объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12670

Е.А.Иванов, А.С.Сорин

СТРУКТУРА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНФОРМНОЙ СУПЕРГРУППЫ В OSp (1,4)-БАЗИСЕ

1979

Р2 - 12670

Е.А.Иванов, А.С.Сорин *

СТРУКТУРА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНФОРМНОЙ СУПЕРГРУППЫ В OSp(1,4)-БАЗИСЕ

Направлено в ТМФ

* Днепропетровский государственный университет

Иванов Е.А., Сорин А.С.

Р2 - 12670

Структура представлений конформной супергруппы в OSp(1,4)-базисе

Предложен метод построения полного набора неприводимых представлений конформной супергруппы SU(2,2/1), действующих на суперполях типа $\Phi_k(x,\theta_+,\theta_-)$ / k - лоренцев индекс; θ_+, θ_- - левая и правая грассмановы координаты/. Он состоит в сведении этой задачи к нахождению инвариантных пространств ортосимплектической подгруппы $OSp^I(1,4)$ супергруппы SU(2,2/1) с последующим выделением минимального набора тех из них, которые одновременно являются инвариантными пространствами относительно другой ортосимплектической подгруппы ($OSp^{II}(1,4)$), пересекающейся с первой по O(2,3) и порождающей в замыкании с ней всю супергруппу SU(2,2/1). Сформулирован критерий отбора таких пространств. Найдены новые серии SU(2,2/1)-представлений и обсуждаются вопросы эквивалентности представлений, индуцированных разными малыми /супер/группами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Ivanov E.A., Sorin A.S.

P2 - 12670

The Structure of Representations of Conformal Supergroup in the OSp(1,4)-Basis

A new method is suggested for constructing the complete set of irreducible representations of conformal supergroup SU(2,2/1) acting on superfields of the type $\Phi_k(x,\theta_+,\theta_-)$ (k being the Lorentz index, θ_+, θ_- left-and right-handed Grassmann coordinates). Its main point is the reduction of the problem to the much more simple task of extracting the minimal set of certain invariant spaces of the orthosymplectic subgroup $OSp(1,4)(OSp^I(1,4))$ of supergroup SU(2,2/1). These spaces are those closed also with respect to another OSp(1,4)-subgroup ($OSp^{II}(1,4)$) which intersects with $OSp^I(1,4)$ over O(2,3) and completes it to the whole SU(2,2/1). The precise criterion for selecting such invariant spaces is formulated. New series of SU(2,2/1)-representations are found, and the problem of equivalency between representations induced by different little (super)groups is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

I. Интерес к суперсимметрии, связанной с конформной супергруппой SU(2,2/I) /I,2/, обусловлен в основном двумя причинами. Во-первых, являясь расширением конформной симметрии, она накладывает дополнительные ограничения на структуру конформных функций Грина /3,4/. Другая причина - недавний прогресс в построении конформной супергравитации /5/. Существует ряд серьезных указаний в пользу перенормируемости этой теории (для вейль-гравитации такие надежды высказывались в /6/). Супергруппа SU(2,2/I) есть максимальная глобальная градуированная подгруппа бесконечнопараметрической супергруппы конформной супергравитации и поэтому играет определяющую роль в формировании представлений и инвариантных пространств последней.

Построению наиболее интересных для физических приложений индуцированных представлений супергруппы SU(2,2/I), заданных на суперполях $\Phi_\kappa(x,\theta_+,\theta_-)$ (κ - лоренцевский индекс, θ_+, θ_- - левая и правая спинорные координаты), были посвящены работы /I,4,7-9/. С принципиальной точки зрения построение таких представлений не вызывает затруднений. Наибольшую сложность представляет осуществление их редукции, так как для этого необходимо знать полный набор их неприводимых инвариантных пространств. Эта задача полностью решена для аналогичных представлений пуанкаре-суперсимметрии /I0/. Общие методы, используемые в /I0/, легко переносятся на случай супергруппы OSp(I,4) /II,I2/, однако сталкиваются с серьезными трудностями в случае супергруппы SU(2,2/I) (см. разд.II).

Первые нетривиальные SU(2,2/I)-представления указанного выше типа, реализованные на скалярных и векторных мультиплетах, были построены в работе /I/. Редукция некоторых SU(2,2/I)-представлений изучалась в работах [8,9]. Используемые там методы очень громоздки, что не позволило авторам работы [8] найти все представления, действующие в найденных ими инвариантных пространствах.

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на важную роль супергруппы OSp (I,4) в формировании физически интересных представлений конформной супергруппы. Выделенность OSp (I,4) в конформной супергруппе связана с тем обстоятельством, что $SU(2,2/1)$ может быть представлена как замыкание двух её суперподгрупп OSp (I,4), пересекающихся по группе O (2,3) [13]. Использование этого факта позволяет свести задачу нахождения SU (2,2/I)-инвариантных пространств к задаче нахождения определенных инвариантных пространств более простой по структуре супергруппы OSp(I,4). Мы указываем критерий отбора таких OSp(I,4)-инвариантных пространств. Их перечисление исчерпывает все инвариантные пространства конформной супергруппы, заданные на суперфункциях $\Phi_K(x,\theta_+,\theta_-)$.

В недавней работе [12] мы построили полный набор OSp(I,4)-представлений, индуцированных супергруппой Лоренца (см. разд.П), реализованной в инвариантных пространствах группы Лоренца. Здесь мы показываем, что все эти инвариантные пространства являются одновременно инвариантными пространствами конформной супергруппы и находим полный набор реализованных в них SU (2,2/I)-представлений. При этом мы воспроизводим результаты работ [1,4,7-9] и получаем новые серии представлений.

Статья спланирована следующим образом. Во втором разделе приведены основные сведения о конформной супералгебре и введен используемый в дальнейшем OSp (I,4)-базис в пространстве её генераторов. Третий раздел посвящен формулировке предлагаемого метода построения SU(2,2/I)-представлений. В четвертом разделе строятся конкретные представления и изучаются вопросы эквивалентности представлений, индуцированных разными малыми группами.

П. Конформная супергруппа SU (2,2/I) порождается 24 генераторами:

$$SU(2,2/1) \propto (M_{\mu\nu}, P_\rho, K_\lambda, D, S, T, \Pi_5), \tag{I}$$

где $M_{\mu\nu}$, P_ρ, K_λ, D – генераторы её конформной подгруппы $SO(4,2)$ $(\sim C_{15})$; S, T, Π_5 – соответственно генераторы

супертрансляций, специальных суперконформных и киральных преобразований. Её алгебра, кроме структурных соотношений алгебры SO (4,2), включает следующие (анти) коммутационные соотношения [2] ж):

$$\begin{gathered}\{S,\bar{S}\} = \gamma^\mu P_\mu,\ \{T,\bar{T}\} = -\gamma^\mu K_\mu,\ \{S,\bar{T}\} = i(D-\gamma_5\Pi_5)+\tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}M_{\mu\nu},\\ \left[S,\begin{pmatrix}P_\mu\\K_\mu\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\-\gamma_\mu T\end{pmatrix},\ \left[T,\begin{pmatrix}P_\mu\\K_\mu\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\gamma_\mu S\\0\end{pmatrix},\ \left[M_{\mu\nu},\begin{pmatrix}S\\T\end{pmatrix}\right]=-\tfrac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\begin{pmatrix}S\\T\end{pmatrix},\\ \left[\Pi_5,\begin{pmatrix}S\\T\end{pmatrix}\right]=\tfrac{3}{2}i\gamma_5\begin{pmatrix}-S\\T\end{pmatrix},\ \left[D,\begin{pmatrix}S\\T\end{pmatrix}\right]=\tfrac{i}{2}\begin{pmatrix}S\\-T\end{pmatrix},\ [\Pi_5, SO(4,2)]=0.\end{gathered} \tag{2}$$

Для более ясного понимания структуры супералгебры (2) удобно перейти от стандартного базисного набора генераторов (I) к следующему набору:

$$M_{\mu\nu},\ R_\rho(m),\ Q^{I}(m),\ Q^{II}(m),\ N_\mu(m),\ D,\ \Pi_5\ , \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} Q^{I}(m)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(S-mT),\quad Q^{II}(m)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(S+mT)\ ,\\ R_\rho(m)=\tfrac{1}{2}(P_\rho-m^2K_\rho),\ N_\mu(m)=\tfrac{1}{2}(P_\mu+m^2K_\mu)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Роль введенного в (4) размерного параметра m $([m]=L^{-1})$ станет понятна из дальнейшего.

Используя структурные соотношения (2) и определения (4), легко видеть, что [13]:

I. Генераторы $M_{\mu\nu}$, $R_\rho(m)$ и $M_{\mu\nu}$, $N_\rho(m)$ образуют алгебры групп O (2,3) и O (I,4):

$$[R_\mu(m),R_\nu(m)]=-im^2M_{\mu\nu},\ [N_\mu(m),N_\nu(m)]=im^2M_{\mu\nu}\ . \tag{5}$$

2. Каждый из генераторов $Q^{I}(m)$ и $Q^{II}(m)$ расширяет ал-

ж) Метрика и γ-матрицы определены,как в работе [13]. Генератор Π_5 связан с используемым в [2] генератором Π соотношением $\Pi_5=-2\Pi$. Генераторы S и T являются майорановскими: $S=C\bar{S}^T$, $T=C\bar{T}^T$, где $C=i\gamma_0\gamma_2$ – матрица зарядового сопряжения.

гебру $O(2,3)$ до супералгебр $OSp^{I}(I,4)$ и $OSp^{II}(I,4)$*):

$$\{Q^{I,II}(m), \bar{Q}^{I,II}(m)\} = \gamma^{\mu} R_{\mu}(m) \mp \frac{m}{2}\sigma^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\,, \qquad (6)$$

$$[Q^{I,II}(m), R_{\mu}(m)] = \mp \frac{m}{2}\gamma_{\mu} Q^{I,II}(m)\,. \qquad (7)$$

Заметим, что структурные соотношения супералгебры $OSp^{I}(I,4)$ могут быть приведены к виду, совпадающему с соотношениями $OSp^{II}(I,4)$, переходом к генератору $Q^{I\prime}(m) = \gamma_5 Q^{I}(m)$ (что формально соответствует замене $m \to -m$).

3. Замыкание полученных таким способом супергрупп $OSp^{I}(I,4)$ и $OSp^{II}(I,4)$ совпадает с конформной супергруппой:

$$\{Q^{II}(m), \bar{Q}^{I}(m)\} = \gamma^{\mu} N_{\mu}(m) - im(D - \gamma_5 \Pi_5)\,. \qquad (8)$$

Удобство использования базиса (3) заключается в том, что в нем $SU(2,2/I)$-представления полностью определяются заданием одного спинорного генератора: либо $Q^{I}(m)$, либо $Q^{II}(m)$. Действительно, эти генераторы связаны соотношением $Q^{I}(m) = Q^{II}(-m)$, а остальные $SU(2,2/I)$-генераторы содержатся в антикоммутаторах (6) и (8). Этот факт примечателен тем, что позволяет свести задачу нахождения определенных $SU(2,2/I)$-представлений к задаче построения представлений значительно более простой по структуре супергруппы $OSp^{I}(I,4)$ ($OSp^{II}(I,4)$). В следующем разделе мы подробно рассмотрим эту возможность.

В заключение этого раздела укажем одно важное свойство супералгебры $OSp(I,4)$, выбрав для определенности $OSp^{II}(I,4)$. Она может быть представлена как замыкание двух комплексно-сопряженных суперподалгебр $A_{\pm} \propto (M_{\mu\nu}, Q^{II}_{\pm}(m) = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5) Q^{II}(m))$ /I2/:

$$[M_{\mu\nu}, Q^{II}_{\pm}(m)] = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} Q^{II}_{\pm}(m), \quad \{Q^{II}_{\pm}(m), \bar{Q}^{II}_{\pm}(m)\} = \frac{m}{2}\frac{1 \pm i\gamma_5}{2}\sigma^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \qquad (9)$$

$$\{Q^{II}_{\pm}(m), \bar{Q}^{II}_{\mp}(m)\} = \frac{1 \pm i\gamma_5}{2}\gamma^{\mu} R_{\mu}(m)\,.$$

---

*) Генератор $S + imT$ ($S - imT$) и $O(I,4)$-генераторы $M_{\mu\nu}$, $N_{\rho}(m)$ также образуют замкнутую супералгебру, которая, однако, не является самосопряженной. Её структурные соотношения можно получить заменой параметра m на im в соотношениях (6), (7) ($N_{\rho}(m) = R_{\rho}(im)$).

(Следуя нашей работе /I2/, мы будем называть их супералгебрами Лоренца, соответственно левой и правой). Супералгебра $OSp^{I}(I,4)$ обладает таким же свойством (с учетом замены $m \to -m$).

III. Рассмотрим $SU(2,2/I)$-представления, индуцированные некоторой малой (супер) группой $H \subset SU(2,2/I)$ с генераторами h_i. $SU(2,2/I)$-генераторы, не включенные в H , будем обозначать символами V_j . Представления такого типа строятся стандартным образом с использованием общих методов теории индуцированных представлений. Опишем их вкратце.

Выбирается определенная параметризация для смежных классов супергруппы $SU(2,2/I)$ по подгруппе H :

$$G(z_j) = f(z_j V^j) \qquad (I0)$$

(различным параметризациям смежных классов $G(z_j)$ отвечают эквивалентные системы криволинейных координат в фактор-пространстве $SU(2,2/I)/H$). Конформная супергруппа реализуется в фактор-пространстве $SU(2,2/I)/H$ левыми сдвигами:

$$G(z_j) \xrightarrow{G_0 \in SU(2,2/1)} G_0\, G(z_j) = G(z_j')\exp\{u^i(G_0, z_j) h_i\}\,, \qquad (II)$$

где вид функции $u^i(G_0, z_j)$ с точностью до замены координат определяется групповым элементом G_0 и структурными соотношениями супергруппы $SU(2,2/I)$. Трансформационные свойства H-неприводимых полей ($SU(2,2/I)$-инвариантных пространств) относительно реализации (II) задаются формулой

$$\Phi_k(z_j) \xrightarrow{G_0} \Phi_k'(z_j') = [\exp\{u^i(G_0, z_j)\tilde{h}_i\}]_{k\ell}\, \Phi_\ell(z_j)\,, \qquad (I2)$$

где $\tilde{h}_i$ - матрицы, представляющие генераторы H на $\Phi_k(z_j)$. Совместно с трансформационным законом (II) для координат z_j закон (I2) определяет реализацию $SU(2,2/I)$-генераторов на полях $\Phi_k(z_j)$, т.е. некоторое представление супералгебры $SU(2,2/I)$.

Этот алгоритм позволяет легко строить $SU(2,2/I)$-представления, индуцированные произвольными малыми группами. Однако поскольку эти представления в общем случае приводимы, возникает нетривиальная задача их разложения на неприводимые компоненты.

Существует ряд общих методов её решения. Наиболее последовательным и приводящим к полному решению является метод, основанный на применении операторов Казимира. Построив их полный набор и вычислив их спектр, нетрудно сконструировать проекционные операторы, выделяющие неприводимые части из приводимого представления. Иногда эту задачу эквивалентно решают путем наложения на поля ковариантных по группе дополнительных условий, построенных с использованием ковариантных производных (вид этих условий диктуется структурой операторов Казимира). Эти методы позволили найти полный набор неприводимых представлений пуанкаре-суперсимметрии /10/ и без особого труда могут быть распространены на случай $OSp(1,4)$-суперсимметрии /11,12/.

Однако подобная техника пока не может быть конструктивно использована для редукции наиболее интересных с физической точки зрения $SU(2,2/1)$-представлений, а именно тех, которые индуцируются малыми группами:

$$C \propto (M_{\mu\nu}, D, \Pi_5, K_\rho, T) \quad /9/ \,, \tag{13}$$

$$C_\pm \propto (M_{\mu\nu}, D, \Pi_5, K_\rho, S_\pm = \frac{1\pm i\gamma_5}{2}S, T_\mp = \frac{1\mp i\gamma_5}{2}T) \quad /4,8/ \tag{14$\pm$}$$

с дополнительными условиями на индуцирующие представления*):

$$K_\mu = T = 0\,, \tag{13a}$$

$$K_\mu = T_\mp = S_\pm = 0 \tag{14a$\pm$}$$

(эти условия совместны с алгебрами групп C и $C_\pm$, так как генераторы K_μ, T и K_μ, $T_\mp$, $S_\pm$ образуют в них идеалы). Дело в том, что $SU(2,2/1)$-генераторы в этом случае не могут быть выбраны ортонормальными по отношению к внутреннему произведению Картана (некоторые коммутаторы между генераторами из фактор-пространства и малой группы с необходимостью содержат генераторы малой группы), т.е. не выполняется свойство, критичное для стандартного построения групповых ковариантов (форм Картана, ковариантных производных и т.д.) /14/. Кроме того, в настоящее

*) Выделенность таких $SU(2,2/1)$-представлений обусловлена тем, что инвариантные пространства, в которых они действуют, состоят из обычных лоренц-неприводимых мультиплетов и совпадают по структуре с инвариантными пространствами пуанкаре-суперсимметрии.

время не известна структура полного набора операторов Казимира конформной супергруппы.

Наиболее прямой, однако далеко не самый продуктивный путь решения проблемы редукции основан на анализе трансформационных свойств инвариантных пространств и выяснении, для каких представлений малой группы они содержат инвариантные подпространства /8/. В каждом отдельном случае он требует специального рассмотрения и является чрезвычайно громоздким, что может приводить к "потере" некоторых представлений.

Мы хотим привлечь внимание к еще одному способу редукции некоторых приводимых $SU(2,2/1)$-представлений. Этот способ не претендует на математическую строгость и носит в значительной степени эвристический характер, однако в ряде случаев может эффективно использоваться (см. разд.IV). Он основан на наблюдении, что некоторое $OSp^{I}(1,4)$ ($OSp^{II}(1,4)$)-инвариантное подпространство $\Phi_\kappa(z_j,m)$ $SU(2,2/1)$-инвариантного пространства $\Phi_\kappa(z_j)$ само заведомо является $SU(2,2/1)$-инвариантным, если оно не зависит от параметра m *) в базисе (3), (4). В самом деле, в этом случае из инвариантности пространства относительно действия генератора $Q^{I}(m)$ ($OSp^{I}(1,4)$) следует его инвариантность относительно действия генератора $Q^{II}(m)$ ($OSp^{II}(1,4)$):
$Q^{II}(m)\Phi_\kappa(z_j,m) = Q^{I}(-m)\Phi_\kappa(z_j,m) = Q^{I}(-m)\Phi_\kappa(z_j,-m)$ и тем самым инвариантность по отношению ко всем остальным $SU(2,2/1)$-генераторам, поскольку они содержатся в антикоммутаторах спинорных генераторов (разд.II). Это наводит на мысль о возможности сведения в ряде случаев задачи нахождения редуцированных инвариантных пространств $SU(2,2/1)$ к нахождению инвариантных пространств её суперподгруппы $OSp^{I}(1,4)$ ($OSp^{II}(1,4)$) и последующему отбору тех из них, которые не зависят от параметра m*) (при этом $OSp^{I}(1,4)$ ($OSp^{II}(1,4)$)-генераторы, реализо-

*) К числу таких инвариантных пространств мы относим и те, которые содержат тривиальную зависимость от параметра m, т.е. зависимость, которую можно устранить переопределением независимых базисных элементов (компонент суперполя). Условие тривиальной зависимости от m не только достаточное, но и необходимое: любое $SU(2,2/1)$-инвариантное пространство может содержать m только тривиальным образом, так как супералгебра $SU(2,2/1)$ в базисе (1) не включает m.

ванные на них, должны быть приведены к виду, совпадающему с видом соответствующих OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-генераторов конформной супергруппы из набора (3)).

В этих инвариантных пространствах должны быть реализованы OSp^{I}(I,4) (OSp^{II} (I,4))-представления, содержащиеся в SU(2,2/I)-представлениях, индуцированных данной малой группой $H \subset SU(2,2/I)$. Для построения таких OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-представлений необходимо знать индуцирующую их подгруппу H' супергруппы OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4)) (H' является подгруппой группы H , поскольку OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4)) есть подгруппа супергруппы SU(2,2/I)). Для её нахождения достаточно выделить из OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-генераторов, содержащихся в наборе (3), те генераторы, которые не сдвигают координат z_j (т.е. те, в которых отсутствуют члены типа $\partial/\partial z_j$). Тогда эти генераторы принадлежат малой группе H' .

Редукцию построенных стандартным образом OSp^{I}(I,4) - (OSp^{II} (I,4))-представлений, индуцированных малой группой H' , можно проводить одним из описанных выше общих методов (структура OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-ковариантных производных для некоторых реализаций OSp(I,4) найдена в работах /II,I2/).

Такой способ сведения задачи построения неприводимых SU(2,2/I)-представлений к задаче нахождения OSp^{II}(I,4)- (OSp^{II} (I,4))-представлений имеет ограниченную область применения. Это связано с тем, что с его помощью можно воспроизводить лишь такие SU (2,2/I)-инвариантные пространства, которые совпадают по структуре с OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-инвариантными пространствами. Последнее заведомо выполняется для SU (2,2/I)-представлений, удовлетворяющих следующим условиям:

(А) Фактор-пространства $SU(2,2/I)/H$ и $OSp^{I}(I,4)/H'$ (OSp^{II} (I,4)/ H') имеют одинаковую размерность как в бозе-, так и в ферми-секторах (т.е. соответствующие SU(2,2/I)- и OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-инвариантные пространства натянуты на функции одного и того же числа переменных z_j).

(Б) Индуцирующее неприводимое инвариантное пространство малой группы H неприводимо и по отношению к группе H' (т.е. SU (2,2/I)-представление реализуется на суперполе, неприводимом по внешнему индексу относительно H').

Заметим, что условие (Б) накладывает довольно сильное ограничение на возможную структуру группы H : она должна иметь вид полупрямого произведения $H' \cdot T$, где T - нормальный делитель. Малые группы C , $C_{\pm}$ (I3), (I4$_{\pm}$) принадлежат именно к этому классу (см. следующий раздел).

Резюмируя содержание этого раздела, перечислим основные стадии предлагаемого алгоритма редукции SU (2,2/I)-представлений.

I. Строим SU (2,2/I)-представления общего вида, индуцированные малой группой $H \subset SU(2,2/I)$.

2. Выделяем OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4))-представления, содержащиеся в SU(2,2/I)-представлениях, и находим индуцирующую их малую группу $H' \subset OSp^{I}$ (I,4) (OSp^{II} (I,4)).

3. Проверяем выполнимость условий (А) и (Б).

4. Проводим редукцию OSp^{I} (I,4) (OSp^{II}(I,4))-представлений в наиболее удобном базисе.

5. Переходим к старому базису и отбираем OSp^{I} (I,4)- (OSp^{II} (I,4))-инвариантные пространства, не имеющие нетривиальной зависимости от параметра m . Подчеркнем, что должны отбираться как неприводимые пространства, так и приводимые, поскольку неприводимое SU (2,2/I)-инвариантное пространство может быть приводимым по группе OSp^{I} (I,4) (OSp^{II} (I,4)). Полученные OSp (I,4)-инвариантные пространства одновременно являются и инвариантными пространствами конформной супергруппы. Их перечисление исчерпывает инвариантные пространства супергруппы SU(2,2/I), в которых действуют представления, удовлетворяющие условиям (А) и (Б).

Если из такого инвариантного пространства нельзя выделить OSp^{I}(I,4) (OSp^{II} (I,4))-инвариантное подпространство, не зависящее от параметра m *), то реализованное в нем SU (2,2/I)-представление является неприводимым. В противном случае SU(2,2/I)-представление приводимо и для его редукции необходимо произвести дальнейшее расщепление данного OSp^{I} (I,4) (OSp^{II}(I,4))-инвариантного пространства.

Хотя условия (А) и (Б) жестко ограничивают класс представлений, которые могут быть получены таким методом, в следующем разделе мы покажем, что в этот класс попадают все наиболее важные с точки зрения физических приложений представления, индуцированные группами C и $C_{\pm}$. Для построения таких представлений использование описанного алгоритма оказывается весьма эф-

*) См. сноску на стр.9.

фективным и в принципе позволяет построить полный набор представлений.

IУ. Основываясь на рассуждениях предыдущего раздела, изучим $SU(2,2/1)$-представления, индуцированные малыми группами (I3) и (I4$_*$) . Поскольку представления, индуцированные группами C_- и C_+, связаны друг с другом инволюцией (так же как сами C_- и C_+), достаточно рассмотреть представления, индуцированные группами C и C_- .

Дополнительные условия (I3а) и (I4а$_-$) на индуцирующие представления сводят их к неприводимым представлениям общей для малых групп C и C_- подгруппы $P \propto (M_{\mu\nu}, D, \Pi_5)$, т.е. в обоих случаях $SU(2,2/1)$-представления фактически индуцируются одной и той же группой. Однако структура фактор-пространств $SU(2,2/1)/C$ и $SU(2,2/1)/C_-$ существенно различна, что приводит в общем случае к неэквивалентности индуцированных представлений этих двух типов*).

Структура группы P довольно проста. Она представляет собой прямое произведение группы Лоренца и двух абелевых групп: масштабной и киральной. Её неприводимые представления имеют вид прямого произведения неприводимых представлений группы Лоренца на dI и zI , где d, z - произвольные (не обязательно целые) числа, I - единичная матрица (неприводимые представления определяются характерами d, z двух абелевых групп и собственными значениями двух операторов Казимира группы Лоренца).

---

*) Отметим, что в принципе с самого начала можно было бы выбрать в качестве индуцирующей группу P , так как фактор-пространства $SU(2,2/1)/C$ и $SU(2,2/1)/C_-$ образуют подпространства в $SU(2,2/1)/P$: $SU(2,2/1)/P = SU(2,2/1)/C \cdot C/P = SU(2,2/1)/C_- \cdot C_-/P$. В этом случае выделение физически интересных $SU(2,2/1)$-представлений достигается наложением дополнительных ковариантных по группе дифференциальных условий, устраняющих зависимость суперполей от координат фактор-пространств C/P и C_-/P . Соответствующие дифференциальные операторы в общем случае различны для групп C и C_- и строятся из ковариантных производных реализации $SU(2,2/1)/P$ (в случае индуцирования малой группой P $SU(2,2/1)$-генераторы могут быть выбраны ортонормальными по отношению к внутреннему произведению Картана).

Воспользовавшись результатами работ /4,8,9/, которые были посвящены построению $SU(2,2/1)$-представлений общего вида, индуцированных группами C и C_- , приведем выражения для $OSp^{II}(1,4)$-генераторов, выделенных из полного набора $SU(2,2/1)$-генераторов.

Для малой группы C $\left(OSp^{IIC}(1,4) \propto (M^C_{\mu\nu}, R^C_\rho(m), Q^{IIC}(m))\right)$ /9/:

$$M^C_{\mu\nu} = i(z_\mu\partial_\nu - z_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\bar\eta_+\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\eta_+} + \frac{1}{2}\bar\eta_-\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-} + J_{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} R^C_\mu(m) = {} & i\left(\frac{1-m^2z^2}{2}\delta^\nu_\mu + m^2 z_\mu z^\nu\right)\partial_\nu + \frac{m^2}{2}z^\rho\left(\bar\eta_+\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\eta_+} + \bar\eta_-\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-} + 2J_{\mu\rho}\right) + \\ & + \frac{im^2}{2}z_\mu\left(\bar\eta_+\frac{\partial}{\partial\bar\eta_+} + \bar\eta_-\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-} + 2d_c\right) - \frac{m^2}{2}\left(\bar\eta_-\eta_-\bar\eta_+\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-} + (d_c - \tfrac{3}{2}z_c)\bar\eta_+\gamma_\mu\eta_- - \tfrac{1}{2}\bar\eta_+\gamma_\mu\sigma^{\rho\lambda}\eta_- J_{\rho\lambda}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} Q^{IIC}(m) = {} & \frac{1}{\sqrt2}(1 + imz^\mu\gamma_\mu)\left(-\gamma^\nu\eta_+\partial_\nu + i\frac{\partial}{\partial\bar\eta_+} + i\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-}\right) - \frac{im}{\sqrt2}\left(\bar\eta_+\eta_+\frac{\partial}{\partial\bar\eta_+} + \bar\eta_-\eta_-\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-}\right) + \\ & + \frac{im}{\sqrt2}\bar\eta_-\gamma^\mu\eta_+\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\eta_-} + \frac{im}{2\sqrt2}\sigma^{\mu\nu}(\eta_+ + \eta_-)J_{\mu\nu} - \frac{im}{\sqrt2}(d_c - \tfrac{3}{2}z_c)\eta_- - \frac{im}{\sqrt2}(d_c + \tfrac{3}{2}z_c)\eta_+ . \end{aligned}$$

Для малой группы C_- $\left(OSp^{IIC_-}(1,4) \propto (M^{C_-}_{\mu\nu}, R^{C_-}_\rho(m), Q^{IIC_-}(m))\right)$ /4,8/:

$$M^{C_-}_{\mu\nu} = i(y_\mu\partial_\nu - y_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\bar\xi_+\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_+} + \frac{1}{2}\bar\xi_-\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} + J_{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} R^{C_-}_\mu(m) = {} & i\left(\frac{1-m^2y^2}{2}\delta^\nu_\mu + m^2 y_\mu y^\nu\right)\partial_\nu + \frac{m^2}{2}y^\rho\left(\bar\xi_+\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_+} + \bar\xi_-\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} + 2J_{\mu\rho}\right) + \\ & + \frac{im^2}{2}y_\mu\left(\bar\xi_+\frac{\partial}{\partial\bar\xi_+} - \bar\xi_-\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} + 2d_{c_-}\right) + \frac{m^2}{2}\bar\xi_+\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{IIC_-}(m) = {} & \frac{1}{\sqrt2}(1 + imy^\mu\gamma_\mu)\left(-\gamma^\nu\xi_+\partial_\nu + i\frac{\partial}{\partial\bar\xi_+}\right) - \frac{im}{\sqrt2}\bar\xi_+\xi_+\frac{\partial}{\partial\bar\xi_+} - \frac{i}{\sqrt2}(1 + imy^\mu\gamma_\mu)\bar\xi_-\xi_-\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} + \\ & + \frac{im}{\sqrt2}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} - \frac{im}{\sqrt2}\bar\xi_-\gamma^\mu\xi_+\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\xi_-} + \frac{i}{2\sqrt2}\left[(1 + imy^\mu\gamma_\mu)\sigma^{\rho\nu}\xi_- + m\sigma^{\rho\nu}\xi_+\right]J_{\rho\nu} + \\ & + \frac{i}{\sqrt2}(d_{c_-} - \tfrac{3}{2}z_{c_-})(1 + imy^\mu\gamma_\mu)\xi_- - \frac{im}{\sqrt2}(d_{c_-} + \tfrac{3}{2}z_{c_-})\xi_+ . \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $J_{\mu\nu}$ - матричная реализация генераторов группы Лоренца; z_μ, η_+, η_- и y_μ, ξ_+, ξ_- - координаты фактор-пространств (суперпространств) $SU(2,2/1)/C$ и $SU(2,2/1)/C_-$ *).

---

*) Генераторы (I5), (I6) отличаются от соответствующих генераторов из работ /4,8,9/ нормировкой и тем, что для γ-матриц используется другое представление. Координата z_μ связана с x_μ из работы /9/ соотношением $z_\mu = -\frac{1}{2}x_\mu + \frac{i}{2}\bar\eta_-\gamma_\mu\eta_+$. Индексы "+", "-" у грассмановых переменных различают левый и правый спиноры. Для удобства некоторые величины, характеризующие представления групп C и C_- , помечены индексами C и C_- .

$OSp(1,4)$-представления (I5), (I6) реализованы на суперполях общего вида – произвольных функциях координат соответствующих суперпространств с внешним лоренцевским индексом.

Нетрудно убедиться, что эти представления индуцированы группой Лоренца L, так как только генераторы $M_{\mu\nu}$ не сдвигают координат суперпространства. Фактор-пространства $OSp^{IIC}(1,4)/L$ и $SU(2,2/1)/C$, $OSp^{IIC_-}(1,4)/L$ и $SU(2,2/1)/C_-$ имеют одинаковую размерность. Кроме того, неприводимые инвариантные пространства группы $P \propto (M_{\mu\nu}, D, \Pi_5)$ являются неприводимыми и по отношению к группе Лоренца (представления абелевых масштабной и киральной групп одномерны). Таким образом, условия применимости ((А), (Б)) описанного в предыдущем разделе метода редукции $SU(2,2/1)$-представлений выполнены.

Следующий шаг – редукция $OSp^{II}(1,4)$-представлений (I5), (I6). Мы воспользуемся результатами наших работ /II,I2/, в которых эта задача была частично решена. Принятый в /I2/ базис для $OSp^{II}(1,4)$-генераторов отличается от (I5), (I6). В дальнейшем мы явно укажем связь между этими базисами.

В работах /II,I2/ методом последовательного индуцирования $OSp^{II}(1,4)/L = OSp^{II}(1,4)/A_- \cdot A_-/L$ с использованием полного набора операторов Казимира правой супергруппы Лоренца A_- мы нашли полный набор $OSp^{II}(1,4)$-представлений, индуцированных супергруппой A_- в инвариантных пространствах группы Лоренца. Соответствующие генераторы имеют вид ($OSp^{II}(1,4) \propto (M_{\mu\nu}, R_\rho(m), Q^{II}(m))$):

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta_+\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_+} + \frac{1}{2}\bar\theta_-\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_-} + J_{\mu\nu} \,,$$

$$R_\mu(m) = i\left(\frac{1-m^2x^2}{2}\delta_\mu^{\ \nu} + m^2x_\mu x^\nu\right)\partial_\nu + \frac{m^2}{2}x^\rho\left(\bar\theta_+\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_+} + \bar\theta_-\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_-} + 2J_{\mu\rho}\right),$$

$$Q^{II}(m) = \Lambda(x)\Big\{-a^{-1}(x)\gamma^\mu\theta_+\partial_\mu + i\left[1 - \frac{m}{2}\bar\theta_+\theta_+\left(1-\frac{3}{2}imx^\mu\gamma_\mu\right)\right]\frac{\partial}{\partial\bar\theta_+} + \tag{I7}$$

$$+\left(1+\frac{m}{2}\bar\theta_+\theta_+\right)\left[i\left(1-\frac{m}{2}\bar\theta_-\theta_-\right)\frac{\partial}{\partial\bar\theta_-} + \frac{im}{4}\sigma^{\mu\nu}\theta_- J_{\mu\nu}\right] + \frac{im}{4}(\sigma_{\mu\nu} + 4mx_\mu\gamma_\nu)\theta_+\left[\frac{1}{2}\bar\theta_-\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_-} + J^{\mu\nu}\right]\Big\},$$

где

$$a(x) = \frac{2}{1+m^2x^2}\,, \quad \Lambda(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{2}}\,(1 + imx^\mu\gamma_\mu)$$

и $x_\mu, \theta_+, \theta_-$ – координаты фактор-пространства (суперпространства) $OSp^{II}(1,4)/L$.

Эти генераторы реализованы на суперполях $\Phi^\pm_K(x,\theta_+,\theta_-)$, преобразующихся по внешнему индексу K по неприводимым конечномерным представлениям $D^{(p,q)}$ группы Лоренца (p,q – целые и полуцелые положительные числа):

$$\Phi^\pm_K(x,\theta_+,\theta_-) = P^\pm_K(x,\theta_+) + \bar\theta_-\left(Y^\pm_{(p,q)}N(x,\theta_+)\right)_K - \frac{m}{4}\bar\theta_-\theta_-[1\pm(1+2q)]P^\pm_K(x,\theta_+)\,, \tag{I8}$$

где $P^\pm_K(x,\theta_+)$, $N_{\alpha K}(x,\theta_+)$ – киральные суперфункции общего вида, а $Y^\pm_{(p,q)}$ – проекционный оператор, выделяющий лоренц-неприводимые (по внешним индексам) части из суперфункции $N_{\alpha K}(x,\theta_+)$:

$$Y^\pm_{(p,q)} = \pm\frac{1-i\gamma_5}{2}\,\frac{1}{2(1+2q)}\left[1 \pm (1+2q) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\right], \tag{I9}$$

$$\left(Y^\pm_{(p,q)}Y^\pm_{(p,q)} = Y^\pm_{(p,q)}\,; \qquad Y^\pm_{(p,q)}Y^\mp_{(p,q)} = 0\,;\; Y^+_{(p,q)} + Y^-_{(p,q)} = \frac{1-i\gamma_5}{2}\right).$$

Для каждого лоренцевского индекса $K = (p,q)$ и знака „+", „–" суперполя (I8) образуют инвариантные неприводимые пространства $OSp^{II}(1,4)$-представления (I7). Подчеркнем, что в строгом смысле слова суперполя (I8) заведомо неприводимы только относительно супергруппы Лоренца A_-. Неприводимость относительно $OSp^{II}(1,4)$ понимается здесь в том смысле, что из (I8) нельзя выделить $OSp^{II}(1,4)$-инвариантные подпространства локальным образом, т.е. путем перехода к некоторым новым переменным x', θ'_+, θ'_- (это связано с тем, что A_- и A_+ являются максимальными подгруппами супергруппы $OSp(1,4)$). Если возможна дальнейшая редукция суперполей (I8), то она может осуществляться уже только с помощью нелокальных проекционных операторов, построенных из операторов Казимира супергруппы $OSp(1,4)$ (аналогично процедуре, применяемой в пуанкаре-суперсимметрии /I0/). Наш метод в принципе применим и в случае полной редукции (см. разд.У).

Поскольку $OSp^{II}(1,4)$-представления (I5), (I6) и (I7) индуцированы одной и той же малой группой, должно существовать преобразование эквивалентности, связывающее эти наборы $OSp^{II}(1,4)$-генераторов. Знание этого преобразования необходимо для нахождения вида редуцированных суперполей (I8) в $OSp(1,4)$-базисах (I5), (I6).

Прямые вычисления показывают, что генераторы (I7) связанн с генераторами (I5), (I6) следующими преобразованиями:

$$\left\{OSp^{IIC}(1,4)\right\} = \varphi_C\left\{OSp^{II}(1,4)[x(z),\theta_+(z,\eta_+),\theta_-(z,\eta_+,\eta_-)]\right\}\varphi_C^{-1}\,, \tag{20}$$

$$\left\{OSp^{IIC_-}(1,4)\right\} = \varphi_{C_-}\left\{OSp^{II}(1,4)[x(y),\theta_+(y,\xi_+),\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)]\right\}\varphi_{C_-}^{-1}\,, \tag{21}$$

где

$$x_\mu(z)=z_\mu\,,\quad \theta_+(z,\eta_+)=\sqrt{a(z)}\,\eta_+\,,$$

$$\theta_-(z,\eta_+,\eta_-)=\sqrt{a(z)}\left(1+\frac{m}{2}a(z)\bar\eta_+\eta_+\right)\left(\eta_-+\frac{im^2}{2}a(z)z^\mu\gamma_\mu\eta_+\bar\eta_-\eta_-\right),$$

$$\begin{aligned}\varphi_c=[a(z)]^{d_c}&\left[1+\frac{m}{4}a(z)\left(d_c+\frac{3}{2}z_c\right)\bar\eta_+\eta_+\right]\left[1+\frac{m}{4}a(z)\left(d_c-\frac{3}{2}z_c\right)\times\right.\\ &\times\left(1+ma(z)\bar\eta_+\eta_+\right)\bar\eta_-\eta_--\frac{im^2}{2}a(z)\left(d_c-\frac{3}{2}z_c\right)z^\mu\bar\eta_+\gamma_\mu\eta_--\frac{m^4}{16}z^2a^2(z)\left(d_c-\frac{3}{2}z_c\right)\times\\ &\left.\times\left(d_c-\frac{3}{2}z_c-2\right)\bar\eta_+\eta_+\bar\eta_-\eta_-\right]\exp\left\{\frac{im^2}{4}a(z)z^\rho\,\bar\eta_+\gamma_\rho\sigma^{\mu\nu}\eta_-J_{\mu\nu}\right\}\end{aligned}\tag{20a}$$

и

$$x_\mu(y)=y_\mu\,,\quad \theta_+(y,\xi_+)=\sqrt{a(y)}\,\xi_+\,,$$

$$\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)=\frac{2}{m\sqrt{a(y)}}\left(1-\frac{m}{2}a(y)\bar\xi_+\xi_+\right)\left(\xi_--\frac{im^2}{2}a(y)y^\mu\gamma_\mu\xi_+\right),\tag{21a}$$

$$\varphi_{c_-}=[a(y)]^{d_{c_-}}\left[1+\frac{m}{4}a(y)\left(d_{c_-}+\frac{3}{2}z_{c_-}\right)\bar\xi_+\xi_+\right]\left[1-\frac{m}{4}\left(d_{c_-}-\frac{3}{2}z_{c_-}\right)\bar\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)\right].$$

Соответственно суперполя (I8) в базисах (I5), (I6) принимают вид:

$$\begin{aligned}\Phi^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+,\eta_-)&\equiv\left[\varphi_c\Phi^\pm[x(z),\theta_+(z,\eta_+),\theta_-(z,\eta_+,\eta_-)]\right]_\kappa=P^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+)+\bar\eta_-\left(Y^\pm_{(p,q)}N^c(z,\eta_+)\right)_\kappa+\\ &+\frac{m}{4}[a(z)]^{d_c+1}\left[d_c-\frac{3}{2}z_c-1\mp(1+2q)\right]\left\{P^\pm_\kappa\left[2miz^\mu\bar\eta_-\gamma_\mu\eta_++\left(1+\frac{m}{4}a(z)\bar\eta_+\eta_+\times\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\times\left(d_c+\frac{3}{2}z_c+4\right)\right)\bar\eta_-\eta_--\frac{m^3}{4}z^2a(z)\bar\eta_+\eta_+\bar\eta_-\eta_-\left(d_c-\frac{3}{2}z_c-1\pm(1+2q)\right)\right]+im\sqrt{a(z)}z^\mu\bar\eta_-\eta_-\bar\eta_+\gamma_\mu\left(Y^\pm_{(p,q)}N\right)_\kappa\right\},\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+,\xi_-)&\equiv\left[\varphi_{c_-}\Phi^\pm[x(y),\theta_+(y,\xi_+),\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)]\right]_\kappa=P^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+)+\bar\xi_-\left(Y^\pm_{(p,q)}N^{c_-}(y,\xi_+)\right)_\kappa-\\ &-\frac{m}{4}\bar\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)\theta_-(y,\xi_+,\xi_-)\left[d_{c_-}-\frac{3}{2}z_{c_-}+1\pm(1+2q)\right]P^\pm_\kappa[x(y),\theta_+(y,\xi_+)],\end{aligned}\tag{23}$$

где $P^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+)$, $N^c_{\alpha\kappa}(z,\eta_+)$ и $P^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+)$, $N^{c_-}_{\alpha\kappa}(y,\xi_+)$ – киральные суперфункции общего вида*), связанные с $P^\pm_\kappa(x,\theta_+)$, $N_{\alpha\kappa}(x,\theta_+)$ соотношениями:

$$N^c_\kappa(z,\eta_+)=[a(z)]^{d_c+1/2}\left[1+\frac{m}{4}a(z)\left(d_c+\frac{3}{2}z_c+2\right)\bar\eta_+\eta_+\right]\left[N_\kappa[x(z),\theta_+(z,\eta_+)]\pm\right.$$
$$\left.\pm m^2i\sqrt{a(z)}(1+2q)z^\mu\gamma_\mu\eta_+P^\pm_\kappa[x(z),\theta_+(z,\eta_+)]\right],$$

*) При получении соотношения (22) использовались проекционные свойства оператора $Y^\pm_{(p,q)}$ (I9) и тот факт, что последний множитель в выражении для функции φ_c (20a) на суперполях (I8), преобразующихся по внешнему индексу по представлениям $D^{(p,q)}$ группы Лоренца, имеет следующий вид:

$$\exp\left\{\frac{im^2}{4}a(z)z^\rho\bar\eta_+\gamma_\rho\sigma^{\mu\nu}\eta_-J_{\mu\nu}\right\}=1+\frac{im^2}{4}a(z)z^\rho\bar\eta_+\gamma_\rho\sigma^{\mu\nu}\eta_-J_{\mu\nu}+\frac{m^4}{4}z^2a^2(z)q(q+1)\bar\eta_+\eta_+\bar\eta_-\eta_-.$$

$$P^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+)=[a(z)]^{d_c}\left[1+\frac{m}{4}a(z)\left(d_c+\frac{3}{2}z_c\right)\bar\eta_+\eta_+\right]P^\pm_\kappa[x(z),\theta_+(z,\eta_+)]\,,$$

$$N^{c_-}_\kappa(y,\xi_+)=\frac{2}{m}[a(y)]^{d_{c_-}-1/2}\left[1+\frac{m}{4}a(y)\left(d_{c_-}+\frac{3}{2}z_{c_-}-2\right)\bar\xi_+\xi_+\right]N_\kappa[x(y),\theta_+(y,\xi_+)]\,,$$

$$\begin{aligned}P^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+)=[a(y)]^{d_{c_-}}&\left[1+\frac{m}{4}a(y)\left(d_{c_-}+\frac{3}{2}z_{c_-}\right)\bar\xi_+\xi_+\right]\left[P^\pm_\kappa[x(y),\theta_+(y,\xi_+)]+\right.\\ &\left.+im\sqrt{a(y)}y^\mu\bar\xi_+\gamma_\mu\left(Y^\pm_{(p,q)}N[x(y),\theta_+(y,\xi_+)]\right)_\kappa\right].\end{aligned}$$

Из явных выражений (22) и (23) для редуцированных суперполей в базисах (I5) и (I6) видно, что они не содержат нетривиальной зависимости от параметра m в том и только в том случае, если числа d_c и z_c, d_{c_-} и z_{c_-}, характеризующие представления малых групп C и C_-, связаны следующими соотношениями (условия исчезновения третьего слагаемого в правой части формул (22), (23)):

$$d_c-\frac{3}{2}z_c=1\pm(1+2q)\,,\tag{22a}$$

$$d_{c_-}-\frac{3}{2}z_{c_-}=-\left[1\pm(1+2q)\right].\tag{23a}$$

С учетом этих соотношений суперполя (22), (23) приобретают простой вид:

$$\Phi^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+,\eta_-)=P^{\pm c}_\kappa(z,\eta_+)+\bar\eta_-\left(Y^\pm_{(p,q)}N^c(z,\eta_+)\right)_\kappa\,,\tag{24}$$

$$\Phi^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+,\xi_-)=P^{\pm c_-}_\kappa(y,\xi_+)+\bar\xi_-\left(Y^\pm_{(p,q)}N^{c_-}(y,\xi_+)\right)_\kappa\,.\tag{25}$$

Эти суперполя ковариантны и относительно конформной супергруппы. Её представления определяются генераторами $Q^{IIc}(m)$ и $Q^{Ic}(m)=Q^{IIc}(-m)$, $Q^{IIc_-}(m)$ и $Q^{Ic_-}(m)=Q^{IIc_-}(-m)$, в которых числа d_c и z_c, d_{c_-} и z_{c_-} связаны соотношениями (22a), (23a). Полученные представления содержат все серии $SU(2,2/1)$-представлений, найденные в работах /1,4,7-9/, и следующие новые серии:

$$d_c-\frac{3}{2}z_c=1\pm(1+2q),\ q>0,\ p>0,\ \left(d_c+\frac{3}{2}z_c\right)\text{– произвольное число},\tag{22б}$$

$$d_{c_-}-\frac{3}{2}z_{c_-}=-2(1+q),\ q>\frac{1}{2},\ p\geq 0,\ \left(d_{c_-}+\frac{3}{2}z_{c_-}\right)\text{– произвольное число}.\tag{23б}$$

Серия (23б) соответствует выбору знака "+" в (23a). В работе /8/ был найден весь спектр представлений, отвечающих знаку "–" в

(23а), и только два представления (с $q=0$, $q=1/2$) при знаке "+".

Таким образом, мы построили полный набор допускающих редукцию представлений супергруппы $SU(2,2/1)$, реализованных на суперполях типа $\Phi_\kappa(x,\theta_+,\theta_-)$, и нашли общую структуру соответствующих неприводимых $SU(2,2/1)$-инвариантных пространств. Если числа d_c и z_c, d_{c_-} и z_{c_-} не связаны соотношениями (22а), (23а), то отвечающие им $SU(2,2/1)$-представления неприводимы (в определенном выше локальном смысле) и их инвариантные пространства не содержат $SU(2,2/1)$-инвариантных подпространств (т.е. являются суперполями общего типа).

Интересно отметить (см. также /9/), что одно из первых представлений конформной супергруппы, найденных в литературе, - векторный мультиплет Весса-Зумино /1/, соответствует представлению с $z_c=p=q=0$ и произвольным d_c ($d_c=2(n-1)$, где n - введенный в /1/ вес мультиплета). Из соотношения (22а) следует, что при $d_c = 0,2$ ($n = 1,2$) векторный мультиплет содержит инвариантные подпространства.

Некоторые из построенных $SU(2,2/1)$-представлений, индуцированных малой группой C, могут оказаться эквивалентными $SU(2,2/1)$-представлениям, индуцированным малой группой C_-. Для начала будем искать их среди представлений, индуцированных одними и теми же представлениями малых групп C и C_-. Для таких представлений связи, налагаемые соотношениями (22а) и (23а), должны совпадать. Это возможно лишь при выборе знака "-" в (22а), (23а) и $q=0$, т.е. при $d_c = d_{c_-} = \frac{3}{2}z_c = \frac{3}{2}z_{c_-}$. В этом случае суперполя преобразуются в группе Лоренца по представлениям $D^{(p,0)}$ и имеют вид:

$$\Phi_\kappa^{-c}(z,\eta_+,\eta_-) = \rho_\kappa^{-c}(z,\eta_+) \,, \qquad (26)$$

$$\Phi_\kappa^{-c_-}(y,\xi_+,\xi_-) = \rho_\kappa^{-c_-}(y,\xi_+) \qquad (27)$$

(второе слагаемое в правой части выражений (24), (25) обращается в нуль, так как для представлений $D^{(p,0)}$ генератор $J_{\mu\nu}$ содержит проектор $\frac{1+i\gamma_5}{2}$ и $(\sigma^{\mu\nu}\frac{1+i\gamma_5}{2})_{\alpha\beta}\cdot(\sigma_{\mu\nu}\frac{1-i\gamma_5}{2})_{\gamma\delta}=0$).

Нетрудно проверить, что $OSp^{IIc}(1,4)$ и $OSp^{IIc_-}(1,4)$-генераторы, реализованные на суперполях (26) и (27), совпадают, т.е. эти представления эквивалентны.

В работах /11,12/ мы показали, что суперполями (26), (27) и

реализованными в них $OSp^{II}(1,4)$-представлениями исчерпываются все возможные левые киральные представления супергруппы $OSp^{II}(1,4)$. Поэтому и для конформной супергруппы левые киральные представления возможны лишь для суперполей, преобразующихся в группе Лоренца по представлениям $D^{(p,0)}$ при связях $d_c=\frac{3}{2}z_c$ ($d_{c_-}=\frac{3}{2}z_{c_-}$). Первое киральное $SU(2,2/1)$-представление (скалярное) было найдено в работе /1/. Введенный там вес скалярного мультиплета n связан с d_c следующим образом: $d_c=2n$.

Значительно сложнее получить ответ на вопрос об эквивалентности (или неэквивалентности) некиральных $SU(2,2/1)$-представлений ($d\neq\frac{3}{2}z$), индуцированных малыми группами C и C_-. В общем случае для этого необходимо показать существование (или несуществование) преобразования эквивалентности, приводящего генераторы $Q^{Ic}(m)$, $Q^{IIc}(m)$, реализованные на суперполях $\Phi_\kappa^{\pm c}(z,\eta_+,\eta_-)$, к виду, совпадающему с видом генераторов $Q^{Ic_-}(m)$, $Q^{IIc_-}(m)$, реализованных на суперполях $\Phi_\kappa^{\pm c_-}(y,\xi_+,\xi_-)$. Нам пока не удалось решить эту задачу полностью.

У. Мы описали простой метод построения физически интересных редуцированных $SU(2,2/1)$-представлений и построили некоторые из них. В заключение подчеркнем, что этим способом может быть построен полный набор физически интересных неприводимых $SU(2,2/1)$-представлений (критерий неприводимости указан в конце разд.Ш). Для этого необходимо найти полный набор $OSp(1,4)$-представлений (как неприводимых, так и приводимых, так как неприводимое $SU(2,2/1)$-представление может быть приводимым по группе $OSp(1,4)$), индуцированных группой Лоренца. Задача построения неприводимых $OSp(1,4)$-представлений в принципе, может быть полностью решена так же, как и в случае пуанкаре-суперсимметрии /10/. Ее решение сведется к нахождению спектра операторов Казимира супергруппы $OSp(1,4)$ и к построению с их помощью проекционных операторов, выделяющих неприводимые части из приводимого представления (структура операторов Казимира супергруппы $OSp(1,4)$ найдена в работе /15/). Приводя $OSp(1,4)$-генераторы к виду, совпадающему с видом $OSp(1,4)$-генераторов в базисе (3), и отбирая минимальный набор $OSp(1,4)$-инвариантных пространств (как приводимых, так и неприводимых), не содержащих нетривиальной зависимости от параметра m, мы тем самым перечислим все неприводимые $SU(2,2/1)$-инвариантные пространства (в классе суперфункций $\Phi_\kappa(x,\theta_+,\theta_-)$). К этой задаче мы надеемся вернуться в дальнейшем.

Мы благодарны В.С.Ванятину, В.И.Огиевецкому и особенно В.В.Молоткову за плодотворные обсуждения.

Литература

I. Wess J., Zumino B. Nucl.Phys., 1974, B70, 39.
2. Ferrara S. Nucl.Phys., 1974, B77, 73.
3. Дао Вонг Дык. ТМФ, 1975, 24, 49.
Анева Б.Л., Михов С.Г., Стоянов Д.Ц. ТМФ, 1978, 35, 162.
4. Молотков В.В., Петрова С.Г., Стоянов Д.Ц. ТМФ, 1976, 26, 188.
5. Kaku M., Townsend P.K., P. van Nieuwenhuizen. Phys.Rev., 1978, D17, 317.
Ferrara S., Grisaru M.T., P. van Nieuwenhuizen. Nucl.Phys., 1978, B138, 430.
Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. ЯФ, 1978, 28, 1631.
6. Freund P.G.O. Annals of Phys., 1974, 84, 440.
Kallosh R.E. Phys.Lett., 1975, B55, 321.
Englert F., Truffin C., Gastmans R. Nucl.Phys., 1976, B117, 407.
Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. Phys.Lett., 1978, B73, 209.
7. Dondi P.H., Sohnius M. Nucl.Phys., 1974, B81, 317.
8. Анева Б.Л., Михов С.Г., Стоянов Д.Ц. ТМФ, 1977, 31, 177.
9. Молотков В.В., Петрова С.Г. Сообщения ОИЯИ, 1976, Р2-10126; 1976, Р2-10127.
10. Sokatchev E. Nucl.Phys., 1975, B99, 96.
11. Ivanov E.A., Sorin A.S. Preprint JINR, 1979, E2-12363, Dubna.
12. Ivanov E.A., Sorin A.S. Preprint JINR, 1979, E2-12364, Dubna.
13. Иванов Е.А., Сорин А.С. ТМФ, 1979, 39, 172;
Препринт ОИЯИ, 1978, Е2-11610, Дубна.
14. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys.Rev., 1969, 177, 2239.
Callan C.G., Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys.Rev., 1969, 177, 2247.
Волков Д.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, 3.
Ogievetsky V.I. Proc. X-th Winter School of Theor.Phys. in Karpacz, 1974, 1, 117.
15. Bednář M., Šachl V. J.Math.Phys., 1978, 19, 1487.
Keck B.W. Journ. of Phys., 1975, A8, 1819.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1979 года.