координат η_h точки η, т.е. если даны три точки η', η'' и η с координатами η'_h, η''_h и η_h $(h=1,2,\ldots,H)$ и если $J_{\eta'}$, $J_{\eta''}$ и J_η - соответствующие функционалы при заданном выборе $g(y)$ и $\psi(y)$, то

$$\text{из } \eta_h = c'\cdot\eta'_h + c''\cdot\eta''_h, \text{ следует } J_\eta[\psi^{(k)}] = c'J_{\eta'}[\psi^{(k)}] + c''J_{\eta''}[\psi^{(k)}].$$

Ясно, что если зададим $J[\psi^{(k)}]$ в H точках η^h $(h=1,2,\ldots,H)$, не лежащих на одной гиперплоскости, проходящей через точку 0 /с $\eta_h=0$ /, то этим будет определен функционал $J[\psi^{(k)}]$ в любой точке η. В таком смысле будем говорить, что уточненная функция $g_\eta(y)$ имеет H компонент.

Далее вопрос сводится к заданию множества $G(y)$ обычных функций $g(y)$ и способа интегрирования, т.е. сопоставления функционала $J[\psi]$ каждой функции $g(y)$ в каждой точке η.

Определение 2. В качестве $G(y)$ примем множество всех функций, представимых в виде

$$g(y) = g^\times(y) + \sum_{k=1}^{K} g_k(y-y_k), \qquad /4/$$

где $g^\times(y)$ - функция типа $S(y)$, а $g_k(r)$ $(r=y-y_k)$ - K-функции, каждая из которых представима в виде

$$g_k(r) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{kj}\left(\frac{1}{r}\right)^{(-j)}. \qquad /5/$$

Здесь $(-j)$ означает $-j$-кратное дифференцирование при $j \leq 0$ или j-кратное интегрирование при $j>0$, т.е. выберем простейшим образом интеграционные константы

$$(\frac{1}{r})^{(-j)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^j(-j)!}{r^{-j+1}} & j \leq 0, \\ \dfrac{r^{j-1}}{(j-1)!}(\ln r - c_j) \quad (c_j = \sum_{i=1}^{j-1} \dfrac{1}{i}) & j > 0. \end{cases} \qquad /6/$$

В /5/ коэффициенты g_{kj} выбраны так, чтобы

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{i!\,|g_{k,-i}|} = 0 \qquad (i = -j = 0,1,2,\ldots). \qquad /7/$$

При $j \to +\infty$ никаких ограничений на g_{kj} не ставится: там ряд асимптотический. Условие /7/ обеспечивает при любом r сходимость ряда /5/ снизу, когда $yj \to -\infty$. Переменная y, в общем, вещественна, но в /5/ и /6/ она может принимать и комплексные значения: функции $(\frac{1}{r})^{(-j)}$ аналитические на всей плоскости, за исключением точки $r=0$. Эта точка, очевидно, особая: полюс при $j \leq 0$ или точка логарифмического ветвления при $j > 0$. Ко всем членам с $j \geq J > 0$ относятся обрезающие множители, не нарушающие их асимптотику при $r \to 0$ /построения 1,2,3 в основном тексте/, которые могут зависеть от ρ, но и не от ϕ $(r = \rho e^{i\phi})$.

Таким образом, функция $g_k(r)$ определена как многозначная функция /ввиду присутствия $\ln r$ / на всей комплексной плоскости r за исключением точки $r = 0$. Она бесконечно дифференцируема по ρ и ϕ при $\rho \neq 0$, однако вследствие обрезающего множителя ее аналитичность нарушена.

Разложение /5/ функции $g_k(r)$ /при заданном способе суммирования/ содержит некоторую неоднозначность двоякого происхождения. Во-первых, если

$$g_k(r) = g_k^-(r) + g_k^+(r), \qquad g_k^+(r) = g_k^\circ(r)\ln r - g_k^1(r), \qquad /8/$$

$$g_k^-(r) = \sum_{j=0}^{\infty} g_{k,-j}\frac{(-1)^j j!}{r^{j+1}}, \quad g_k^\circ(r) = \sum_{j=1} \frac{g_{kj}}{(j-1)!} r^{j-1}, \quad g_k^1(r) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{kj} c_j}{(j-1)!} r^{j-1}, \qquad /9/$$

/обрезающие множители к $g_k^\circ(r)$ и $g_k^1(r)$ подразумеваются/, ясно, что $g^\times(y)$ будет неопределенной до некоторой добавочной функции типа

$$2\pi i \sum_{k=1}^{K} m_k g_k^\circ(y - y_k) \qquad (m_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad /10/$$

/которая, очевидно, принадлежит классу $G^\times(y)$ /. Вторая

неоднозначность состоит в том, что имеются функции типа $g_0^\times(r)$, которые быстро исчезают при $r \to 0, \pm\infty$, и в то же время разложимы по степеням r. Например,

$$\tilde{g}_0^\times(r) = e^{-a/r^2 - br^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(-ab)(\frac{b}{a})^k r^{2k},$$

где $J_k(z)$ - функции Бесселя. Добавляя к $g_0^\times(r)$ эту функцию и вычитая из степенного ряда ее разложение по степеням r, получим, очевидно, новое разложение типа /5/ той же самой функции. Каждая функция $g_k(y)$ имеет целый класс эквивалентных разложений, получаемых одно из другого путем добавления некоторого модуля $\tilde{g}_0^\times(r)$.

Ввиду линейности функционала /1/ мы можем написать

$$J[\psi] = J^\times[\psi] + \sum_{k=1}^{K} J_k[\psi], \qquad /11/$$

причем $J^\times[\psi]$ и $J_k[\psi]$ задаются через /1/, если подставить там $g^\times(y)$ и $g_k(y - y_k)$ вместо $g(y)$.

Функционал $J^\times[\psi]$ в /11/ является регулярным, задаваемым функцией $g^\times(y)$, поэтому нет надобности его уточнять.

Не так обстоит дело с функционалами $J_k[\psi]$, ввиду того, что, во-первых, функция $\ln r$ неоднозначна, и, во-вторых, она имеет неинтегрируемую особенность при $r = 0$. Чтобы уточнить $J_k[\psi]$, задаем

<u>Построение 1.</u> Пусть L-кривая Жордана, представимая в виде $y = y(\ell)$ $(-\infty < \ < +\infty)$, где $y(\ell)$ - непрерывная функция с частично непрерывной и отличной от нуля производной. Кривая L, однако, лежит не на обычной комплексной плоскости y, а на римановой поверхности S_g функции $g(y)$ /идентичной с поверхностью аналитической функции $\sum_{k=1}^{K} c_k \ln(y - y_k)$ /.
Линия L исходит из точки $y = -\infty$, обходит все точки y_k и оканчивается в точке $y = +\infty$, причем имеет соприкасание бесконечного порядка к вещественной оси y при $y = -\infty$ и $y = +\infty$, т.е. когда $\ell \to \pm\infty$, произведения типа

$$\mathrm{Im}\, y(\ell)(\mathrm{Re}\, y(\ell))^p \qquad /12/$$

стремятся к нулю при любом $p = 0,1,2,\ldots$ Следовательно, L задается не только уравнением $y = y(\ell)$, но еще числами m_k $(k = 1,2,\ldots,K)$, индексирующими тот лист римановой поверхности, на которой лежит одна точка кривой L, например, точка 0, соответствующая значению $\ell = +\infty$. При этом примем, что основной лист, на котором при y вещественном и большем y_k, имеем $\ln(y-y_k)=\ln\rho$ $(\rho=|y-y_k|)$, задается индексами $m_k=0$. Кривая L может закручиваться вокруг точек y_k. Пусть n_k $(n_k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ - числа ее закручиваний /если она просто обходит сверху точку y_k, то $n_k=0$ /.

Построение 2. Задаем

$$J_{kL}[\psi]=\int g_k(y-y_k)\psi(y)dy. \qquad /13/$$

Зная k и L /кроме $g_k(y-y_k)$ и $\psi(y)$ /, можно определить функционал $J_{kL}[\psi]$. Но мы не можем сказать, что этим уточнен функционал $J_k[\psi]$, т.е. мы не можем интерпретировать $J_\eta[\psi]$ через $J^\times[\psi]+\sum_k J_{kL}[\psi]$ /11/, так как это введет гораздо более высокую неопределенность, чем та, которая допустима по определению 1. Поэтому мы введем еще

Построение 3. Если L - заданная кривая указанного выше типа, обозначим через L_{kp} $(0<p\leq1)$ семейство кривых, подобных L с центром подобия y_k - с уравнениями

$$y_p(\ell)=y_k+p(y(\ell)-y_k) \qquad (0<p\leqq1).$$

Тогда, по определению,

$$J_k[\psi]=\lim_{p\to0} J_{kL_{kp}}[\psi]. \qquad /14/$$

Чтобы показать конкретность этого построения, докажем

Теорему 1. Пусть L' и L'' - две кривые указанного типа, заканчивающиеся в одной и той же точке 0 на одном и том же листе римановой поверхности S_g, с заданными индексами $(m'_k)=(m''_k)$ и $(n'_k)=(n''_k)$. Тогда не только концы, но и начала кривых L' и L'' будут расположены на одном и том же листе поверхности S_g, а сами кривые L' и L'' переходят непрерывно одна в другую, не покидая S_g. При этих условиях разность

$$\Delta J_{kp}=J_{kL''_{kp}}-J_{kL'_{kp}} \qquad /15/$$

быстро стремится к нулю, когда $p\to0$.

Теорема 2. Граница J_k /14/ существует. При этом $J_{kL_{kp}}[\psi]$, как функция от p, быстро стремится к $J_k[\psi]$, а сама граница зависит от выбора кривой L только через числа m_k и n_k.

Начнем с доказательства теоремы 1. Если L - кривая, отличающаяся от L только по своей ориентации, то $L'_{kp}+L''_{kp}$ представляет собой /директно ориентированную, несамопересекающуюся на римановой поверхности/ замкнутую кривую L^*_{kp}.

Пусть S_{kp} - область на римановой поверхности, которую L^*_{kp} ограничивает. Тогда по теореме Стокса

$$\Delta J_{kp}=J_{kL'_{kp}}-J_{kL''_{kp}}=\int_{L^*_{kp}} g_k(r)\psi(y_k+r)dr=\iint_{S_{kp}} D(s,t)ds\,dt= \qquad /16/$$
$$=\iint_{S_{kp}} D(\rho,\phi)\rho\,d\rho\,d\phi,$$

где

$$D(s,t)=i\frac{\partial W}{\partial s}-\frac{\partial W}{\partial t}=D(\rho,\phi)=\left(i\frac{\partial W}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)e^{i\phi}, \qquad /17/$$

$$W=W(s,t)=W(\rho,\phi)=g_k(r)\psi(y_k+r) \qquad (r=s+it=\rho e^{i\phi}). \qquad /18/$$

Подразумевается, что функция $g_k(r)$ обрезана множителями $g_{kj}(\rho)$ и $h_k(\rho)$. При помощи двух поперечных кривых L_{kp+} и L_{kp-} разобьем S_{kp} на три части: среднюю S_{kp0} и хвостовые S_{kp+} и S_{kp-}, уходящие к $r\to+\infty$ и $r\to-\infty$. Когда $p\to0$, эти три области суживаются, оставаясь себе подобными.

Оценим сначала ту часть интеграла /16/, которая соответствует области S_{kp0}. Ввиду того, что нас интересует асимптотика $D(\rho,\phi)$ при $\rho\to0$, а $h(\rho)=1$ при достаточно малых ρ, мы можем не писать $h(\rho)$. Выберем по Риту $g_{kj}(\rho)=1-\exp\left(-\frac{(j-1)!}{|a_{kj}|\rho^\alpha}\right)$ $j\geqq J>0$ /$g_{kj}(\rho)=1$ при $j<J$ /. Так как остальные множители в /16/ аналитические, а для аналитических функций $i\frac{\partial W}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\phi}=0$, то мы можем в /18/ и /5/ суммировать только при $j\geqq J$:

$$W=\sum_{j=J}^{\infty} g_{kj}\frac{r^{j-1}}{(j-1)!}(\ln r-c_j)\left(1-e^{-\frac{(j-1)!}{|g_{kj}|\rho^\alpha}}\right)\psi(y_k+r).$$

Если раскроем вторую скобку, то величина $D(\rho,\phi)$, соответствующая первому члену, будет нулем, так как она является суммой произведений аналитических функций. Следовательно, при нахождении $D(\rho,\phi)$ мы можем взять

$$W=w(\rho,\phi)\psi(y_k+r),$$

где

$$w(\rho,\phi)=\sum_{j=J}^{\infty} g_{kj}\frac{\rho^{j-1}e^{i(j-1)\phi}}{(j-1)!}(c_j-\ln\rho-i\phi)e^{-\frac{(j-1)!}{|g_{kj}|\rho^\alpha}}. \qquad /19/$$

Наконец, учитывая, что функция $\psi(y_k+r)$ - аналитическая и что $D(\rho,\phi)$ /17/ является линейной комбинацией первых производных W /18/ по ρ и ϕ, находим

$$D(\rho,\phi)=\psi(y_k+r)\left(i\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right)e^{i\phi} . \qquad /20/$$

Из /19/ находим

$$\frac{\partial w}{\partial\rho}=\sum_{j=J}^{\infty} g_{kj}\frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!}e^{i(j-1)\phi}e^{-\frac{(j-1)!}{|g_{kj}|\rho^{\alpha}}}\left(\frac{j-1}{\rho}(c_j-\ln r)-\frac{1}{\rho}+(c_j-\ln r)\frac{(j-1)!\,\alpha}{|g_{kj}|\rho^{\alpha+1}}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial\phi}=\sum_{j=J}^{\infty} g_{kj}\frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!}e^{i(j-1)\phi}e^{-\frac{(j-1)!}{|g_{kj}|\rho^{\alpha}}}\left(i(j-1)(c_j-\ln r)-i\right).$$

Подставляем в /20/ и получаем

$$D(\rho,\phi)=\frac{i\alpha}{\rho^{\alpha+2}}\sum_{j=J}^{\infty}\frac{g_{kj}}{|g_{kj}|}r^j(c_j-\ln r)e^{-\frac{(j-1)!}{|g_{kj}|\rho^{\alpha}}} . \qquad /21/$$

Прежде всего видно, что этот ряд сходится равномерно при $\rho<1$ /что из общих соображений следовало бы ожидать/, а при $\rho\to 0$ его сумма быстро стремится к нулю. Быстро будут исчезать также ΛJ_{kp+} и ΔJ_{kp-}, так как соответствующие им области S_{kp+} и S_{kp-} при $p\to 0$ быстро суживаются и примыкают к вещественной оси y. /В самом деле, из $s=p\,\mathrm{Re}\,y(\ell)$ и $t=p\,\mathrm{Im}\,y(\ell)$ при $p\,\mathrm{Re}\,y(\ell)=x=\mathrm{const}$ ввиду /12/ находим, что $t=t(x,p)$ при p, стремящемся к нулю, будет быстро исчезать/.

Этим теорема 1 доказана. Из нее по теореме Коши следует справедливость и теоремы 2. /С этой целью в качестве L'' берем L'_{p_0} $(0<p_0<1$ /.

Пусть $L_{(m_k,n_k)}$ $(k=1,2,\ldots K)$ - некоторая кривая L с заданными индексами m_k, n_k и пусть, ввиду /14/,

$$J_{k,m_k,n_k}=\lim_{p\to 0}\int_{L_{(m_kn_k)k_p}} g_k(r)\psi(y_k+r)dr .$$

/ $L_{(m_k,n_k)}$ означает, что L зависит от всех m_k и n_k, а J_{k,m_k,n_k} - что J зависит от k и от соответствующих двух m_k и n_k /. Согласно /11/, будем иметь

$$J[\psi]=J_L[\psi]=J_{(m_k,n_k)}[\psi]=J^{\times}[\psi]+\sum_k J_{km_kn_k}[\psi]. \qquad /22/$$

Итак, согласно определению 5, функционалы типа /1/ существуют, причем каждый из них уточняется при помощи одной

кривой L на римановой поверхности S_g или при помощи $2K$ целых чисел m_k и n_k. /Эти числа уточняют в то же время /2/ или /3//. Но это не самый общий функционал типа /1/. Функционалы $J_{(m_k,n_k)}[\psi]$ назовем первичными, а функционалы типа /1/ /как и /2/ и /3// в самом общем смысле введем как линейную комбинацию из $J_{(m_k,n_k)}[\psi]$:

$$J[\psi]=\sum_{m_k,n_k}c_{(m_k,n_k)}J_{(m_k,n_k)}[\psi] \qquad /23/$$

с произвольными комплексными коэффициентами /которые обеспечивают сходимость/. /Множество членов в этой комбинации, в общем, бесконечно, так как каждый из $2K$ индексов m_k, n_k может принимать бесконечное множество значений $0,\pm 1,\pm 2,\ldots$). Но на самом деле между $J_{(m_k,n_k)}[\psi]$ существует ряд линейных зависимостей и в результате остается только конечное число $-2K+1$ линейно независимых. Поэтому вопрос о сходимости /22/ решается тривиально, а определение 1 выполняется.

В качестве набора базисных функционалов можем взять следующие:

$$1.\ J_0[\psi]=\frac{1}{2}\left(J_{(0,0)}[\psi]+J_{(0,1)}[\psi]\right) \qquad /24/$$

- полусумму первичных функционалов, которые получаются, если выбирать а/ все $m_k=0$ и все $n_k=0$, и б/ все $m_k=0$ и все $n_k=1$.

$$2.\ J_{k0}[\psi]=\frac{1}{2\pi i}\left(J_{(1_k,0)}[\psi]-J_{(0,0)}[\psi]\right), \qquad /25/$$

где $(1_k,0)$ означает комбинацию $m_\ell=1$ при $\ell=k$, $m_\ell=0$ при $\ell\neq k$ и $n_\ell=0$ $(\ell=1,2,\ldots,K)$.

$$3.\ J_k[\psi]=\frac{1}{2\pi i}\left(J_{(0,1_k)}[\psi]-J_{(0,0)}[\psi]\right), \qquad /26/$$

где, аналогично, $(0,1_k)$ означает $m_\ell=0$, $n_\ell=1$ при $\ell=k$ и $n_\ell=0$ при $\ell\neq k$ $(\ell=1,2,\ldots,K)$.

Пользуясь обозначением /8/, легко проверить, что

$$J_{k0}[\psi]=\int g^{\circ}_k(r)\psi(y_k+r)dr .$$

Так как $g^{\circ}_k(y-y_k)$ являются функциями типа $g^{\times}(y)$, мы можем их не писать: они увеличивают множество уточненных функций, соответствующих заданной обычной функции $g(y)$, но не увеличивают весь класс уточненных функций. Так /23/ сводится к

$$J[\psi] = \sum_{k=0}^{K} c_k J_k[\psi], \qquad /27/$$

причем $J_0[\psi]$ задается через /24/, а $J_k[\psi]$ $(k=1,2,..K)$- через /26/. Итак, $J[\psi]$ оказывается линейной комбинацией $K+1$ базисных функционалов, т.е. уточненная обычная функция $g_\eta(y)$, которую он задает, характеризуется, кроме одной обычной функции одного вещественного аргумента y, еще $K+1$ комплексными параметрами, от которых она линейно зависит.

Теперь покажем, что $J_k[\psi]$ $(k=0,1,\dots,K)$ являются функционалами типа тех, которые вводятся в теории обобщенных функций над $Z(y)$. В самом деле, из /27/ находим

$$J_0[\psi] = P\int g(y)\psi(y)dy,$$

причем P означает регуляризованное в смысле /24/ значение интеграла. С учетом /8/

$$J_0[\psi] = \int g^\times(y)\psi(y)dy + \sum_{k=1}^{K} (P_k^- + P_k^+),$$

$$P^- = P\int g_k^-(r)\psi(y_k+r)dr, \qquad P^+ = P\int g_k^+(r)\psi(y_k+r)dr.$$

Функция под знаком интеграла P^+ интегрируема, так что регуляризация не нужна. Интеграл P^-, по определению, есть среднее арифметическое из интегралов по кривым, идущим вдоль вещественной оси y и обходящим y_k сверху и снизу. Отсюда находим

$$P^- = \sum_{j=0}^{\infty} g_{k,-j} P\int \left(\frac{1}{r}\right)^{(j)}\psi(y_k+r)dr.$$

Формальное интегрирование по частям дает

$$P^- = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j g_{k,-j}\; VP\int \frac{1}{r}\psi^{(j)}(y_k+r)dr,$$

где VP - главное значение по Коши. Учитывая, что производные функции $\psi\in Z(y)$ допускают мажорирование типа $|\psi^{(\ell)}(y)|\le C.a^\ell$, ввиду /7/ находим, что этот ряд сходится.

Остается вычислить /26/:

$$J_k[\psi] = \frac{1}{2\pi i}\lim_{p\to0}\int_{L_p^k} g_k(r)\psi(y_k+r)dr,$$

где L^k - кривая, исходящая из точки $r\to-\infty$, обходящая точку $r=y-y_k=0$ в директном направлении и уходящая обратно к $r\to-\infty$ /причем точка 0, где она пересекает положительную часть оси r, лежит на основном листе римановой поверхности/. Ввиду /8/

$$J_k[\psi] = J_k^- + J_k^\circ - J_k^1,$$

$$J_k^- = \frac{1}{2\pi i}\lim_{p\to0}\int_{L_p^k} g_k^-(r)\psi(y_k+r)dr,$$

$$J_k^\circ = \frac{1}{2\pi i}\lim_{p\to0}\int_{L_p^k} g_k^\circ(r)\ln r\,\psi(y_k+r)dr,$$

$$J_k^1 = \frac{1}{2\pi i}\lim_{p\to0}\int_{L_p^k} g_k^1(r)\psi(y_k+r)dr.$$

Так как функция $g_k^-(r)$ однозначна, мы можем свести L^k до окружности L_0^k с центром $r=0$. Находим

$$J_k^- = \frac{1}{2\pi i}\lim_{p\to0}\int_{L_{op}^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{k,-j}\frac{(-1)^j j!}{r^{j+1}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi^{(i)}(y_k)}{i!}r^i\right)dr = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i g_{k,-i}\psi^{(i)}(y_k).$$

Ввиду /7/ и того, что $\psi(y-y_0)\in Z(y)$, ряд сходится. Второй интеграл сводится к

$$J_k^\circ = -\int_{-\infty}^{0} g_k^\circ(r)\psi(y_k+r)dr$$

и, очевидно, сходится, а последний интеграл J_k^1 дает нуль.

Остается еще вопрос определения производных уточненной функции. Этот вопрос решается сразу, так как /2/ сводится к /3/, а производная

$$g^{(\ell)}(y) = g^{\times(\ell)}(y) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{k,-j+\ell}\left(\frac{1}{r}\right)^{(-j)}$$

имеет ту же самую структуру, что и $g(y)$, так что функционалы, которые ей соответствуют, вычисляются аналогично.

Получается, что если мы хотим понимать /1/ как интеграл, то базисные уточненные функции $g^\circ(y)$ и $g^k(y)$, соответствующие функционалам /24/ и /26/, следует рассматривать как регуляризованные обобщенные функции или как операторы /действующие над $\psi(y)$ /:

$$g^\circ(y) = \sum_k VP\, g_k(y-y_k) + g^\times(y) = \sum_k VP\, g_k^-(y-y_k) + \sum_k g_k^+(y-y_k) + g^\times(y) = \qquad /28/$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j g_{k,-j}\; VP\frac{1}{r}\frac{d^j}{dy^j} + \sum_k g_k^+(y-y_k) + g^\times(y).$$

$$g^k(y) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i g_{k,-i}\,\delta^{(i)}(y-y_k) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}\,g_{kj}(y-y_k)^{j-1}. \qquad /29/$$

При этом в /28/ VP относится к соответствующему интегралу /который получится после умножения на $\psi(y)$ /, в /29/ первый ряд сходится, а второй - асимптотический при $y \to 0$. Во второй сумме /29/ вместо $(\underline{y}-\underline{y}_k)^i$ следовало бы писать $(\underline{y}-\underline{y}_k)^i - (y-y_k)^i$, но это несущественно, так как разность является функцией, которую можно отнести к $g^{\times}(y)$.

Из /28/ и /29/ видно, почему мы определили базисные уточненные функции именно через /24/ и /26/ - так они выражаются просто через $g(y)$.

В конце хотим вернуться к вопросу, вправе ли мы рассматривать уточненные функции как обычные. /28/ и /29/ показывают, что их действие на $\psi(y)$ не сводится к умножению. Наше утверждение, что это - обычные функции, базируется на том, что, по определению 1, каждая из них задается своими значениями $g(y)$ при y вещественном и отличном от нуля. Можно возразить, что наличие $K+1$ базисных /линейно независимых/ уточненных функций, а еще более - небазисных, получаемых по /27/, которые соответствуют заданной функции $g(y)$, именно показывает, что уточненные функции не задаются только обычной функцией $g(y)$. Ответ на это возражение тот, что эта дополнительная информация, которая нужна, чтобы определить функционал /1/, соответствующий заданной функции $g(y)$, все же слишком мала, чтобы отказаться называть их обычными. /Так как мы не отказываемся называть функциями многозначные аналитические функции, хотя формально они не удовлетворяют классическому определению функции/. Мы можем рассматривать их как обобщенные функции, и все будет вполне корректно, но необходимая дополнительная информация слишком мала, чтобы оправдать такой крупный переход. Мы можем полностью сохранить корректность определений, считая коэффициенты c_k $(k=0,1,\dots,K)$ в /27/ фиксированными, и тогда каждой обычной функции $g(y)$ будет соответствовать одна уточненная функция. Лучше всего рассматривать $g_\eta(y)$ как функции с $K+1$ компонентами $g^k(y)$ $(k=0,1,2,\dots,K)$, каждая из которых - обычная функция типа /4/, /5/. Пусть через $J_k[g^k,\psi]$ обозначим функционал типа $J_k[\psi]$ /24/, соответственно /26/, где вместо $g(y)$ вставлена соответствующая компонента $g^k(y)$. Тогда /27/ заменим на

$$J[g_\eta,\psi] = \sum_{k=0}^{K} c_k J_k[g^k,\psi]. \qquad /30/$$

Ясно, что каждому набору из $K+1$ обычных функций $g^k(y)$ /типа /4/, /5// соответствует один функционал /30/. А если мы хотим еще, чтобы каждому функционалу /30/ соответствовал один набор из $K+1$ обычных функций $g^k(y)$, достаточно предположить, что только $g^{\circ}(y)$ имеет компоненту $g_0^{\times}(y)$. Нетрудно ввести действия над уточненными функциями этого типа. Линейные операции осуществляются покомпонентно. Свертка в случаях, когда она существует, перемешивает g° с g^k $(k=1,2,\dots,K)$. В этом понимании нет надобности в /30/ писать коэффициенты c_k - их можно включить в $g^k(y)$:

$$J[g,\psi] = \sum_{k=0}^{K} J_k[g^k,\psi].$$

Замечательно то, что уточненные функции вводятся довольно обще - они зависят от выбора бесконечного множества коэффициентов $c_{(m_k,n_k)}$ и даже от выбора кривых L, которые могут лежать на различных листах римановой поверхности S_g и закручиваться произвольное число раз вокруг точек y_k, в результате чего получаем довольно простое множество функционалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Хр., Дамянов Б. Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. I. Общая постановка задачи и определение. Болг.физ. журнал, 1978, кн.6.
2. Христов Хр., Дамянов Б. Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. II. Существование функций и однозначность их разложений. Болг.физ. журнал, 1979, кн.1.
3. Христов Хр., Дамянов Б. Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. III. Общее определение действий над ними, линейные операции. Болг.физ.журнал, 1979, кн.2.
4. Христов Хр., Дамянов Б. Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. IV. Умножение, линейные функционалы. Болг.физ.журнал, 1979, кн.3.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.
6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
7. Гольдбергер М.Л., Ватсон К.М. Теория столкновений. "Мир", М., 1967.

8. Паламодов В.П. Преобразования Фурье быстро растущих бесконечно дифференцируемых функций. Труды Московского математического общества, 1962, том 11, с.309-350.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 августа 1979 года.