сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12714

К.В.Рерих

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРУППЫ ИТЕРАЦИЙ И УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

1979

Р2 - 12714

К.В.Рерих

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРУППЫ ИТЕРАЦИЙ И УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

Рерих К.В. P2 - 12714

Функциональные уравнения группы итераций и уравнения Чу-Лоу

Использована известная формулировка уравнений Чу-Лоу в виде системы нелинейных разностных уравнений. Полученное ранее дифференциальное уравнение, решение которого может дать общее решение исходной системы разностных уравнений, содержит две неизвестные функции, алгоритм построения которых сложен, а определяющие их уравнения не получены. В данной работе функциональные уравнения на эти функции получаются путем дифференцирования групповых уравнений абелевой группы непрерывных преобразований, порожденной расширением на непрерывные значения дискретного параметра подгрупп четных и нечетных итераций исходных уравнений. Решение полученных уравнений может быть одним из путей нахождения общего решения уравнений Чу-Лоу в явном виде. Обсуждается метод решения найденных уравнений путем разложения входящих в них функций в ряд в окрестности неподвижной точки.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Rerikh K.V. P2 - 12714

Iteration Group Functional Equations and the Chew-Low Equations

The Chew-Low equation famous formulation as a system of nonlinear difference equations was used. The obtained earlier by the other author differential equation, which solution can provide a general solution of the initial system of difference equations, contains two unknown functions, whose construction algorithm is difficult, but equations defining them were not obtained. Here functional equations on these functions were obtained by differentiating group equations of an Abelian group of continuous transformations generated by extension on continuous values of discrete parameter of subgroups of even and odd iterations of initial equations. Solution of obtained equations can be one way of deriving general solutions of the Chew-Low equations in an explicit form. A method of solving the obtained equations by expansion of incoming functions in a series in a vicinity of the stationary point is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

ВВЕДЕНИЕ

Исследования по проблеме, которой посвящена и данная работа, ведутся более двадцати лет с того момента, как Чу и Лоу получили уравнения [1], названные их именем. Эти уравнения представляют собой простейший пример нетривиальной модели, в которой одновременно учитываются такие фундаментальные требования дисперсионного подхода, как аналитичность, унитарность и перекрестная симметрия.

Как известно [5], переход к нелинейной краевой задаче на матричные элементы S -матрицы и введение униформизующей переменной

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$$

позволяет свести проблему нахождения всех решений уравнений Чу-Лоу и им подобных к решению следующей системы нелинейных разностных уравнений вида [5,8]:

$$S_i(w) \cdot S_i(1-w) = 1, \qquad S_i(w+1) = \frac{1}{\sum\limits_j A_{ij} S_j(w)} \qquad /1/$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w /мы не выписываем здесь условия порогового поведения и поведения в борновском полюсе/. Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S -матрицы в состояниях i, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $(n \times n)$ со свойствами $A^2 = E$, $\sum\limits_j A_{ij} = 1$.

Таким образом, система уравнений /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, решение которой, как и любой нелинейной системы, представляет самостоятельный интерес. Общее решение системы /1/ найдено пока только для матрицы A /2x2/ [2-4].

В работе [5] был развит метод построения класса решений /1/, являющихся рациональными функциями w /с возможным усложнением их путем введения известного [5] $\beta(w)$ и $D(w)$ - произвола $S_i(w) \to S_i(w + \beta(w)) \cdot D(w)$. Однако в [6] было показано, что этим классом не исчерпываются все решения, и были построены решения, являющиеся трансцендентными мероморфными функциями.

В работах[7] была выдвинута идея поиска решений /1/, лежащих на инвариантных многообразиях размерности $N \le n-1$. На основе геометрической интерпретации уравнений /1/ и развитого в[8] метода локального в окрестности неподвижной точки построения таких инвариантных подпространств было показано[8], что множество решений уравнений Чу-Лоу, лежащих в инвариантных подпространствах, исчерпывается известными[5] решениями, не дающими правильного поведения в борновском полюсе.

В итоге был сделан вывод[9], что физически интересные решения уравнений Чу-Лоу с матрицей А/3x3/ и /4x4/ содержатся только в общем решении уравнений /1/, зависящем от трех, соответственно четырех произвольных периодических функций.

Дальнейшие интересные исследования[10-13] были направлены на построение локального в окрестности неподвижной точки решения системы /1/ с матрицей А /3x3/, зависящего от трех произвольных периодических функций. В основополагающей работе этого цикла[11] показано, что в окрестности неподвижной точки в плоскости проективных координат $x(w)$ и $y(w)$ /являющихся дробно-линейными функциями от S_i/S_j , $i \neq j$, j - фиксировано/ можно построить абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований, связанную с исходными разностными уравнениями. Дифференцирование групповых уравнений по параметру в нуле дает дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

решая которое в окрестности неподвижной точки $x=y=0$, авторы[12,13] получили семейство решений исходной системы в виде ряда $y=f(x,c(w))$ по степеням x и $c(w)$ $(c(-w)=c(w)$, $c(w+1)=-c(w)$. Однако удалось получить первые несколько членов разложения, и явного выражения пока не существует. Одно из препятствий на этом пути состоит в том, что алгоритм получения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ довольно сложен и трудоемок, а уравнения, которые их определяют, не получены. Ниже, используя результаты работы[11] будет получена система двух функциональных уравнений на функции P и Q, что существенно упрощает получение P и Q в виде ряда по степеням x и y, а сами уравнения могут служить отправной точкой для дальнейших попыток получить решение исходных разностных уравнений в замкнутом виде.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $P(x,y)$ И $Q(x,y)$

Уравнения /1/ в той форме, в которой они обсуждаются в[11], имеют вид /для матрицы А Чу-Лоу /3x3/ и А/1.1//

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}\right\}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} &x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w), \\ &x' = x(w+1), \quad y' = y(w+1), \end{aligned} \qquad /2/$$

$$s_1 \cdot s_1' \,(1+ax+by)(1-ax'+by') = 1, \quad s_1(-w) = s_1(w). \qquad /3/$$

Переход от уравнений /1/ к /2/ и /3/ осуществляется следующими заменами:

$$S_i(w) = s_1(w) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2(w) \cdot \xi_i + \psi(w)\eta_i ,$$

где ξ_i , η_i - собственные вектора матрицы А

$$\xi_i = A_{ij}\xi_j , \quad \eta_i = -A_{ij}\eta_j ,$$

а проективные координаты $x(w)$ и $y(w)$ есть

$$x(w) = \frac{\psi(w)}{s_1(w)}, \quad y(w) = \frac{s_2(w)}{s_1(w)}.$$

Функции f и g в /2/ есть отношение двух полиномов 2-ой степени по x и y с одинаковым знаменателем и в окрестности $x=y=0$ представляются сходящимися степенными рядами вида

$$f(x,y) = x + \sum_{n+m\ge 2}^{\infty} f_{n,m}\, x^n y^m ,$$
$$g(x,y) = -y + \sum_{n+m\ge 2}^{\infty} g_{n,m}\, x^n y^m . \qquad /4/$$

Функции f и g имеют однозначные обратные функции, явный вид которых сразу следует из /2/:

$$f^{-1}(x,y) = -f(-x,y),$$
$$g^{-1}(x,y) = g(-x,y). \qquad /5/$$

Рассмотрим множество всех итераций преобразования /2/:

$$x^{(k)} = F(x,y;k) = x + \sum_{n+m\ge 2}^{\infty} f_{n,m}(k)\, x^n y^m ,$$
$$y^{(k)} = G(x,y;k) = (-1)^k y + \sum_{n+m\ge 2}^{\infty} g_{n,m}(k)\, x^n y^m . \qquad /6/$$

Функции F и G задаются итерациями

$$F(x,y;k) = f(F(x,y;k-1),\, G(x,y;k-1)),$$
$$G(x,y;k) = g(F(x,y;k-1),\, G(x,y;k-1)), \qquad /7/$$

где

$$F(x,y;0) \equiv x, \quad G(x,y;0) \equiv y. \qquad /8/$$

Легко убедиться, что это множество образует бесконечную абелеву группу со следующим законом умножения[11]:

$$x^{(n)}(x^{(m)}, y^{(m)}) = x^{(m)}(x^{(n)}, y^{(n)}) = x^{(m+n)}(x,y),$$
$$y^{(n)}(x^{(m)}, y^{(m)}) = y^{(m)}(x^{(n)}, y^{(n)}) = y^{(m+n)}(x,y). \qquad /9/$$

Использование групповых уравнений /9/ при $n=1$ и соотношений /6/ дает разностные уравнения на коэффициенты $f_{n,m}(k)$ и $g_{n,m}(k)$, анализ которых показывает[11], что $f_{n,m}$ и $g_{n,m}$ есть полиномы по k и $(-1)^k$. Рассмотрение подгруппы четных итераций дает основание считать[11], что формулы /6/ и групповые уравнения /9/ справедливы не только при целых k, но и при всех $k=2r$. Тогда дифференцирование уравнений /9/ при $n=2r$ и $m=2\ell$ по $m=2\ell$ дает уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \qquad /10/$$

где

$$Q(x,y) = \frac{dy^{(2\ell)}(x,y)}{d(2\ell)}\Big|_{\ell=0}, \quad P(x,y) = \frac{dx^{(2\ell)}(x,y)}{d(2\ell)}\Big|_{\ell=0}.$$

Функции Q и P получаются в[11] дифференцированием рядов /6/ по параметру, причем $f_{n,m}$ и $g_{n,m}$ должны быть предварительно получены в каждом порядке по $(n+m)$ решением соответствующих разностных уравнений. Ниже мы дадим вывод простых функциональных уравнений на функции P и Q, не прибегая к построению явного вида функций $F(x,y;2u)$ и $G(x,y;2u)$ из /6/ ($k=2u$).

Рассмотрим функции

$$x^{(2u)} = F(x,y;2u), \qquad y^{(2u)} = G(x,y;2u),$$

являющиеся расширением /6/ при $k=2r$ на непрерывные значения $r \to u$. Они при всех целых u совпадают с определением /6/ и подчиняются естественному граничному условию

$$F(x,y;0) \equiv x, \quad G(x,y;0) \equiv y. \qquad /11/$$

Нечетным степеням в /6/ можно сопоставить функции $\bar{F}(x,y;2u+1)$ и $\bar{G}(x,y;2u+1)$, которые в соответствии с групповыми уравнениями /9/ при $n=1$ и $m=2u$ определим следующим образом:

$$\bar{F}(x,y;2u+1) = f(F(x,y;2u),\, G(x,y;2u)),$$
$$\bar{G}(x,y;2u+1) = g(F(x,y;2u),\, G(x,y;2u)). \qquad /12/$$

Множество функций F, G и $\bar{F}, \bar{G}$, очевидно, подчиняется следующим групповым уравнениям, совпадающим с /9/ при всех целых u:

1. $F(F(x,y;2v),\, G(x,y;2v);2u) = F(x,y;2u+2v)$,
2. $G(F(x,y;2v),\, G(x,y;2v);2u) = G(x,y;2u+2v)$,
3. $F(\bar{F}(x,y;2v+1), \bar{G}(x,y;2v+1);2u) = \bar{F}(x,y;2u+2v+1)$,
4. $G(\bar{F}(x,y;2v+1),\, \bar{G}(x,y;2v+1);2u) = \bar{G}(x,y;2u+2v+1)$, /13/
5. $\bar{F}(F(x,y;2v), G(x,y;2v);\, 2u+1) = \bar{F}(x,y;2u+2v+1)$,
6. $\bar{G}(F(x,y;2v), G(x,y;2v);2u+1) = \bar{G}(x,y;2u+2v+1)$,
7. $\bar{F}(\bar{F}(x,y;2v+1), \bar{G}(x,y;2v+1);\, 2u+1) = F(x,y;2u+2v+2)$,
8. $\bar{G}(\bar{F}(x,y;2v+1),\, \bar{G}(x,y;2v+1);2u+1) = G(x,y;2u+2v+2)$.

Дифференцируя /13.5/и/13.6/ по $2v$, при $v=0$ получим с учетом /11/

$$\bar{F}_x(x,y;2u+1)\cdot Q(x,y) + \bar{F}_y(x,y;2u+1)\cdot P(x,y) = \bar{F}_{2u}(x,y;2u+1),$$
$$\bar{G}_x(x,y;2u+1)\cdot Q(x,y) + \bar{G}_y(x,y;2u+1)\cdot P(x,y) = \bar{G}_{2u}(x,y;2u+1), \qquad /14/$$

где

$$Q(x,y) = \frac{dF(x,y;2v)}{d2v}\Big|_{v=0},$$
$$P(x,y) = \frac{dG(x,y;2v)}{d2v}\Big|_{v=0}. \qquad /15/$$

С другой стороны, дифференцируя /13.3/ и /13.4/ по $2u$ при $u=0$, получим

$$\bar{F}_{2v}(x,y;2v+1) = Q(\bar{F}(x,y;2v+1), \bar{G}(x,y;2v+1)),$$
$$\bar{G}_{2v}(x,y;2v+1) = P(\bar{F}(x,y;2v+1), \bar{G}(x,y;2v+1)). \qquad /16/$$

Заменяя в /16/ v на u и подставляя результат в /14/, получим при $u=0$ с учетом /12/ уравнение на функции $Q(x,y)$ и $P(x,y)$:

$$Q(f(x,y),g(x,y))=f_x(x,y)Q(x,y)+f_y(x,y)P(x,y),$$
$$P(f(x,y),g(x,y))=g_x(x,y)\cdot Q(x,y)+g_y(x,y)P(x,y). \qquad /17/$$

Легко получить, используя /5/ и /6/, что

$$F(x,y;-2u)=-F(-x,y;2u),$$
$$G(x,y;-2u)=G(-x,y;2u). \qquad /18/$$

Уравнения /13.1/ и /13.2/ при $u=-v$ с учетом /11/ и /18/ имеют вид

$$-F(-F(x,y;2u),G(x,y;2u);2u)\equiv x,$$
$$G(-F(x,y;2u),G(x,y;2u);2u)\equiv y. \qquad /19/$$

Дифференцируя /19/ по $2u$ при $u=0$ с учетом /15/ и /11/, получим свойства функций Q и P:

$$Q(-x,y)=Q(x,y),$$
$$P(-x,y)=-P(x,y). \qquad /20/$$

Решение полученных функциональных уравнений /17/ на основе методов, не связанных с разложением функций P и Q в ряд в окрестности неподвижной точки $x=y=0$, представляет самостоятельную задачу.

Ниже мы рассмотрим в качестве примера процедуру нахождения решений P и Q уравнений /17/ с функциями f и g для матрицы A/1.1/ из [12] в виде рядов по x и y в окрестности $x=y=0$.

Функции f и g имеют вид

$$f(x,y)=\frac{x+3x^2+\frac{3}{4}xy-\frac{5}{4}y^2}{1+4x+\frac{13}{4}y+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}xy-\frac{5}{4}y^2}=x-x^2-\frac{5}{2}xy-\frac{5}{4}y^2+\dots,$$

$$g(x,y)=\frac{-y+2x^2+2xy-\frac{5}{4}y^2}{1+4x+\frac{13}{4}y+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}xy-\frac{5}{4}y^2}=-y+2x^2+6xy+2y^2+\dots.$$

Представим $Q(x,y)$ и $P(x,y)$ в виде рядов по полиномам данной степени однородности, удовлетворяющим свойствам /20/:

$$Q(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(x,y),\quad P(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x,y). \qquad /21/$$

Решая систему /17/ в каждом порядке по n, мы получим алгебраическую систему уравнений на коэффициенты $Q_n(x,y)$ и $P_n(x,y)$. Подстановка /21/ в /17/ дает, что разложение в /21/ начинается с $n=2$. При $n=2$ система тождественно удовлетворяется, а при $n=3$ получается алгебраическая система уравнений на коэффициенты Q_2, P_2, P_3 и Q_3, определяющая их с точностью до общего множителя, как и исходные уравнения /17/. Далее ситуация повторяется: при каждом $n=2m$ система /17/ тождественно удовлетворяется вкладом в данный порядок ранее найденных Q_i и P_i с $i\le 2m-1$, а при $n=2m+1$ решение системы дает

Q_{2m}, P_{2m}, Q_{2m+1}, P_{2m+1}.

Система /17/ в порядке $(2n+1)$ имеет вид:

$$1.\ 4xQ_{2n}+5yP_{2n}-(2x^2+\frac{5}{2}y^2)\frac{\partial Q_{2n}}{\partial x}-12xy\frac{\partial Q_{2n}}{\partial y}=R_{2n+1}(x,y)-R_{2n+1}(-x,y),$$

$$2.\ -12yQ_{2n}-12xP_{2n}+(2x^2+\frac{5}{2}y^2)\frac{\partial P_{2n}}{\partial x}+12xy\frac{\partial P_{2n}}{\partial y}=S_{2n+1}(x,y)+S_{2n+1}(-x,y), \qquad /22/$$

$$3.\ -4Q_{2n+1}+5yQ_{2n}+5xP_{2n}-5xy\frac{\partial Q_{2n}}{\partial x}-4(x^2+y^2)\frac{\partial Q_{2n}}{\partial y}=R_{2n+1}(x,y)+R_{2n+1}(-x,y),$$

$$4.\ 4P_{2n+1}-8xQ_{2n}-8yP_{2n}+5xy\frac{\partial P_{2n}}{\partial x}+4(x^2+y^2)\frac{\partial P_{2n}}{\partial y}=S_{2n+1}(x,y)-S_{2n+1}(-x,y),$$

где $R_{2n+1}(x,y)$ и $S_{2n+1}(x,y)$ есть однородные полиномы порядка $(2n+1)$ при разложении функций

$$R(x,y)=f_x\sum_{m=2}^{2n-1}Q_m(x,y)+f_y\sum_{m=2}^{2n-1}P_m(x,y)-\sum_{m=2}^{2n-1}Q_m(f(x,y),g(x,y)), \qquad /23/$$

$$S(x,y)=g_x\sum_{m=2}^{2n-1}Q_m(x,y)+g_y\sum_{m=2}^{2n-1}P_m(x,y)-\sum_{m=2}^{2n-1}P_m(f(x,y),g(x,y))$$

в ряд вида /21/. Так как функции R и S зависят от ранее определенных Q_m и P_m с $m\le 2n-1$, то разложение их в ряд начинается с членов $(2n+1)$ степени.

Решение системы /22/ с учетом /23/ при $n=1$ /т.е. с нулевой правой частью в /22// дает результат, естественно, совпадающий с [12]:

$$Q_2 = -x^2 - \frac{5}{4}y^2, \qquad Q_3 = -\frac{15}{4}x^2y + \frac{15}{16}y^3,$$

$$P_2 = -6xy, \qquad P_3 = 4x^3 - xy^2.$$

В заключение автор выражает благодарность В.А.Мещерякову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
2. Wanders G. Nuovo Cimento, 1962, 23, p.816.
3. Rotheluther T. Zs.Phys., 1964, 177, p.287.
4. Мещеряков В.А. ЖЭТФ, 1966, 52, с.648.
5. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
6. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. ЯФ, 1968, 10, с.168.
7. Мещеряков В.А., Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-4356, Р2-4377, Дубна, 1969.
8. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann. of Phys., 1970, 59,p.408; ТМФ, 1970, 3, с.78.
9. Рерих К.В. Автореферат кандидатской диссертации. ОИЯИ, 2-5451, Дубна, 1970.
10. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971.
11. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7047, Дубна, 1973.
12. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7976, Дубна, 1974.
13. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1979 года.