Л-934

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

4792/2-79

3/12-79

P2 - 12559

В.Л.Любошиц

ПОВОРОТ СПИНА ПРИ ОТКЛОНЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1979

P2 - 12559

В.Л.Любошиц

ПОВОРОТ СПИНА ПРИ ОТКЛОНЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Направлено в ЯФ

Р2 - 12559

Любошиц В.Л.

Поворот спина при отклонении релятивистской заряженной частицы в электрическом поле

Установлена связь между вращением спина и искривлением траектории релятивистской заряженной частицы, движущейся в электрическом поле. Показано, что в этом случае мгновенные угловые скорости прецессии спина и поворота импульса параллельны друг другу. Этот результат применяется к плоскостному каналированию протонов и позитронов высоких энергий в изогнутых кристаллах. С той же точки зрения исследуется поворот вектора поляризации релятивистской частицы с произвольным магнитным моментом при кулоновском рассеянии на малые углы.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P2 - 12559

Lyuboshitz V.L.

The Spin Rotation at Deflection of Relativistic Charged Particle in Electric Field

The connection between the spin rotation and the curvature of trajectory of relativistic charged particle moving in electric field is established. It is shown, that in this case the momentary angle velocity of spin precession and the momentary angle velocity of momentum rotation are parallel (the formula (4)). This result is applied to the plane channeling of protons and positrons in curved cristalls. In the frame of this point of view the rotation of the polarization vector of relativistic particle with arbitrary magnetic moment in Coulomb scattering on small angles is investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В настоящей работе найдена простая связь между углом прецессии спина и изменением направления импульса релятивистской частицы, движущейся в произвольном электрическом поле. Такая связь, в частности, должна иметь место в случае каналирования частиц в изогнутых кристаллах, возможность которого была впервые указана в работе Цыганова /1/; поворот спина в этих условиях обсуждался в статье Барышевского /2/.

Будем исходить из уравнения Баргмана-Мишеля-Телегди /3/, описывающего поведение спина релятивистской частицы при квазиклассическом движении последней во внешнем электромагнитном поле. Пусть m **- масса частицы,** e **- ее заряд,** $\vec{\zeta}$ **- вектор спиновой поляризации, отнесенный к "мгновенной" системе покоя,** γ **- лоренцовский фактор,** $\vec{\ell}$ **- единичный вектор в направлении скорости,** g **- гиромагнитное отношение /по определению, магнитный момент** $\mu = \frac{eg}{2mc}\hbar s$, **где** s **- спин частицы/. Согласно /3,4/**

$$\frac{d\vec{\zeta}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{\zeta}],$$

где t **- время в лабораторной системе отсчета,**

$$\vec{\Omega} = -\frac{e}{2mc} g\{\vec{H} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\vec{\ell}(\vec{H}\vec{\ell}) + [\vec{E}, \frac{\vec{v}}{c}]\} - (\gamma-1)[\vec{\ell}, \frac{d\vec{\ell}}{dt}], \qquad /1/$$

$\vec{E}$ **и** $\vec{H}$ **- напряженности электрического и магнитного полей в точке нахождения частицы. Первый член в формуле /1/ для угловой скорости прецессии** $\vec{\Omega}$ **можно записать в виде** $-\frac{e}{2mc\gamma} g\vec{H}^*$, **где** $\vec{H}^*$ **- напряженность магнитного поля** в собственной системе отсчета; что касается члена $-(\gamma-1)[\vec{\ell}, \frac{d\vec{\ell}}{dt}]$, то он соответствует томасовской прецессии спина /5/.

Из уравнения движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}] \qquad /2/$$

следует, что мгновенная угловая скорость поворота импульса частицы определяется по формуле

$$\vec{\Omega}_0 = [\vec{\ell}, \frac{d\vec{\ell}}{dt}] = -\frac{e}{mc\gamma}\{\vec{H} - \vec{\ell}(\vec{H}\vec{\ell}) + \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}[\vec{E}, \frac{\vec{v}}{c}]. \qquad /3/$$

Сравнивая /1/ и /3/, замечаем, что при отсутствии магнитного поля векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}_0$ параллельны /или антипараллельны/ друг другу и связаны соотношением

$$\vec{\Omega} = [-\frac{1}{2}(g-2)\frac{\gamma^2-1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}]\vec{\Omega}_0, \qquad /4/$$

или

$$\vec{\Omega} = [\frac{1}{2}(g-2)\gamma + \frac{\gamma}{\gamma+1}]\frac{v^2}{c^2}\vec{\Omega}_0 . \qquad /5/$$

Ясно, что если траектория заряженной частицы в электрическом поле представляет собою плоскую кривую, то векторы $\vec{\Omega}(t)$ и $\vec{\Omega}_0(t)$ имеют постоянное направление вдоль нормали $\vec{n}$ к плоскости движения $(\vec{\Omega}_0(t) = \Omega_0(t)\vec{n}$, $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t)\vec{n})$. В этом случае угол прецессии вектора поляризации вокруг нормали $\vec{n}$ составляет

$$\theta(t) = \int_0^t [\frac{1}{2}(g-2)\frac{\gamma^2(t')-1}{\gamma(t')} + \frac{\gamma(t')-1}{\gamma(t')}]\frac{d\theta_0(t')}{dt'}dt', \qquad /6/$$

где $\theta_0(t) = \int_0^t \Omega_0(t')dt'$ - угол между начальным импульсом частицы и ее импульсом в момент времени t. Если кинетическая энергия частицы при ее движении по траектории практически не меняется, то связь между углами вращения спина и импульса описывается формулой

$$\theta = [\frac{1}{2}(g-2)\frac{\gamma^2-1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}]\theta_0 . \qquad /7/$$

В нерелятивистском случае

$$\theta = \frac{1}{2}(g-1)\frac{v^2}{c^2}\theta_0 . \qquad /8/$$

Подчеркнем, что для достаточно малых участков траектории соотношение /7/ остается справедливым и в условиях, когда направление векторов $\vec{\Omega}_0$ и $\vec{\Omega}$ изменяется с течением времени. При этом ось поворота спина на угол θ перпендикулярна плоскости, проходящей через начальный и конечный импульсы частицы*.

---

* Для спиновой волновой функции уравнение прецессии в электрическом поле имеет вид

$$i\frac{\partial\psi^{(t)}}{\partial t} = (\vec{\Omega}(t)\vec{\hat{s}})\psi(t),$$

где $\vec{\Omega}(t)$ определяется согласно /4/-/5/, $\hat{\vec{s}}$ - оператор спина. При неплоском движении операторы $(\vec{\Omega}(t)\ \hat{\vec{s}})$, взятые в разные моменты времени, не коммутируют друг с другом, и решение символически представляется как

$$\psi(t) = \hat{T}\exp(-i\int_0^t \hat{\vec{s}}\vec{\Omega}(t')dt')\psi(0),$$

где $\hat{T}$ - хронологический оператор. В первом приближении теории возмущений

$$\psi(t) = (1 - i\hat{\vec{s}}\int_0^t \vec{\Omega}(t')dt')\psi(0).$$

Для вектора поляризации это соответствует равенству

$$\vec{\zeta}(t) = \vec{\zeta}(0) + [\int_0^t \vec{\Omega}(t')dt', \vec{\zeta}(0)].$$

Существенно, что учет радиационного затухания фактически не меняет полученных соотношений. Действительно, радиационное торможение сводится к появлению в собственной системе отсчета заряженной частицы дополнительного электрического поля. Это поле, очевидно, не действует на магнитный момент, и поэтому формула /1/ для угловой скорости прецессии остается прежней. С другой стороны, сила торможения в лабораторной системе отсчета, которую следует ввести в правую часть уравнения /2/, при $\vec{H}=0$ имеет вид /6/

$$f = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\gamma^2 v \vec{\ell}\ \{\vec{E}^2 - \frac{v^2}{c^2}(\vec{E}\vec{\ell})^2\}$$

/здесь отброшены члены, пренебрежимо малые по сравнению с силой Лоренца/. Так как сила торможения $\vec{f}$ направлена против скорости, ее вклад в угловую скорость $\vec{\Omega}_0 = [\vec{\ell}, \frac{d\vec{\ell}}{dt}]$ равен нулю. Следовательно, векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}_0$ по-прежнему удовлетворяют соотношениям /4/-/5/.

При наличии внешнего магнитного поля свойство параллельности векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}_0$, вообще говоря, нарушается. Исключение составляет случай движения в поперечном магнитном поле при $\vec{E}=0$, когда

$$\vec{\Omega} = (\frac{g-2}{2}\gamma + 1)\vec{\Omega}_0 .$$

Легко видеть, что в ультрарелятивистском пределе $(\gamma \gg 1)$ при произвольных полях $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выполняется приближенное равенство

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0(\frac{g-2}{2}\gamma + 1) + \frac{1}{2}\frac{ge}{mc\gamma}\vec{\ell}(\vec{H}\vec{\ell}) \qquad /9/$$

/опущены члены $\sim eH/mc\gamma^2$).

Ниже будут рассмотрены некоторые конкретные применения формул /4/-/7/.

а/ Движение в однородном электрическом поле

Пусть при $t=0$ частица находится в начале координат, начальный импульс $p=mv\gamma$ направлен вдоль оси y, а напряженность электрического поля - вдоль оси x. Тогда расчет по формуле /6/ приводит к следующему выражению для угла вращения спина вокруг оси z:

$$\theta = \frac{eEy(t)}{2mc^2}(g-2) + \arccos\frac{\gamma + \mathrm{ch}\frac{eEy(t)}{pc}}{\gamma\,\mathrm{ch}\frac{eEy(t)}{pc} + 1},$$

где /10/

$$y(t) = \frac{pc}{eE}\,\mathrm{Arsh}\frac{eEt}{mc\gamma} .$$

Угол отклонения частицы в электрическом поле

$$\theta_0 = \mathrm{arctg}\frac{eEt}{p} . \qquad /11/$$

Если кинетическая энергия частицы меняется незначительно,то $\theta_0 \approx \frac{eEt}{p} \approx \frac{eEy}{pv} \ll 1$, и формула /10/ переходит в /7/.

б/ Плоскостное каналирование в изогнутых кристаллах

Искривление траектории заряженной частицы при ее движении вдоль изогнутого канала обусловлено наличием перпендикулярного импульсу среднего электрического поля, величина которого может достигать 10^7 - 10^8 CGSE /1/. В работе /2/ было показано, что в связи с этим при каналировании ультрарелятивистских частиц в изогнутых кристаллах угол поворота вектора поляризации принимает большие значения. Интересно, что в рассматриваемом случае этот угол можно определить по формулам /7/ или /6/, не обращаясь к конкретным моделям, описывающим распределение внутрикристаллического поля. Действительно, предположим, что импульс каналирующей частицы параллелен плоскости изгиба. Тогда угол отклонения частицы θ_0 совпадает с углом изгиба кристалла, а ось вращения спина перпендикулярна плоскости изгиба. Для протонов радиационные потери энергии исчезающе малы, и справедливо соотношение /7/. При $\gamma \gg 1$ находим / $\frac{g-2}{2}=1{,}79$/

$$\theta = (1 + \frac{g-2}{2}\gamma)\theta_0 = (1 + 1{,}91\,\mathcal{E})\theta_0 \,, \qquad /12/$$

где $\mathcal{E}$ - энергия протона, выраженная в *ГэВ*. Согласно /12/, спин протона поворачивается в ту же сторону, что и импульс. При энергии ~10 *ГэВ* угол прецессии спина в 20 раз превышает угол отклонения импульса.

Заметим, что при заданном радиусе кривизны R максимальная энергия частиц, которые еще "захватываются" в режим каналирования в изогнутом кристалле, равна $eE_{max}R$, где E_{max} - максимальная напряженность электрического поля. Поскольку $\theta_0 = y/R$, где y - длина траектории, угол поворота спина протона, соответствующий максимальной энергии, определяется только значениями E_{max} и y:

$$\theta_{max} \approx \frac{g-2}{2}\,\frac{eE_{max}y}{mc^2} \approx 5{,}79\cdot 10^{-7}\,E_{max}\,y \text{ рад.}$$

Если $E_{max} \sim 10^7$ CGSE, y = 1 *см*, R = 100 *см*, то $\mathcal{E}_{max} \sim$ 300 *ГэВ* и $\theta_{max} \sim 6$ *рад*. Это значение согласуется с оценками, содержащимися в работе /2/.

В случае каналирования позитронов радиационные потери при реально достижимых энергиях могут быть существенными*, и нужно пользоваться соотношением /6/, учитывающим изменение кинетической энергии при движении. Соответствующая расчетная формула принимает вид ($\frac{g-2}{2} \simeq 1{,}16\cdot 10^{-3}$)

*Относительные потери энергии на 1 *см* пути составляют

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^3c^6}E^2\gamma = -6{,}4\cdot 10^{-20}\,E^2\gamma.$$

$$\theta = (1 + 2{,}27\,\bar{\mathcal{E}})\theta_0 \,, \qquad /13/$$

где $\bar{\mathcal{E}} = \frac{c}{\ell}\int_0^{\ell/c}\mathcal{E}(t)\,dt$ - среднее значение энергии в *ГэВ*.

в/ Рассеяние на электростатическом /кулоновском/ потенциале

При квазиклассическом рассеянии заряженной частицы на угол θ_0 в статическом поле системы зарядов поворот вектора поляризации описывается формулой /6/. В этом случае интегрирование в /6/ проводится вдоль незамкнутой траектории, однозначно определяемой углом и плоскостью рассеяния. Ось поворота вектора поляризации, очевидно, перпендикулярна плоскости рассеяния. Если речь идет о рассеянии на малые углы, то в области движения частицы потенциальная энергия мала по сравнению с кинетической, и в соответствии с этим связь между углом вращения спина и углом рассеяния задается соотношением /7/.

Для кулоновского рассеяния последнее утверждение остается верным и при выходе за рамки чисто классического описания движения частицы в электрическом поле, которое использовалось до сих пор. В этом случае основной вклад в амплитуду рассеяния на углы $\theta_0 \ll 1$ вносит область больших прицельных параметров $\rho \gg \hbar/p$, в которой потенциальная энергия частицы гораздо меньше ее кинетической энергии. Поэтому применим эйкональный подход, и амплитуда рассеяния на малые углы может быть представлена в виде /7/:

$$a(\theta_0) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^\infty \rho\,d\rho\,\{(e^{iS(\rho)/\hbar} - 1)\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta_0\rho\cos\psi}\,d\psi\}. \qquad /14/$$

Здесь $k = p/\hbar$, $S(\rho) = -\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z)\,dz$ - разность классических интегралов действия для прямолинейной траектории с прицельным параметром ρ при наличии и отсутствии взаимодействия, ψ - угол между вектором $\vec{\rho}$, перпендикулярным импульсу частицы, и плоскостью рассеяния. Формула /14/

сохраняет смысл как при нерелятивистских, так и при релятивистских энергиях. Чтобы учесть прецессию спина в электрическом поле, умножим функцию $\exp(iS(\rho)/\hbar)$ в формуле /14/ на матрицу поворота

$$\hat{R}(\theta(\rho)) = \exp\left(-i\hat{\vec{s}}\,\frac{[\vec{k},\vec{\rho}]}{k\rho}\,\theta(\rho)\right), \qquad /15/$$

где $\theta(\rho)$ - угол вращения спина, соответствующий движению заряженной частицы по классической /близкой к прямолинейной/ траектории с прицельным параметром ρ, $\hat{\vec{s}}$ - оператор спина. Выше было показано, что угол $\theta(\rho)$ связан с углом отклонения импульса $\theta_0(\rho)$ для той же траектории соотношением /7/. С другой стороны, угол $\theta_0(\rho)$ определяется через функцию действия:

$$\theta_0(\rho) = \frac{1}{\hbar k}\,\frac{d}{d\rho}S(\rho). \qquad /16/$$

Таким образом, при условии малости углов $\theta_0(\rho)$ и $\theta(\rho)$ в формулу /14/ вместо $\exp(iS(\rho)/\hbar)$ следует подставить

$$\exp(iS(\rho)/\hbar)\cdot\hat{R}(\theta(\rho)) \approx$$

$$\approx \exp(iS(\rho)/\hbar)\left[1 - ib\,\frac{dS(\rho)}{d\rho}\cdot\frac{\cos\psi}{\hbar k}\,\hat{s}_z + ib\,\frac{dS(\rho)}{d\rho}\cdot\frac{\sin\psi}{\hbar k}\,\hat{s}_y\right], \qquad /17/$$

где

$$b = \left(\frac{g-2}{2}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \qquad /18/$$

/предполагается, что ось z направлена параллельно нормали к плоскости рассеяния, ось x - вдоль начального импульса частицы/. После интегрирования по углу ψ формула для амплидуты рассеяния принимает вид

$$\hat{A}(\theta_0) = a(\theta_0) + b\hat{s}_z\left\{\int_0^\infty J_1(k\theta_0\rho)\left[-\frac{d}{d\rho}\left(e^{iS(\rho)/\hbar}\right)\right]\rho\,d\rho\right\},$$

$$a(\theta_0) = -ik\int_0^\infty J_0(k\theta_0\rho)\left[e^{iS(\rho)/\hbar} - 1\right]\rho\,d\rho\,. \qquad /19/$$

Используя известные соотношения для функций Бесселя

$$\frac{d}{d\rho}(\rho J_1(k\theta_0\rho)) = k\theta_0\rho J_0(k\theta_0\rho), \quad \int_0^\infty J_0(k\theta_0\rho)\rho\,d\rho = \frac{2\delta(\theta_0^2)}{k^2},$$

получаем с точностью до членов $\sim\theta_0^2$

$$\hat{A}(\theta_0) = a(\theta_0)(1 - i\hat{s}_z b\theta_0). \qquad /20/$$

Таким образом, угол поворота спина вокруг оси z равен $b\theta_0$. Можно утверждать, что этот результат в области углов $\theta_0 \ll 1$, $\theta = b\theta_0 \ll 1$ не связан с какими-либо дополнительными условиями. В квазиклассическом пределе требование малости накладывается только на угол рассеяния θ_0, а угол вращения спина при ультрарелятивистских энергиях может принимать любые значения.

Подчеркнем, что наше рассмотрение не связано с использованием релятивистских уравнений и применимо к частицам с произвольным спином и произвольным гиромагнитным отношением. В случае рассеяния электронов не слишком больших энергий /$\gamma \lesssim 10^3$/ в кулоновском поле ядра с зарядом Ze мы можем пренебречь аномальным магнитным моментом электрона, и тогда, согласно /19/ и /20/*,

---

*В формуле /18/ следует положить

$$\exp(iS(\rho)/\hbar) = \exp\left(-\frac{2iZe^2}{\hbar v}\ln k\rho\right)$$

/мы опускаем множитель, приводящий к логарифмическому искажению фазы сферической волны/ и затем воспользоваться равенством /8/

$$\int_0^\infty x^{1-2iy}\,J_0(xu)\,dx = 2iy\,\frac{\Gamma(1-iy)}{\Gamma(1+iy)}\cdot\frac{1}{u^2}\exp\left(2iy\ln\frac{u}{2}\right).$$

$$A(\theta_0) = \frac{2Ze^2}{pv} \cdot \frac{1}{\theta_0^2} \cdot \frac{\Gamma(1 - i\frac{Ze^2}{\hbar v})}{\Gamma(1 + i\frac{Ze^2}{\hbar v})} \times$$

$$\times \exp(2i\frac{Ze^2}{\hbar v}\ln\frac{\theta_0}{2})[1 - i\hat{\sigma}_z \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\theta_0 + O(\theta_0^2)] , \qquad /21/$$

где $\hat{\sigma}_z$ - матрица Паули. При этом угол вращения спина

$$\theta = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\theta_0 . \qquad /22/$$

Соотношения /21/ и /22/ могут быть получены независимо на основе решения уравнения Дирака в пределе $\theta_0 \ll 1$ /в частности, они следуют из формул статьи /9/ * /. При нерелятивистских энергиях $\theta = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\theta_0$, а при ультрарелятивистских энергиях $\theta = \theta_0$, что соответствует сохранению спиральности.

В заключение отметим одно неожиданное следствие соотношения /4/: если гиромагнитное отношение удовлетворяет условию

$$+1 < g < +2,$$

то при энергии

---

* В борновском приближении при произвольных углах

$$\hat{A}(\theta_0) = (Ze^2/2pv\sin^2\frac{\theta_0}{2}) \cdot \frac{1}{2\gamma}[\gamma + 1 + (\gamma - 1)\cos\theta_0 - i\hat{\sigma}_z(\gamma-1)\sin\theta_0].$$

Это выражение в области $\theta_0 \ll 1$ согласуется с формулой /21/, взятой при значениях $\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1$.

$$\mathcal{E}_0 \quad \frac{g}{2-g} mc^2 \qquad /23/$$

электрическое поле вообще не влияет на спин частицы /угловая скорость прецессии обращается в нуль, хотя магнитный момент имеет ненулевое значение/. Это - чисто релятивистский эффект, обусловленный взаимной компенсацией "динамической" и томасовской прецессии. При $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ спин поворачивается в ту же сторону, что и импульс, при $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ - в противоположную. Условию $1 < g < 2$ удовлетворяет, прежде всего дейтрон, у которого $g = 1{,}72$, а также некоторые ядра /например ^{6}Li, у которого $g = 1{,}64$/*. Для дейтрона $\mathcal{E}_0 = 11{,}5$ *ГэВ*. Аналогичное явление возникает и в поперечном магнитном поле при условии $0 < g < 2$. Энергия, при которой вектор поляризации сохраняет неизменное направление, в этом случае равна $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \frac{2}{2-g}mc^2$ /для дейтрона $\tilde{\mathcal{E}}_0 = 13{,}4$ *ГэВ*/.

Автор выражает глубокую благодарность В.Г.Барышевскому, статья которого стимулировала появление настоящей работы, за ценное обсуждение. Автор признателен Б.Н.Валуеву, А.Л.Любимову, М.И.Подгорецкому, И.В.Полубаринову, Я.А.Смородинскому, М.И.Широкову и Э.Н.Цыганову за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsyganov E.N. Fermilab TM-682, TM-684, 1976.
2. Барышевский В.Г. Письма в ЖТФ, 1979, 5, с. 182.
3. Bargmann V., Michel L., Telegdi L. Phys.Rev.Lett., 1959, 2, p.435.
4. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1968, ч. 1, § 41.
5. Меллер К. Теория относительности, § 2.8. Атомиздат. М., 1975.

---

*В случае ядер величина g связана с так называемым "ядерным гиромагнитным отношением" формулой $g = g_{\text{яд.}}\frac{A}{Z}$ / A - число нуклонов в ядре, Z - атомный номер/.

6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, §76. "Наука", М., 1967.*
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. § 131, "Наука", М., 1974.*
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1963, с. 698.*
9. Gluckstern R.I., Lin S.R. J.Math.Phys., 1964, 5, p.1594.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1979 года.