объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12571

В.М.Мальцев

МНОГОКВАРКОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛЯХ С SU(4) СИММЕТРИЕЙ

1979

P2 - 12571

В.М.Мальцев

МНОГОКВАРКОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛЯХ С SU(4) СИММЕТРИЕЙ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

Мальцев В.М.

P2 - 12571

Многокварковые состояния в моделях с SU(4) симметрией

Предложена процедура, позволяющая однозначно выразить проекцию многокваркового состояния на неприводимое представление группы SU(4) через интеграл в параметрическом пространстве этой группы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Maltsev V.M.

P2 - 12571

Multiquark States in Models with SU(4) Symmetry

A procedure is proposed which allows one to express unambiguously the projection of a multiquark state to the irreducible representation of SU(4) group via an integral in the parametric space of this group.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В настоящее время появилась надежда, что теория кварков, взаимодействующих с неабелевыми калибровочными полями, позволит описать динамику сильного взаимодействия. Существует убеждение, что неабелева калибровочная теория содержит удержание кварков и, следовательно, в физическом спектре состояний отсутствуют изолированные состояния частиц, соответствующие фундаментальным полям /кваркам и глюонам/. Спектр адронов включает только связанные состояния, которые относительно калибровочной группы предполагаются синглетами. Такое предположение объясняет большой успех кварковой модели, хотя свободные кварки не наблюдаются.

В этой формулировке кварковой модели адроны являются связанными многокварковыми состояниями, и, естественно, возникает проблема проекции произвольного прямого произведения фундаментальных мультиплетов группы симметрии на заданное неприводимое представление /для цветных групп - синглетное/. Цель данного исследования - выразить такую проекцию для кварковой модели с SU(4) симметрией через интеграл в параметрическом пространстве группы симметрии.

Квадрат проекции /статистический вес/ вектора A, который в нашем случае является прямым произведением соответствующего числа квартетов и антиквартетов, на пространство, преобразующееся по неприводимому представлению с сигнатурой $[h_1, h_2, h_3, 0]$, равен

$$|\langle [h_1 h_2 h_3 0] | A \rangle|^2 = \langle A | \hat{P}^{[h_1 h_2 h_3 0]} | A \rangle, \qquad /1/$$

где оператор $\hat{P}^{[h_1 h_2 h_3 0]}$ имеет вид

$$\hat{P}^{[h_1 h_2 h_3 0]}(g) = N^{[h_1 h_2 h_3 0]} \int \chi^{*[h_1 h_2 h_3 0]}(g) \hat{D}(g) dg \qquad /2/$$

и проектирует векторы подпространства, в котором действуют операторы $\hat{D}(g)$, на пространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[h_1 h_2 h_3 0]$. В выражении /2/ dg - элемент объема; $\chi^{[h_1 h_2 h_3 0]}(g)$ - характер представления, размерность представления равна

$$N^{[h_1 h_2 h_3 0]} = \frac{1}{12}[(h_1+3)(h_2+2)(h_3+1)(h_1-h_3+2)(h_1-h_2+1)(h_2-h_3+1) \qquad /3/$$

Подставляя /2/ в /1/, получаем

$$|\langle[h_1 h_2 h_3 0]|A\rangle|^2 = N^{[h_1 h_2 h_3 0]} \int dg \cdot \chi^{*[h_1 h_2 h_3 0]}(g) \times$$

$$\times D^{[1000]}_{\alpha_1,\alpha_1}(g)\dots D^{[1000]}_{\alpha_i,\alpha_i}(g) D^{[1110]}_{\beta_1,\beta_1}(g)\dots D^{[1110]}_{\beta_j,\beta_j}(g), \qquad /4/$$

где $D^{[1000]}_{\ell,\ell}(g)$ - диагональные матричные элементы перехода между состояниями фундаментального представления /квартета/, для антиквартета $D^{[1110]}_{\ell,\ell}(g) = D^{*[1000]}_{\ell,\ell}(g)$.

Аналогичный подход для $SU(3)$ группы симметрии был предложен автором [1], для $SU(2)$ - Церулусом [2].

Будем считать цель достигнутой, если получено выражение для элемента объема группы, диагональных $D^{[1000]}_{\ell,\ell}(g)$ -функций для фундаментального представления и для характера произвольного неприводимого представления через соответствующие "углы Эйлера".

В рассматриваемом случае 4-мерная унитарная унимодулярная $SU(4)$ группа является 15-параметрической. Типичный ее элемент [3]

$$U(g) = D(\delta_1,\delta_2,\delta_3) U_{34}(\Phi_3,\sigma_6) U_{23}(\theta_3,\sigma_5) \times$$

$$\times U_{24}(\Phi_2,\sigma_4) U_{12}(\theta_2,\sigma_3) U_{13}(\theta_1,\sigma_2) U_{14}(\Phi_1,\sigma_1), \qquad /5/$$

где

$$D(\delta_1,\delta_2,\delta_3) = \begin{vmatrix} e^{i\delta_1} & . & . & . \\ . & e^{i\delta_2} & . & . \\ . & . & e^{i\delta_3} & . \\ . & . & . & e^{-i(\delta_1+\delta_2+\delta_3)} \end{vmatrix}, \qquad /6/$$

а U_{ij} - 4-мерные унитарные унимодулярные матрицы, имеющие вид

$$U_{34}(\Phi_3,\sigma_6) = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & \cos\Phi_3 & -\sin\Phi_3 e^{-i\sigma_6} \\ . & . & \sin\Phi_3 e^{i\sigma_6} & \cos\Phi_3 \end{vmatrix}. \qquad /7/$$

Остальные $U_{ij}(\theta,\sigma)$ матрицы построены аналогичным образом, т.е. диагональные элементы $a_{i,i}$ и $a_{j,j}$ равны косинусу первого аргумента, оставшиеся диагональные элементы - единица, а недиагональные элементы все равны нулю, кроме $a_{ji} = \sin\theta \cdot e^{i\sigma}$ и $a_{ij} = -\sin\theta \cdot e^{-i\sigma}$.

Из 15 параметров, задающих точку в параметрическом пространстве группы, шесть параметров Φ_i, θ_i /$i=1,2,3$/ имеют смысл полярных углов с областью определения $(-\pi/2, \pi/2)$, остальные девять параметров δ_i, σ_j / $i=1, 2, 3$; $j=1, \dots 6$/ могут быть отождествлены с азимутальными углами и областью определения $(-\pi, \pi)$.

С физической точки зрения представляют интерес такие матричные элементы от полного преобразования $U(g)$, которые являются диагональными по h_1, h_2, h_3 и по внутренним состояниям мультиплета. Диагональные квартетные $D^{[1000]}_{\ell,\ell}(g)$ функции нетрудно определить, представив типичный элемент группы /5/ в виде матрицы 4x4. Отсюда следует

$$D^{[1000]}_{u,u}(g) = e^{i\delta_1}\cos\Phi_1\cos\theta_1\cos\theta_2,$$

$$D^{[1000]}_{d,d}(g) = e^{i\delta_2}\cos\Phi_2\cos\theta_2\cos\theta_3\,,$$

$$D^{[1000]}_{s,s}(g) = e^{i\delta_3}[\cos\Phi_3\cos\theta_1\cos\theta_3 - \cos\Phi_2\cos\Phi_3\cdot\sin\theta_1 \times$$

$$\times\sin\theta_2\sin\theta_3 e^{-i(\sigma_2-\sigma_3-\sigma_5)} +$$

$$+\sin\Phi_2\sin\Phi_3\sin\theta_1\sin\theta_2 e^{-i(\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4+\sigma_6)}]\,,$$

$$D^{[1000]}_{c,c}(g) = e^{-i(\delta_1+\delta_2+\delta_3)}[\cos\Phi_1\cos\Phi_2\cos\Phi_3 -$$

$$-\cos\Phi_1\sin\Phi_2\sin\Phi_3\sin\theta_3 e^{-i(\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6)} - \qquad /8/$$

$$-\sin\Phi_1\sin\Phi_3\sin\theta_1\cos\theta_3 e^{-i(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_6)} -$$

$$-\sin\Phi_1\sin\Phi_2\cos\Phi_3\cos\theta_1\sin\theta_2 e^{-i(\sigma_1-\sigma_3-\sigma_4)} -$$

$$-\sin\Phi_1\cos\Phi_2\sin\Phi_3\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 e^{-i(\sigma_1-\sigma_3-\sigma_5-\sigma_6)}].$$

Соответствующие функции для антиквартета будут комплексно-сопряженными. Отсюда следует очевидное выражение для характера квартета.

Зная характер фундаментального представления-квартета, и замечая, что характер суммы представлений равен сумме характеров, а прямого произведения - произведению, легко найти характер интересующего нас представления, например;

$$\chi^{[2110]} = \chi^{[1000]}\cdot\chi^{*[1000]} - 1\,, \qquad /9/$$

где $\chi^{[2110]}$ - характер присоединенного представления размерности 15.

Необходимо отметить, что фундаментальные представления SU(4) не исчерпываются приведенными здесь. Существует еще одно фундаментальное представление [1100] размерности 6. Однако, как показано Антони, Спайзером и Оакесом [/4/], представления SU(4) разбиваются на 4 класса, которые образуют относительно прямого произведения циклическую группу четвертого порядка. Представления класса 2 /содержащие фундаментальный сикстет/ принадлежат группе вращений в шестимерном эвклидовом пространстве $O(6) \simeq SU(4)/Z_2$, где Z_n - дискретная группа n корней из единицы. В аддитивной кварковой модели, построенной на u, d, s, c - кварках, такие представления не используются, поэтому в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

Чтобы вычислить элемент объема группы, введем в окрестность данного элемента такие параметры ϕ_i, что

$$U^+\frac{\partial U}{\partial\phi_i} = \lambda_i\,, \qquad (i = 1,\dots,15), \qquad /10/$$

где λ_i - матрицы Гелл-Манна [/5/]. Тогда элемент объема группы

$$dg = \prod_{i=1}^{15} d\phi_i\,. \qquad /11/$$

Для любой другой параметризации $\Phi_j\ (j = 1,\dots,15)$ имеем

$$dg = \frac{D(\phi_i)}{D(\Phi_j)}\prod_{j=1}^{15} d\Phi_j\,. \qquad /12/$$

Определитель $D(\phi_i)/D(\Phi_j)$ является определителем матрицы перехода от $\partial U/\partial\Phi_j$ к $\partial U/\partial\phi_i$ и, следовательно, от $U^+\frac{\partial U}{\partial\Phi_j}$ к $U^+\frac{\partial U}{\partial\phi_i} = \lambda_i$. Поэтому в дальнейшем остается вычислить пятнадцать матриц $U^+\frac{\partial U}{\partial\Phi_j}$ $(j = 1,\dots,15)$, разложить их по λ_i:

$$U^+\frac{\partial U}{\partial\Phi_j} = a^i_j\lambda_i$$

и найти определитель матрицы a^i_j.

Однако, если действовать указанным способом, то конечный результат является весьма сложной 15-мерной матрицей, определитель которой получить трудно. Для упрощения расчета было использовано преобразование

$$U^+\frac{\partial U}{\partial\Phi_j} \to VU^+\frac{\partial U}{\partial\Phi_j}V^+\,, \qquad /14/$$

где V - любая унитарная матрица, которая, изменяя матрицу a^i_j, не меняет определитель. Чтобы максимально упростить вычисления, мы выбрали $V = U_{34} U_{23} U_{24} U_{12} U_{13} U_{14}$, где U_{34} определена соотношением /7/, а остальные U_{ij} построены аналогичным образом. В этом случае элемент объема группы

$$dg = \prod_{i=1}^{6} \prod_{j,k,\ell=1}^{3} d\sigma_i \, d\delta_j \, d\Phi_k \, d\theta_\ell \cdot \sin 2\Phi_k \cdot \sin 2\theta_\ell \cdot \cos^2\theta_\ell \cdot \cos^2\theta_2 \ . \qquad /15/$$

Соотношения /4/, /8/ и /15/ полностью решают поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maltsev V.M. Nucl.Phys., 1971, B31; p.278.*
2. *Cerulus F. Nuovo Cimento, 1961, 19, p.528.*
3. *Murnaghan F.D. The Unitary and Rotation Group, Spartan Book, Washington, 1962.*
4. *Antoine J.P., Speiser D., Oakes R.J. Phys.Rev., 1966, 141, p.1542.*
5. *Amati D. et al. Nuovo Cim., 1964, 34, p.1732.*

Рукопись поступила в издательский отдел 22 июня 1979 года.