сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12642

Х.М.Бештоев

ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ
И ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ

1979

P2 - 12642

Х.М.Бештоев

ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ
И ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ

Бештоев Х.М.

P2 - 12642

Изотопическая инвариантность и правила сумм для сечений

Рассматривается метод получения правила сумм для амплитуд, сечений и дефференциальных сечений в инклюзивных и эксклюзивных процессах на основе изотопической инвариантности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P2 - 12642

Beshtoev Ch.M.

Isotopic Invariance and Sum Rules for Cross Sections

A method of derivation of sum rules for amplitudes, cross sections and differential cross sections in inclusive and exclusive processes is considered on the basis of isotopic invariance.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Группа изотопической инвариантности является одной из фундаментальных групп симметрии физики сильных взаимодействий, и точные соотношения, вытекающие из этой инвариантности, представляют большой интерес. Соотношения для эксклюзивных и инклюзивных сечений, вытекающие из изотопической инвариантности, рассматривались в работах [1,2]. В данной работе обсуждается общий метод получения изотопических соотношений для амплитуд, дифференциальных сечений и сечений в инклюзивных и эксклюзивных процессах.

Рассмотрим реакцию

$$a_1 + a_2 \to a_3 + a_4 + \ldots + a_n . \qquad /1/$$

Будем предполагать, что частицы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат определенным SU_2 представлениям с изотопическими спинами I_b и имеют третьи проекции изотопических спинов I_{3b} $(b = 1 \div n)$.

Изотопические функции этих частиц обозначим

$$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n \qquad \sum_{b=3}^{n} I_{3b} = I_{31} + I_{32} , \qquad /2/$$

где $\Psi_b = \Psi_{I_b I_{3b}}(\alpha, \alpha)$ - векторы неприводимых представлений группы SU_2 с изотопическими спинами I_b. α, γ - параметры векторов неприводимых представлений группы SU_2 и $0 < \alpha \leq \pi$, $0 < \gamma \leq 2\pi$.

Амплитуда $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ этой $n-2$-частичной реакции является изотопическим скаляром

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\Psi_1 \Psi_2, \; B(a_1, \ldots, a_n) \Psi_3^+ \Psi_4^+ \Psi_5^+ \ldots \Psi_n^+) . \qquad /3/$$

$B(a_1,...,a_n)$ содержит информацию об импульсно-энергетических, угловых и других характеристиках.

Исходя из параметрического представления неприводимых представлений группы SU_2, свяжем между собой амплитуды реакции /1/, в которых участвуют частицы с противоположными значениями проекции изотопических спинов. Для этого выберем, в случае целого спина, половинные $D^{I_b}_{I_{3b}0}(\alpha,\gamma)$ D - функции Вигнера в качестве векторов неприводимых представлений и используем свойства D -функции [3]

$$D^{I_b}_{I_{3b}0}(\alpha,\gamma) = (-1)^{I_{3b}} \exp(2i \cdot I_{3b}\cdot\gamma)\, D^{I_b}_{I_{3b}0}(\alpha,\gamma). \qquad /4/$$

Для полуцелого спина используем формулу [3]:

$$\Psi_{II_3}(\alpha,\gamma) = \sum_{I_3'} D^{I}_{I_3 I_3'}(\gamma,\alpha,\gamma)\,\Psi_{II_3'}(\alpha,\gamma) =$$
$$= (-1)^{I+I_3} \exp(2i\, I_3\cdot\gamma)\,\Psi_{I-I_3}(\alpha,\gamma). \qquad /5/$$

Подставляя /4/ и /5/ в /3/, получаем /учитывая эрмитово сопряжение/

$$f(I_1 I_{31}, I_2 I_{32}, \dots I_n I_{3n}) = f(I_2 - I_{31}, \dots, I_n - I_{3n}). \qquad /6/$$

Для получения соотношений между амплитудами $f(I_1 I_{31}, I_2 I_{32},\dots,I_n I_{3n})$ реакции /1/ при различных значениях проекции изотопических спинов $I_{31},\dots,I_{3n}$, воспользуемся теоремой о существовании единственного инварианта [4] ω

$$\omega = \sum_{i\ell} C_{i\ell}\, x_i\, y^{\ell} = C \sum_i x_i\, y^i$$
$$C_{i\ell} = C\cdot\delta_{i\ell}, \qquad /7/$$

где x_i, y^e образуют дуальные векторные пространства неприводимого представления с одинаковыми размерностями [5].
В выражении /7/ $C_{ik} = (\Psi^i_b, \Psi^{k+}_b)$ и

$$(\Psi^i_b, \Psi^i_b) = (\Psi^{\ell}_b, \Psi^{\ell}_b) \qquad /8/$$

i, k характеризуют проекции представления с изотопическим спином I_b. Эту теорему мы не можем применить прямо к амплитуде $f(I_2 I_{31}, \ldots, I_n I_{3n})$, так как она содержит n -проекций изотопических спинов. $f(I_1 I_{31}, I_2 I_{32}, \ldots, I_n I_{3n})$ содержит также информацию о всех других характеристиках реакции /1/, кроме изоспиновых, но эти характеристики являются идентичными для всех частиц, принадлежащих одному изотопическому мультиплету. Поэтому наличие постоянного множителя не отражается на получаемых соотношениях.

Если мы выбираем частицу b с I_b, I_{3b} и хотим использовать выражение /8/ ,то должны произвести суммирование по всем допустимым проекциям $I_{31}, \ldots, I_{3(n-1)}$ других изотопических спинов

$$B^i(b, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{I_{31} \ldots I_{3(n-1)}} f(b^i, I_1 I_{31}, \ldots, I_n I_{3n}) =$$

$$= (\Psi^i_b, \Phi^{i+}_b(a_1, a_2, \ldots, a_n)), \qquad /9/$$

т.е. суммирование производится по всем проекциям изотопических спинов за исключением I_{3b},при условии $I_{3b} = -\sum_{c=3}^{n-1} I_{3c} + I_{31} + I_{32}$. Изотопическая скалярность амплитуды /3/ свидетельствует о том,что изотопическая часть функции $\Phi^{i+}_b(a_1, \ldots)$ будет функцией эрмитово-сопряженной с Ψ^i_b . Таким образом, мы получаем соотношение для амплитуды реакции

$$(\Psi^i_b, \Phi^{i+}_b(a_1, \ldots, a_n)) = (\Psi^\ell_b, \Phi^{\ell+}_b(a_2, \ldots, a_n))$$

$$B^i(b, a_1, \ldots, a_{n-1}) = B^\ell(b, a_1, \ldots, a_{n-1}). \qquad /10/$$

Для получения соотношений между квадратами модулей амплитуд или дифференциальных сечений, введем функцию $c^i(b\alpha\gamma_1, a_1\alpha\gamma_2, \ldots, a_{n-1}\alpha\gamma_n)$, которая при $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$

$$\frac{1}{4\pi} \int c^i(b\alpha\gamma, a_1\alpha\gamma, \ldots, a_{n-1}\alpha\gamma) \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\gamma = B^i(b, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

$$/11/$$

Так как $\sum_{c=3}^{n} I_{3c} = I_{31} + I_{32}$, то

$$B^{i}(b\gamma, a_2\gamma, \dots, a_{n-2}\gamma) = B^{i}(b, a_1, \dots, a_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int c^{i}(b\alpha\gamma, \dots, a_{n-1}\alpha\gamma)\sin\alpha\, d\alpha \qquad /12/$$

и

$$\int |C^{i}(b\gamma_1, a_1\gamma_2, \dots, a_{n-1}\gamma_n)|^2 \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d\gamma_j}{2\pi}\right) =$$

$$= \sum_{I_{31}\dots I_{3(n-1)}} |f(b^{i}, I_1 I_{31}, \dots, I_n I_{3n})|^2 = F^{i}(b, a_1, \dots, a_{n-1}) =$$

$$F^{\ell}(b, a_1, \dots, a_{n-1}), \qquad /13/$$

т.е. благодаря ортогональности изотопических функций в /13/ отсутствуют интерференционные члены. Например, в реакции $\pi^{\pm}p \to$ все, $\pi^{0}p \to$ все, $\pi^{\pm}n \to$ все, $\pi^{0}n \to$ все, если выбрать пионное представление и использовать /13/, получаем известное соотношение [1].

$$\sigma_{tot}(\pi^{+}p) + \sigma_{tot}(\pi^{-}p) = 2\sigma_{tot}(\pi^{0}p). \qquad /14/$$

Учет тождественности частиц при начальных и конечных состояниях нужно производить реально. Исходя из требования нормировки [6] в случае, когда в системе $n-2$ частиц содержатся частицы, идентичные выбранной частице b^{i}, кратность нужно учесть с помощью коэффициента $\sqrt{n_{I_{3b}}}$. Для квадратов амплитуд реакции получаем коэффициенты n^{i}_{b}:

$$\sum_{I_{31}\dots I_{3(n-1)}} n^{i}_{b} F^{i}(b, a_2, \dots, a_{n-2}) = \sum_{I'_{31}\dots I'_{3(n-1)}} n^{\ell}_{b} F^{\ell}(b, a_1, \dots, a_{n-1}). \qquad /15/$$

Например, для реакции

$$p\bar{p} \to 2\pi^{+}2\pi^{-} \qquad \sigma_1$$
$$\pi^{+}\pi^{-}2\pi^{0} \qquad \sigma_2$$
$$4\pi^{0} \qquad \sigma_3$$

имеем $2\sigma_1 = \sigma_2 + 4\cdot\sigma_3$.

При получении этого соотношения суммирование по всевозможным начальным состояниям не производилось, было выбрано состояние $I_3(p\bar{p})=0$.

Отметим, что, если в выражении /15/ произвести суммирование по всем n, то можно получить правило сумм по одночастичным инклюзивным сечениям /2/:

$$F^{i}(b)=\sum_{n=2}^{\infty}F^{1}(b,a_1,\ldots,a_{n-1})$$
$$F^{1}(b)=F^{\ell}(b), \qquad /16/$$

где произведено суммирование по всевозможным начальным состояниям /пример pp , pn , np , nn / или, если третья проекция начального состояния равна нулю, то суммирование не производится и рассматривается один процесс (pn).

Полученные формулы можно применить для получения правил сумм /соотношений/ для любых реакций:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n, \text{ где } k=1\div(n-1). \qquad /17/$$

Таким образом, мы рассмотрели метод получения правила сумм по амплитудам /10/, дифференциальным сечениям и сечениям /15/ в инклюзивных и эксклюзивных процессах исходя из изотопической инвариантности. Этот метод можно использовать для получения правила сумм по сечениям для частиц, принадлежащих конечномерным представлениям групп высших симметрий (U_n, SU_n ....).

Автор выражает глубокую благодарность В.А.Матвееву, А.Н.Сисакяну за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И.Т. УФН, 1966, 88, с. 51, Шмушкевич И. Доклады АН СССР, сер.физ., 1955, 103, с. 235; Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. Атомиздат, М., 1967.*
2. Llewellyan-Smith C.H., Paus A. Phys.Rev.Lett., 1972, 28, p.865.
Копылов Г.Н., Подгорецкий М.И. ЯФ, 18, с. 656, 1973. Гришин В.Г. ЯФ, 1973, 17, с. 134.

Kyriakopoulos E. Nuovo Cim., 1974, 20A, p.537; 1974, 20A,p.559.
p.537,559.
3. Эдмонде А.Р. Деформация атомных ядер. М., 1958.
Юцис А.П., Бандзайтис А.А. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, 1977.
4. Ван-дер-Варден Б.Л. Методы теории групп в квантовой механике. Харьков, 1938.
5. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения в квантовомеханической теории атомных спектров. ИЛ, 1962.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1979 года.