сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна





Р2 - 12572

Л.Мезинческу

# О СУПЕРПОЛЕВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ 0(2) - СУПЕРСИММЕТРИИ

1979

P2 - 12572

Л.Мезинческу

# О СУПЕРПОЛЕВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ 0(2) - СУПЕРСИММЕТРИИ

Пуанкаре двумя спинорными зарядами

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\lambda} L_{\nu\sigma} - (\lambda \leftrightarrow \sigma))$$

$$[L_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i\eta_{\mu\lambda} P_\nu + i\eta_{\nu\lambda} P_\mu \tag{2.I}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$
$$[L_{\mu\nu}, S^i_\alpha] = -\tfrac{i}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta S^i_\beta$$
$$[L_{\mu\nu}, \bar S_{\dot\alpha i}] = \tfrac{i}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \bar S_{\dot\beta i}$$
$$\{S^i_\alpha, \bar S_{\dot\beta j}\} = 2\delta^i_j (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} P^\mu. \tag{2.2}$$

К этой алгебре можно присоединить генераторы алгебры $SU(2)$, вращающие спинорные заряды

$$[\vec T, S^i_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\vec\tau)^i{}_j S^j_\alpha$$
$$[\vec T, \bar S_{\dot\alpha i}] = -\tfrac{1}{2}(\vec\tau)_i{}^j \bar S_{\dot\alpha j}$$
$$[T_m, T_n] = i\epsilon_{mnp} T_p . \tag{2.3}$$

Это полезно делать , потому что состояния с $m \geqslant 0$ , полученные при повторном действии $S^i_\alpha$ на клиффордов вакуум, имеют квантовые числа в соответствии с представлением группы $SU(2)$. Например, массивные представления с наивысшим спином I,2 строятся из клиффордова вакуума, скалярного относительно $SU(2)$, и содержат следующие состояния:

$$|0\rangle_0 ; |\tfrac12\rangle_{\frac12} ; |1\rangle_0 ; |0\rangle_1 ; |\tfrac12\rangle_{\frac12} ; |0\rangle_0$$
$$|1\rangle_0 ; |\tfrac12\rangle_{\frac12} ; |\tfrac32\rangle_{\frac12} ; |2\rangle_0 ; |1\rangle_0 ; |0\rangle_0 ; |1\rangle_1 ; |\tfrac12\rangle_{\frac12} ; |\tfrac32\rangle_{\frac12} ; |1\rangle_0 . \tag{2.4}$$

Аналогично, для безмассовых представлений с наивысшими спиральностями I,2:

$$|0\rangle_0 ; |\tfrac12\rangle_{\frac12} ; |1\rangle_0$$
$$|1\rangle_0 ; |\tfrac32\rangle_{\frac12} ; |2\rangle_0 , \tag{2.5}$$

где в скобках обозначены спины (спиральности), а внизу - изоспины.



Алгебру (2-2) можно реализовать в суперпространстве $(x, \theta^\alpha_i, \bar\theta^{\dot\alpha i})$ с двумя антикоммутативными вейлевскими биспинорами $\theta^\alpha_i$ и их сопряженными $\bar\theta^{\dot\alpha i}$ . В суперпространстве определяются ковариантные спинорные производные

$$D^i_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_i} + i(\hat\partial\bar\theta)^i_\alpha , \quad \bar D_{\dot\alpha i} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha i}} - i(\theta\hat\partial)_{\dot\alpha i} , \tag{2.6}$$

которые антикоммутируют со спинорными генераторами $S^i_\alpha$ и удовлетворяют соотношению

$$\{D^i_\alpha, \bar D_{\dot\alpha j}\} = 2\delta^i_j (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} P^\mu . \tag{2.7}$$

В суперпространстве $(x, \theta^\alpha_i, \bar\theta^{\dot\alpha i})$ определяются суперполя $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$, и наша главная задача - изучить уравнения движения в терминах суперполей для упомянутых выше супермультиплетов (2.5).

Алгебру (2-3) можно реализовать в суперпространстве путем вращения грассмановых переменных. Например, скалярное суперполе с изовекторным индексом преобразуется как

$$V_m(x,\theta,\bar\theta) \to \left(e^{i\vec\alpha\vec\tau}\right)_{mn} V_n(x,\theta',\bar\theta')$$
$$\theta' = \left(e^{i\vec\alpha\vec\tau}\right)_i{}^j \theta_j . \tag{2.8}$$

Для обычной суперсимметрии установлен следующий факт /4/: суперполе $\Phi_A(x,\theta,\bar\theta)$ с внешним спином A содержит неприводимые представления суперсимметрии, которые можно получить при действии спинорных генераторов на клиффордов вакуум $|A\rangle$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что аналогичное утверждение имеет место для расширенной $O(2)$- суперсимметрии - суперполе $\Phi_{A,\ell}(x,\theta,\bar\theta)$ с внешним спином $A$ и изоспином $\ell$ содержит те представления $O(2)$ - расширенной суперсимметрии, которые могут быть получены при действии спинорных генераторов на клиффордов вакуум с квантовыми числами $|A, \ell\rangle$ .

## 3. Препотенциалы для $O(2)$ - расширенного электромагнитного супермультиплета

Гриммом, Зониусом и Вессом /2/ установлено, что супермультип-

Р2 - 12572

Мезинческу Л.

О суперполевой формулировке $O(2)$ - суперсимметрии

Сделана попытка изучить явно суперполевые выражения модели теории поля, инвариантной относительно $O(2)$-расширенной суперсимметрии. Показано, что для описания супермультиплетов с наивысшим спином 1 и 2 придется работать с такими суперполями, которые одновременно содержат более высокие суперспины.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P2 - 12572

Mesinchecku L.

On the Superfield Formulation of $O(2)$- Supersymmetry

The superfield content of a simple field theory model invariant under $O(2)$-extended supersymmetry is analyzed. It is found that for the description of $O(2)$- supermultiplets with highest spins 1 and 2 superfields of higher superspins are needed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979



## I. Введение

В этой работе сделана попытка изучить явно суперполевые выражения модели теории поля, инвариантной относительно $O(2)$-расширенной суперсимметрии /1/.

Анализируются свободные уравнения движения для двух интересных супермультиплетов: $O(2)$-суперсимметричного электромагнитного и гравитационного полей, т.е. $O(2)$-супермультиплетов с наивысшим спином I , 2 .

Мы покажем, что для описания этих супермультиплетов придется работать с такими суперполями, которые одновременно содержат более высокие суперспины, даже если для обоих случаев, указанных выше, существуют суперполя, которые содержат данные спины в качестве наивысших.

В первом разделе мы повторяем нужные сведения об $O(2)$ - расширенной суперсимметрии.

Во втором разделе анализируем свободные уравнения для $O(2)$ супермультиплета с наивысшим спином I /2/ и устанавливаем, что он описывается общим псевдоскалярным суперполем с изовекторным индексом $\vec{U}(x,\theta,\bar{\theta})$. Мы находим калибровочный произвол этих уравнений и условие сохранения "суперэлектромагнитного тока".

В третьем разделе изучается уравнение для супермультиплета с наивысшим спином 2. Поскольку это уравнение неизвестно, мы действуем следующим образом: берем общее скалярное суперполе, которое содержит в качестве наивысшего спин 2, и требуем, чтобы это суперполе удовлетворяло такому уравнению движения, которое было бы совместимо с условием сохранения $O(2)$-супертока, написанным Зониусом /3/. Показано, что такие уравнения движения не могут существовать, и сделано предположение, что $O(2)$-супергравитация должна описываться аксиальным суперполем с изовекторным индексом $\vec{H}_{\mu}(x\theta\bar{\theta})$. В этом разделе мы исследуем также суперток для безмассового супермультиплета с наивысшим спином I и анализируем содержание супертока Зониуса по представлениям $O(2)$-суперсимметрии.

В приложении А объясняются обозначения и дается сводка некоторых полезных формул, в приложении Б анализируются условия Гримма, Зониуса и Весса /2/ (ГЗВ) для $O(2)$ -суперсимметричных калибровочных теорий.

## 2. $O(2)$ - расширенная суперсимметрия

$O(2)$-расширенная суперсимметрия /1/ - это расширение алгебры плет, соответствующий $O(2)$ - суперсимметричному расширению электромагнитного поля, описывается скалярным киральным суперполем $W(x,\bar\theta)$ в качестве напряженности. Аналогично тому, как обычная напряженность $F_{\mu\nu}$ свободного электромагнитного поля должна удовлетворять уравнению Максвелла

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\nu F_{\lambda\sigma} = 0 \tag{3.1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.2}$$

$O(2)$ - напряженность $W(x,\bar\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$D\vec\tau D\bar W - \bar D\vec\tau\bar D\, W = 0 \tag{3.3}$$

$$D\vec\tau D\, W + \bar D\vec\tau\bar D\, W = 0. \tag{3.4}$$

Мы будем решать уравнения (3.3) в терминах суперполей и таким образом получим выражение для препотенциалов /5/, описывающих $O(2)$ -расширенный электромагнитный супермультиплет (аналогично тому, как решение уравнения (3.I) выражает напряженность $F_{\mu\nu}$ через электромагнитные потенциалы $A_\mu$ ).

Из кирального характера $W(x,\bar\theta)$ следует, что

$$W(x,\bar\theta) = D\vec\tau D\, D\vec\tau D\;\; U(x,\theta,\bar\theta), \tag{3.5}$$

где $U(x,\theta,\bar\theta)$ - общее скалярное суперполе. С другой стороны, поскольку размерность электромагнитного поля в $W$ закреплена, и мы ищем решение уравнения (3.3) с наименьшим внешним лоренцевым индексом, единственно возможная форма решения

$$U = \bar D\vec\tau\bar D\;\vec V(x,\theta,\bar\theta). \tag{3.6}$$

Используя следующее тождество



$$D\tau^i D\,\bar D\vec\tau\bar D\,\bar D\vec\tau\bar D\,D\tau^i D - \bar D\tau^i\bar D\,D\vec\tau D\,D\vec\tau D\,\bar D\tau^i\bar D = 0, \tag{3.7}$$

можно убедиться, что (3.5) вместе с (3.6) является решением уравнения (3.3), если $\vec V$ - действительное суперполе

$$\vec V^{\dagger}(x,\theta,\bar\theta) = \vec V(x,\theta,\bar\theta). \tag{3.8}$$

Таким образом, решение уравнения (3.3) не имеет внешнего лоренцева индекса (как в обычной суперсимметрии), но по сравнению с обычной суперсимметрией появляется внешний изовекторный индекс.

Появление этого индекса можно понимать следующим образом. Киральное суперполе, которое преобразуется ковариантно относительно (2-3), не содержит в разложении по $\theta$ , $(\bar\theta)$ векторного потенциала $A_\mu$ ( который должен описывать электромагнитное поле). Поэтому общее скалярное суперполе $U(x,\theta,\bar\theta)$ не может описывать нужное решение, так как оно содержит представление с наивысшим спином I в качестве кирального суперполя. С другой стороны, как нетрудно убедиться, суперполе $\vec V(x,\theta,\bar\theta)$ не содержит представления с наивысшим спином I, в качестве кирального суперполя. Как было показано выше, из (3. 5-8) следует, что с помощью $\vec V$ можно построить решение уравнения (3.3). Подстановка (3.5-8) в (3.4) дает уравнение движения для суперполя $\vec V$ . Оно может быть получено путем вариации действия

$$S = a\int d^4\theta\, d^4x\left(D\vec\tau D\, D\vec\tau D\;\bar D\tau^k\bar D\; V^k\right)^2, \tag{3.9}$$

и можно установить, что оператор

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{16\Box^2}\left(D\tau_i D\;\bar D\vec\tau\bar D\,\bar D\vec\tau\bar D\;D\tau_k D + \bar D\tau_i\bar D\;D\vec\tau D\,D\vec\tau D\;\bar D\tau_k\bar D\right) \tag{3.10}$$

есть проекционный оператор

$$\Pi_{ik}\Pi_{kl} = \Pi_{il}. \tag{3.11}$$

Теперь найдем калибровочную свободу этих уравнений. Как во всех известных случаях, это делается путем решения уравнения

$$W(x,\bar\theta) = 0. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что к суперполю $\vec U$ можно добавить любое суперполе вида

$$\delta V^{k} = D^{i}_{\alpha}\left(\delta^{k}_{e} + \frac{i}{2}\epsilon^{kme}\tau_m\right)_i{}^{j} \chi^{\alpha}_{e j}, \qquad (3.13)$$

где $\chi^{\alpha}_{ej}$ - спинорное суперполе с изовекторным индексом.

Эта калибровочная свобода достаточна для того, чтобы перейти в калибровку Весса и Зумино для суперполя $\vec{V}$, т.е. исключить все компоненты, кроме

$$\begin{aligned} V^{k} = {} & \theta\tau^{k}\theta\ \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ C + h.c. \\ & + \theta\vec\tau\theta\ \theta\vec\tau[\tau^{k}\sigma_{m}V^{m}]\vec\tau\bar\theta + \\ & + \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ (\chi\tau^{k}\vec\tau\bar\theta)(\bar\theta\vec\tau\bar\theta) + h.c. \\ & + \theta\vec\tau\theta\ \theta\vec\tau\theta\ \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ \bar\theta\vec\tau\bar\theta\ D^{k}. \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Можно доказать, что такое суперполе дает правильные уравнения движения для полей $C$, $A^{m}$, $\chi^{i}$, которые должны описывать изучаемый супермультиплет, а $D^{k}$ - вспомогательное поле. Можно также доказать следующее тождество:

$$\left(\delta^{ij} - \frac{i}{2}\epsilon^{imj}\tau_m\right) D \cdot \Pi_{jk} \equiv 0. \qquad (3.15)$$

Оно дает условие сохранения "тока", с которым $\vec{V}$ может взаимодействовать. Уравнения движения в первом порядке по константе взаимодействия должны иметь вид

$$\Box^{2}\Pi_{ij}V^{j} = J_i. \qquad (3.16)$$

Из (3.15) следует, что $J_i$ должен удовлетворять следующим условиям сохранения:

$$\left(\delta^{ij} - \frac{i}{2}\epsilon^{imj}\tau_m\right) D J_j = 0. \qquad (3.17)$$

Такой ток можно, действительно, построить из супермультиплета материи, являющегося представлением $m > 0$ соответствующей мо-



дификации алгебры (2-2) при включении центральных зарядов. Как было показано Зониусом /6/, этот супермультиплет описывается суперполем $\phi_i(x, z, \theta, \bar\theta)$ (где $z$ -новая коммутирующая координата), удовлетворяющим условию

$$\begin{aligned} D^{i}_{\alpha}\phi_j(x, z, \theta, \bar\theta) &= \frac{1}{2}\delta^{i}_{j} D^{k}_{\alpha}\phi_k(x, z, \theta, \bar\theta) \\ \bar D_{\dot\alpha i}\phi^{j}(x, z, \theta, \bar\theta) &= \frac{1}{2}\delta^{j}_{i}\bar D_{\dot\alpha k}\phi^{k}(x, z, \theta, \bar\theta) \end{aligned} \qquad (3.18)$$

и уравнению движения

$$\partial/\partial z\ \phi_i(x, z, \theta, \bar\theta) = im\,\phi_i(x, z, \theta, \bar\theta). \qquad (3.19)$$

Тогда ток

$$J_m = \phi^{+i}(\tau_m)_i{}^{j}\phi_j \qquad (3.20)$$

удовлетворяет уравнению (3. 17).

Для построения полного взаимодействия между $V^{m}$ и $\phi_i$ нужно рассматривать полное действие для этих суперполей, которое нам до сих пор неизвестно.

В приложении Б в связи с анализом условия ГЗВ мы затронем вопрос о построении $O(2)$ -расширенной суперсимметричной теории Янга-Миллса на основе общего изовекторного псевдоскалярного суперполя $\vec{V}(x, \theta, \bar\theta)$.

Итак, мы показали, что решение условия (3.3) выражает напряженность $W$ через общее псевдоскалярное поле с изовекторным индексом. Это суперполе содержит более высокие суперспины, чем необходимо, которые исключаются путем калибровочных преобразований. Перейдем теперь к анализу супермультиплета с наивысшим спином 2.

## 4. $O(2)$ - свободная супергравитация

Как известно (см., например, /7/), в линейном приближении теория гравитации есть взаимодействие полей со спинами 2 и 0 с тензором энергии-импульса материи. Это можно написать следующим образом

$$K_{\mu\nu,\lambda\sigma}h^{\lambda\sigma} = g\,T_{\mu\nu}, \qquad (4.1)$$

где $K_{\mu\nu,\lambda\sigma}$ - дифференциальный оператор, $h^{\lambda\sigma}$ - отклонение от плоской метрики, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи. Поскольку $T_{\mu\nu}$ сохраняется, мы должны иметь

$$\partial^{\mu} K_{\mu\nu,\lambda\sigma} = \partial^{\nu} K_{\mu\nu,\lambda\sigma} \equiv 0. \tag{4.2}$$

Обычную супергравитацию в линейном приближении тоже можно рассматривать[8] как взаимодействие суперспинов 3/2 и 0, описываемых аксиальным суперполем $H_{\mu}(x,\theta,\bar\theta)$, с супертоком $V_{\mu}$

$$K_{\mu\nu} H^{\nu} = g V_{\mu}. \tag{4.3}$$

Поскольку $V_{\mu}$ удовлетворяет закону сохранения (мы здесь используем четырехкомпонентные обозначения):

$$D_{\alpha}(\bar D D) V_{\mu} - 2i\partial_{\mu}(\gamma^{\nu} D)_{\alpha} V_{\nu} = 0, \tag{4.4}$$

мы должны иметь

$$\left[D_{\alpha}(\bar D D)\eta^{\lambda}_{\mu} - 2i\,\partial_{\mu}(\gamma^{\lambda} D)_{\alpha}\right] K_{\lambda\nu} = 0. \tag{4.5}$$

Условие (4.5) вместе с размерными соображениями полностью определяет оператор $K_{\lambda\nu}$. По такому пути мы будем идти и в случае $O(2)$ – расширенной супергравитации.

Доказано[3], что для $O(2)$ – расширенной суперсимметрии можно построить суперток, который является общим скалярным суперполем и удовлетворяет следующим законам сохранения:

$$(D\vec\tau D - \bar D \vec\tau \bar D)\, V(x,\theta,\bar\theta) = 0 \tag{4.6}$$

$$(\tau^{m}\vec\tau\,\sigma_{\mu}\bar D)_{\dot\alpha i}(D\tau^{m}D)\, V(x,\theta,\bar\theta) = 0 \tag{4.7}$$

$$D^{i}_{\alpha}(D\vec\tau D + \bar D\vec\tau\bar D)V(x,\theta,\bar\theta) = (\sigma_{\mu}\bar D)^{i}_{\alpha}\,\bar D\vec\tau\sigma_{\mu} D V(x,\theta,\bar\theta) - 8i(\vec\tau\,\hat\partial\,\bar D)^{i}_{\alpha}\, V(x,\theta,\bar\theta). \tag{4.8}$$

Эти законы сохранения обеспечивают то, что из общего скалярного суперполя, содержащего представления с наивысшими спинами $[1]_0$, $[\frac{3}{2}]_0$, $[2]_0$, $[1]_{\vec 1}$, исключаются $[\frac{3}{2}]_{1/2}$ и $[1]_{\vec 1}$ ( число в скобке – это наивысший спин представления, индекс



скобки обозначает изоспин наивысшего спина). Это утверждение можно доказать прямым подсчетом компонентных полей в супертоке Зонхуса. Они составляют два массивных представления $O(2)$ – суперсимметрии с наивысшими спинами 2 и I[9]. Представление с наивысшим спином I понадобится , потому что рассматривается суперток для массивного супермультиплета. Оно исчезает, когда масса супермультиплета обращается в нуль. Этот факт можно проверить и в безмассовой модели, которую мы проанализировали в предыдущем разделе.

Суперток определяется соотношением

$$V = d\, W(x,\bar\theta)\, W^{+}(x,\theta), \tag{4.9}$$

и все написанные выше законы сохранения сводятся к закону сохранения для "$O(2)$-суперконформной симметрии"

$$D\vec\tau D\, V = 0. \tag{4.10}$$

Подсчет компонентных полей показывает, что они принадлежат массивному представлению $O(2)$ – суперсимметрии с наивысшим спином 2. Тот факт, что в случае $O(2)$ – расширенной суперсимметрии суперток есть общее скалярное суперполе, мог бы навести на мысль, что $O(2)$ – гравитационный супермультиплет тоже есть общее скалярное суперполе. Мы покажем, что это неверно.

Если $O(2)$-гравитационный супермультиплет описывается общим скалярным суперполем, тогда он должен удовлетворять следующим уравнениям движения:

$$K H = g V, \tag{4.11}$$

где $K$ – самый общий скалярный дифференциальный оператор, построенный с помощью $D^{i}_{\alpha}$, $\bar D_{\dot\alpha j}$, $\partial_{\mu}$, который должен быть совместим с условиями сохранения (4.6–8). Размерный анализ уравнения (4.II) очень сильно ограничивает форму $K$. Действительно, $[V] = m^2$, $[g] = m^{-1}$, $[H] = m^{-1}$ и, следовательно, $[K] = m^2$. Отсюда вытекает самый общий вид $K$ :

$$K = a\Box + b\,\bar D\hat\partial D + c\,\bar D\vec\tau\bar D\;\bar D\vec\tau\bar D + d\,\bar D\vec\tau\bar D\; D\vec\tau D + c^{*}\, D\vec\tau D\; D\vec\tau D, \tag{4.12}$$

что оказывается несовместимым с условиями сохранения (4.6-8). Другими словами, не существует оператора , для которого имели бы место (4.7-8) и

$$[D \overleftrightarrow{\tau} D - \bar{D} \overleftrightarrow{\tau} \bar{D}] K \equiv 0. \tag{4.13}$$

Это означает, что для описания $O(2)$ - супергравитации мы должны выбрать суперполе с внешним лоренцевым индексом, т.е. мы должны иметь дело с суперполем, которое содержит более высокие суперспины, чем необходимо. Возникает вопрос о природе этого суперполя. Одна возможность - это прямое обобщение конструкции Огиевецкого и Сокачева /10/ - аксиальное суперполе $H_\mu(x,\theta,\bar\theta)$ .

Тем не менее, нельзя исключить возможность появления другого типа суперполя - изовекторного аксиального суперполя $\vec{H}_\mu$. В пользу такой гипотезы говорит следующий факт. В обычной суперсимметрии максимальное расширение алгебры суперсимметрии с включением генераторов внутренней симметрии, действующих на спинорные заряды, - это добавление $\gamma_5$ - преобразований этих зарядов. Суперполя, описываемые суперсимметричными вариантами уравнений Максвелла и Эйнштейна, получают квантовые числа соответствующего генератора $\gamma_5$ - преобразований : псевдоскалярное суперполе для уравнения Максвелла и аксиальное суперполе для уравнения Эйнштейна. Переход к расширенной $O(2)$ суперсимметрии увеличивает число генераторов внутренней симметрии, которые могут действовать на спинорные заряды и которые можно присоединять к первоначальной алгебре. Кроме $\gamma_5$ - преобразований спинорных зарядов, можно добавить и генераторы $SU(2)$ (2.3), вращающие спинорные заряды. В третьем разделе этой работы было показано, что квантовые числа группы $SU(2)$ появляются в явно суперполевой формулировке свободных уравнений Максвелла, в терминах общего псевдоскалярного изовекторного суперполя $\vec{V}(x,\theta,\bar\theta)$. В обычной суперсимметрии суперполя, которые описывают суперсимметричный вариант уравнений Максвелла и Эйнштейна, различаются только по внешним лоренцевым индексам. В связи с этим можно ожидать, что в $O(2)$ -суперсимметричной формулировке уравнений Эйнштейна появляется аксиальное изовекторное суперполе $\vec{H}_\mu(x,\theta,\bar\theta)$. Тогда для него можно ожидать уравнения движения типа



$$K_{m\mu, n\nu} H^{n\nu} = T_{m\mu}. \tag{4.14}$$

Легко увидеть, что такой суперток можно построить из супертока Зониуса следующим образом:

$$\vec{T}_\mu = \bar{D} \sigma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} D \, V. \tag{4.15}$$

Мы надеемся вернуться к этой проблеме в будущем.

## 5. Заключение

Мы доказали, что уже в $O(2)$ - суперсимметрии приходится работать с неминимальными суперполями, которые содержат высокие суперспины. Мы затронули вопрос о включении взаимодействия в явно суперполевом виде, что пока является единственным способом развития явно инвариантной теории возмущений.

Автор искренне благодарен В.И. Огиевецкому за многократные замечания и обсуждения. Он также хочет поблагодарить Е.А. Иванова и Э. Сокачева за плодотворные обсуждения. Э. Сокачеву автор признателен за внимательное прочтение рукописи.

## Приложение А.

Наша метрика $\eta_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$. Мы работем с двухкомпонентными спинорами Вейля $\theta^\alpha_i$ , где $i = 1,2$ – индекс $O(2)$ и $\alpha = 1,2$ – спинорный индекс $SL(2,C)$ . Спинорные индексы поднимаются и опускаются символом $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}$ $(\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ , $(\epsilon^{\alpha\beta})^* = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$ . Матрицы $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} = (1,\vec\sigma)$, $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot\beta\alpha} = \epsilon^{\alpha\alpha'}\epsilon^{\dot\beta\dot\beta'}(\sigma_\mu)_{\alpha'\dot\beta'}$ удовлетворяют

$$\sigma_\mu \tilde\sigma_\nu + \sigma_\nu \tilde\sigma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu \tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu \tilde\sigma_\mu) , \quad \tilde\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde\sigma_\mu \sigma_\nu - \sigma_\nu \tilde\sigma_\mu)$$

$$\left((\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\right)^* = -(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}$$

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}{}^{*} = (\sigma_\mu)_{\beta\dot\alpha}$$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\sigma}] = 2\left[\eta_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\sigma} - (\lambda\leftrightarrow\sigma)\right]$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,\sigma^{\lambda\sigma} \qquad \tilde\sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,\tilde\sigma^{\lambda\sigma}$$

$$\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu\sigma_\lambda = \eta_{\mu\nu}\sigma_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\sigma_\nu + \sigma_\mu\eta_{\nu\lambda} - i\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\sigma^\sigma$$

$$\epsilon_{0123} = -1$$

$$Sp(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu\sigma_\lambda\tilde\sigma_\rho) = 2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho}) - 2i\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

Индексы $O(2)$ поднимаются и опускаются с помощью $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$.

Матрицы $(\vec\tau)_i{}^j$ – матрицы Паули

$$\tau^{ij} = \varepsilon^{ik}(\vec\tau)_k{}^j \;;\quad \vec\tau_{ij} = \varepsilon_{jk}\vec\tau_i{}^k$$

$$\vec\tau^i{}_j = \varepsilon^{ik}\varepsilon_{je}\vec\tau_k{}^e$$

$$\vec\tau^i{}_j = \vec\tau_j{}^i \;;\quad \vec\tau_{ij} = \vec\tau_{ji} \;;\quad \vec\tau^{ij} = \vec\tau^{ji}$$

$$(\varepsilon^{ij})^* = -\varepsilon_{ij} \;;\quad (\tau^i{}_j)^* = \vec\tau_i{}^j \,,\quad (\vec\tau^{ij})^* = -\vec\tau_{ij}$$

$$\tau_i\tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\tau_k$$

$$\tau_i\tau_j\tau_k = \delta_{jk}\tau_i + \delta_{ij}\tau_k - \delta_{ik}\tau_j + i\epsilon_{ijk}.$$

$$\tau_k\tau_i\tau_k = -\tau_i$$

Правила умножения грассмановых переменных $\theta_i^\alpha\;\bar\theta^{\dot\beta j}$:

$$\theta_i^\alpha\,\theta_j^\beta = \frac14\epsilon^{\alpha\beta}\vec\tau_{ij}\,\theta\vec\tau\theta - \frac1{16}\varepsilon_{ij}(\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}\,\theta\sigma^{\mu\nu}\theta$$

$$\bar\theta^{\dot\alpha i}\,\bar\theta^{\dot\beta j} = \frac14\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\vec\tau)^{ij}\,\bar\theta\vec\tau\bar\theta - \frac1{16}\varepsilon^{ij}(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\theta\tilde\sigma^{\mu\nu}\bar\theta$$



$$\theta\vec\tau\theta\;\theta_i^\alpha = \frac13(\vec\tau\tau^m\theta)_i^\alpha\;\theta\tau^m\theta$$

$$\bar\theta\vec\tau\bar\theta\;\bar\theta^{\dot\alpha i} = \frac13(\vec\tau\tau^m\bar\theta)^{\dot\alpha i}\;\bar\theta\tau^m\bar\theta$$

$$(\theta\sigma_{\mu\nu}\theta)\,\theta_i^\alpha = \frac12(\sigma^{\mu\nu}\vec\tau\theta)_i^\alpha\;\theta\vec\tau\theta$$

$$(\bar\theta\tilde\sigma_{\mu\nu}\bar\theta)\,\bar\theta^{\dot\alpha i} = \frac12(\tilde\sigma^{\mu\nu}\vec\tau\bar\theta)^{\dot\alpha i}\;\bar\theta\vec\tau\bar\theta$$

$$\theta\tau_m\theta\;\theta\tau_n\theta = \frac13\delta_{mn}(\theta\vec\tau\theta)(\theta\vec\tau\theta)$$

$$\bar\theta\tau_m\bar\theta\;\bar\theta\tau_n\bar\theta = \frac13\delta_{mn}(\bar\theta\vec\tau\bar\theta)(\bar\theta\vec\tau\bar\theta)$$

$$\theta\sigma_{\mu\nu}\theta\;\theta\sigma_{\lambda\sigma}\theta = -\frac12(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda} + i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma})\;\theta\vec\tau\theta\,\theta\vec\tau\theta$$

$$\bar\theta\tilde\sigma_{\mu\nu}\bar\theta\;\bar\theta\tilde\sigma_{\lambda\sigma}\bar\theta = -\frac12(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda} - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma})\;\bar\theta\vec\tau\bar\theta\,\bar\theta\vec\tau\bar\theta$$

$$(\vec\tau\theta)_i^\alpha(\theta\vec\tau\theta)\,\theta_j^\beta = -\frac14\epsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{ij}\;\theta\vec\tau\theta\;\theta\vec\tau\theta$$

$$(\vec\tau\bar\theta)^{\dot\alpha i}(\bar\theta\vec\tau\bar\theta)\,\bar\theta^{\dot\beta j} = -\frac14\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{ij}\;\bar\theta\vec\tau\bar\theta\;\bar\theta\vec\tau\bar\theta$$

$$\theta\sigma_{\mu\nu}\theta\;\theta\vec\tau\theta \equiv 0$$

$$\theta_i^\alpha\,\bar\theta^{j\dot\beta} = \frac14(\tilde\sigma_\mu)^{\dot\beta\alpha}\left[\delta_i^j\,\theta\sigma^\mu\bar\theta + (\vec\tau)^j{}_i\,\theta\sigma^\mu\vec\tau\bar\theta\right].$$

Аналогичные формулы можно написать для произведений $D_\alpha^i$ и $\bar D_{\dot\beta j}$. Они образуют клиффордову алгебру, для которой можно брать в качестве базиса независимые произведения

$$D_\alpha^i,\; D\vec\tau D,\; D\sigma^{\mu\nu}D,\; D\vec\tau D\,(\vec\tau D)^i_\alpha \quad D\vec\tau D\,D\vec\tau D$$

$$\bar D_{\dot\alpha i},\; \bar D\vec\tau\bar D \quad \bar D\tilde\sigma^{\mu\nu}\bar D,\; \bar D\vec\tau\bar D\,(\vec\tau\bar D)_{\dot\alpha i} \quad \bar D\vec\tau\bar D\,\bar D\vec\tau\bar D.$$

Наиболее важные (анти) коммутаторы этих элементов:

$$\{ D^i_\alpha , D_{\dot\beta j} \} = -2i\delta^i_j (\sigma_m)_{\alpha\dot\beta}\,\partial^m$$

$$[D\tau^i D , \bar D \tau^j \bar D] = -8\delta^{ij}[4\Box - i\bar D \tilde{\hat\delta} D] + 8\epsilon^{ijk}\bar D \tilde{\hat\delta}\tau^k D$$

$$[\bar D \tau^m \bar D , \bar D \tilde{\hat\delta} D] = 4i\,\bar D \tau^m \bar D$$

$$[\bar D \tau^m \bar D , \bar D \tilde{\hat\delta}\tau^k D] = -4i\epsilon^{mkl}\,\bar D \tau^l \bar D .$$

<u>Приложение Б.</u>

Мы проанализируем условия ГВЗ в контексте найденных в разделе 2 суперполей, описывающих супермультиплеты с наивысшим спином I.

Напряженности Янга-Миллса получаются как (анти) коммутаторы ковариантных производных $(\mathcal{D}_\mu , \mathcal{D}^i_\alpha , \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha j})$

$$[\mathcal{D}_\mu , \mathcal{D}_\nu] = iF_{\mu\nu} , \quad [\mathcal{D}_\mu , \mathcal{D}^i_\alpha] = iF^i_{\mu\alpha}$$
$$[\mathcal{D}_\mu , \mathcal{D}_{\dot\alpha i}] = iF_{\mu\dot\alpha i} , \quad \{\mathcal{D}^i_\alpha , \mathcal{D}^j_\beta\} = iF^{ij}_{\alpha\beta} \qquad \text{(Б.I)}$$
$$\{\mathcal{D}_{\dot\alpha i} , \mathcal{D}_{\dot\beta j}\} = iF_{\dot\alpha i,\dot\beta j} , \quad \{\mathcal{D}^i_\alpha , \mathcal{D}_{\dot\beta j}\} = -2i\delta^i_j\mathcal{D}_{\alpha\dot\beta} + iF^i_{\alpha\dot\beta j} ,$$

где

$$\mathcal{D}_A = D_A + igA_A , \quad D_A = (\partial_\mu , D^i_\alpha , \bar D_{\dot\beta j}) . \qquad \text{(Б.2)}$$

$\mathcal{D}_A$ ковариантны в том смысле, что если суперполе $\Phi$ преобразуется относительно суперкалибровочных преобразований как

$$\Phi \to e^{-i\Lambda(x\theta\bar\theta)}\Phi , \qquad \text{(Б.3)}$$

то также преобразуются и суперполя $\mathcal{D}_A\Phi$ . Поскольку $F_{AB}$ содержит намного больше суперполей,чем нужно, налагаются такие условия на $F_{AB}$ /2/, чтобы исключить ненужные суперполя.

В работе/2/ рассматриваются следующие условия:

$$F^i_{\alpha ,\dot\beta j} = 0, \qquad \text{(Б.4)}$$



$$F^{ij}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{ij}\epsilon_{\alpha\beta}W \qquad F_{\dot\alpha i,\dot\beta j} = \varepsilon_{ij}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar W$$
$$\mathcal{D}^i_\alpha W = 0 \qquad \mathcal{D}_{\dot\beta j}\bar W = 0. \qquad \text{(Б.5)}$$

В силу этих условий все остальные $F_{AB}$ можно выразить как ковариантные производные $W$ , $\bar W$ . Далее, используя обобщенные тождества Якоби/II/, можно вывести аналог уравнения (3.3) для суперполя Янга-Миллса

$$\bar{\mathcal{D}}\vec\tau\bar{\mathcal{D}}W - \mathcal{D}\vec\tau\mathcal{D}\bar W = 0. \qquad \text{(Б.6)}$$

Мы хотим подчеркнуть, что это уравнение может быть получено из более слабых условий, а именно, (Б.4) можно заменить на

$$\varepsilon_{mnp}[\mathcal{D}^i_\alpha , \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta j}](\tau_n)_i{}^j(\tau^p)^{i'}{}_{j'}F^{\alpha}_{i'},{}^{\dot\beta j'} = 0. \qquad \text{(Б.7)}$$

Более того, в абелевом случае именно это условие выполняется в локальном виде. Следующее замечание относится к калибровочной группе, которая соответствует преобразованиям (3.I3). Из (3.I3) и (Б.3) получаем

$$\Lambda = (\vec\tau D)^j_\beta (D\vec\tau D)(\bar D\tau^k\bar D)(\delta^{kl} + \tfrac{i}{2}\epsilon^{kml}\tau_m)_j{}^{j'}\chi_{l j'}^{\beta} \qquad \text{(Б.8)}$$

Такой сложный вид группового элемента сильно затрудняет обобщение преобразований (3.I3) на неабелев случай. Прямое обобщение:

$$\delta V^k = ig\Lambda U^k - igU^k\Lambda^+ + D^i_\alpha(\delta^{kl} + \tfrac{i}{2}\epsilon^{kml}\tau_m)\chi^\alpha_{li} \qquad \text{(Б.9)}$$

не является преобразованием калибровочной группы. Единственное, что нам удалось выяснить, - это то, что решение уравнения (3.3) совместимо с условиями (Б.5) в первом порядке по константе взаимодействия. В этом можно убедиться следующим образом. Положим

$$A^i_\alpha = A^{i(0)}_\alpha + gA^{i(1)}_\alpha \qquad \text{(Б.I0)}$$

в (Б.5). Тогда

$$F^{ij}_{\alpha\beta} = F^{ij(0)}_{\alpha\beta} + g\, F^{ij(0)}_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{i(1)}_{\alpha}) + ig\,\{\mathcal{A}^{i(0)}_{\alpha}, \mathcal{A}^{j(0)}_{\beta}\}$$

$$= \epsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{ij}\,(W^{0} + g W^{1}). \qquad (Б.11)$$

Нужно выбирать такое решение $\mathcal{A}^{i0}_{\alpha}$ (которое определено с точностью до калибровочных преобразований), для которого:

$$F^{ij(0)}_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{i(1)}_{\alpha}) + \{\mathcal{A}^{i(0)}_{\alpha}, \mathcal{A}^{j(0)}_{\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{ij}\,W^{1}. \qquad (Б.12)$$

С другой стороны, из $\mathcal{D}^{i}_{\alpha} W = 0$ вытекает, что

$$D^{i}_{\alpha} W^{1} = -i\,[\mathcal{A}^{i(0)}_{\alpha}, W^{0}],$$

из тождества Бьянки для $F^{ij(0)}_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{i(1)}_{\alpha})$ следует, что

$$[\mathcal{A}^{i(0)}_{\alpha}, W^{0}] = 0, \qquad (Б.13)$$

т.е.

$$\mathcal{A}^{i0}_{\alpha} \sim \theta^{i}_{\alpha} W^{0}. \qquad (Б.14)$$

Подвергая это решение преобразованию Янга-Миллса, можно вернуться к ковариантной форме

$$\mathcal{A}^{i}_{\alpha} = \vec{\tau} D\; D\vec{\tau} D\; \bar{D}\,\bar{\tau}^{k}\,\bar{D}\; U^{k} + g\,\mathcal{A}^{i(1)}_{\alpha}, \qquad (Б.15)$$

но при этом $\mathcal{A}^{i(1)}_{\alpha}$ остается неизвестным.



## Литература


1. R.Haag, J.Lopuszanski and M.Sohnius. Nucl.Phys. B88, 257 (1975).
2. R.Grimm, M.Sohnius and J.Wess. Nucl.Phys. B133, 275 (1978).
3. M.Sohnius. Phys.Lett. 81B, 8 (1979).
4. E.Sokatchev. Nucl.Phys. B99, 96 (1975).
5. L.Brink, M.Gell-Mann, P.Ramond and J.Schwartz. Prepotentials in a superspace formulation of supergravity preprint CALT 68-656.
6. M.Sohnius. Nucl.Phys. B138, 109 (1978).
7. V.Ogievetsky, I.Polubarinov. Ann.Phys. 35, (1965).
8. V.Ogievetsky, E.Sokatchev. Nucl.Phys. B124, 309 (1977).
9. V.Ogievetsky, E.Sokatchev, Supercurrent preprint JINR E2-11528, Dubna, 1978.
10. V.Ogievetsky, E.Sokatchev. Phys.Lett. 79B, 222 (1978).
11. M.Sohnius. Nucl.Phys. B136, 461 (1978).


Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1979 года.