ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 12557

А.Б.Пестов

О ТЕНЗОРНОМ ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

1979

Р2 - 12557

А.Б.Пестов

О ТЕНЗОРНОМ ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Направлено в "Journal of Physics A"

P2 - 12557

Пестов А.Б.
О тензорном волновом уравнении

В уравнение Дирака входят простейшие спинорные представления собственной группы Лоренца. Показано, что, используя низшие тензорные представления собственной группы Лоренца, также возможно построить нетривиальное релятивистское волновое уравнение. Доказано, что в число непрерывных групп тензорного волнового уравнения входит группа преобразований, изоморфная группе SU(2). Важнейшая особенность этой трехпараметрической группы заключается в ее явной связи с однородностью пространства-времени. Обоснована корректность постановки задачи о движении тензорной частицы во внешнем электромагнитном поле. Рассмотрено движение частицы в однородном магнитном поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P2 - 12557

Pestov A.B.

On Tensor Wave Equation

As is known, the Dirac equation contains the simplest spinor representations of the proper Lorentz group. It is shown that by using the lowest tensor representation of that group it is also possible to construct the nontrivial relativistic wave equation. It is proved that continuous groups of the tensor wave equation include a transformation group isomorphic to the SU(2) group; the essential property of this three-parameter group consists in its explicit relation to the homogeneity of space-time. The correct statement is justified for the problem of motion of a tensor particle in an external electromagnetic field. The particle in the uniform magnetic field is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Введение

Пусть известно, что некоторая частица состоит из двух фермионов. Предположим, что подобную частицу можно описать независимой волновой функцией в рамках лагранжева формализма. Другими словами, различного рода потенциалы взаимодействия для составляющих частицу фермионов и наглядные представления об их движении в пространстве-времени исключаются из рассмотрения. Структура составной частицы должна найти отражение только в волновом уравнении. Для пояснения высказанной точки зрения сошлемся на проблему спинового магнитного момента, которая в свое время была решена без каких-либо предположений относительно магнитных свойств электрона. Уравнение Дирака автоматически приводит к выводу о существовании у электрона спина и магнитного момента.

Чтобы выяснить трансформационные свойства волновой функции и определить ее явный вид, достаточно использовать представление о составной частице как о системе из двух спинов 1/2 в некотором фиктивном спиновом пространстве. Такое истолкование составной частицы не противоречит исходной посылке, так как оно имеет чисто квантовую природу. Случай фиксированного спина системы исключим из рассмотрения как тривиальный. Наглядно это можно представить как прецессию спинов. Далее, произведение двух спиноров трехмерного пространства приводимо и разлагается на скаляр и вектор. Таким образом, закон преобразования волновой функции по отношению к группе трехмерных вращений известен. Обратимся к группе Лоренца. Самодуальный антисимметричный тензор второго ранга (самодуальный бивектор) преобразуется при поворотах пространственных осей как трехмерный вектор. Если дополнить его четырехмерным скаляром, то получим, вообще говоря, только половину волновой функции. Действительно, необходимым требованиям удовлетворяет еще 4-вектор. Таким образом, релятивистская волновая функция частицы восьмикомпонентна и содержит в себе скаляр, 4-вектор и самодуальный бивектор. Волновое уравнение названо тензорным потому, что все составляющие волновой функции являются тензорами. Соответствующую частицу будем называть тензорной частицей.

I. Тензорное волновое уравнение

Волновое уравнение должно представлять собой линейную дифференциальную связь между компонентами скаляра ψ, самодуального бивектора $\psi_{\mu\nu}$ и 4-вектора ψ_μ, осуществляемую с помощью оператора $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$. Требование релятивистской инвариантности и условие самодуальности подчиняют тензоры ψ, ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$ следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\partial^\sigma \psi_\sigma = \frac{mc}{\hbar}\psi, \\ &\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu - i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha \psi^\beta = \frac{mc}{\hbar}\psi_{\nu\mu}, \qquad (\mathrm{I}) \\ &\partial^\sigma \psi_{\sigma\mu} - \partial_\mu \psi = \frac{mc}{\hbar}\psi_\mu, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - антисимметричный единичный псевдотензор с $\varepsilon_{0123} = 1$. Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ $(g^{00} = 1,\ g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1)$. Волновую функцию тензорной частицы удобно записывать в виде

$$\Psi = (\psi,\ \psi_\mu,\ \psi_{\mu\nu}),$$

с очевидными законами сложения и умножения на число.

Из второго уравнения системы следует, что

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\,\psi_{\mu\nu}, \qquad (2)$$

где $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = 1/2\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}$ - бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$. Соотношение (2) выражает условие самодуальности бивектора.

Подчеркнем, что тензорное волновое уравнение не инвариантно относительно пространственной инверсии. Действительно, самодуальный бивектор образует геометрическую величину с тремя компонентами относительно собственной группы Лоренца и не может преобразовываться по представлению полной группы Лоренца, которая включает пространственное отражение.

В рамках волнового уравнения скаляр и самодуальный бивектор составляют единую величину, имеющую, как и вектор, четыре компоненты. Эта величина и 4-вектор входят в уравнение симметрично, подобно тому как спиноры первого и второго рода вписываются в уравнение Дирака в спинорном представлении. Поэтому уравнения (I) позволяют исключить четыре функции. Исключив ψ, $\psi_{\mu\nu}$ получаем

$$\Box\,\psi_\mu = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi_\mu,$$

откуда видно, что m - масса частицы.

В импульсном пространстве волновое уравнение изображается однородной линейной системой

$$\begin{aligned} &p^\sigma \psi_\sigma(p) = imc\,\psi(p), \\ &p_\mu \psi_\nu(p) - p_\nu \psi_\mu(p) - i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha \psi^\beta(p) = imc\,\psi_{\nu\mu}(p), \qquad (3) \\ &p^\sigma \psi_{\sigma\mu}(p) - p_\mu \psi(p) = imc\,\psi_\mu(p), \end{aligned}$$

нетривиальная совместность которой выражается соотношением $p^2 = m^2c^2$. Исследование системы (3) начнем с двух важных тождеств, которые следуют из условия самодуальности (2).

Можно показать, что

$$i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\sigma}\psi^{\sigma\beta}=\delta^{\beta}_{\mu}\psi_{\nu\alpha}+\delta^{\beta}_{\nu}\psi_{\alpha\mu}+\delta^{\beta}_{\alpha}\psi_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Тождество

$$\tilde{F}^{\mu\sigma}\tilde{H}_{\nu\sigma}\equiv-\tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}F^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}+H^{\mu\sigma}F_{\nu\sigma}$$

справедливо для любых бивекторов $F_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$. Следовательно,

$$L^{\mu\sigma}N_{\nu\sigma}+N^{\mu\sigma}L_{\nu\sigma}=\tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}L^{\alpha\beta}N_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

где $L_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ – самодуальные бивекторы.

Рассмотрим отображение $L:\Psi(p)\to L\Psi(p)=\Psi'(p)$, волновой функции на себя, задаваемое самодуальным бивектором $L_{\alpha\beta}(p)$:

$$\begin{aligned}
&\psi'(p)=\tfrac{1}{4}L^{\alpha\beta}(p)\,\psi_{\alpha\beta}(p),\\
&\psi'_{\mu\nu}(p)=\tfrac{1}{2}L_{\mu}{}^{\sigma}(p)\psi_{\nu\sigma}(p)-\tfrac{1}{2}L_{\nu}{}^{\sigma}(p)\psi_{\mu\sigma}(p)-L_{\mu\nu}(p)\,\psi(p),\\
&\psi'_{\mu}(p)=-L_{\mu}{}^{\sigma}(p)\,\psi_{\sigma}(p),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $L_{\mu}{}^{\sigma}(p)=L_{\mu\nu}(p)g^{\sigma\nu}$. Принимая во внимание (4), нетрудно убедиться, что $\psi'_{\mu\nu}(p)$ – самодуальный бивектор. Легко заметить, что линейное преобразование (6) приводимо. Одно из двух инвариантных подпространств образуют скаляр и самодуальный бивектор, которые и здесь выступают как единое целое. Если обозначить через N оператор, задаваемый самодуальным бивектором $N_{\alpha\beta}(p)$, то, согласно (5), (6), имеет место соотношение

$$LN+NL=-(L,N), \tag{7}$$

где

$$(L,N)=1/2\;L^{\alpha\beta}(p)N_{\alpha\beta}(p).$$

С учетом (2), (4), (6) получаем

$$\begin{aligned}
&p^{\sigma}\psi'_{\sigma}(p)=\tfrac{1}{4}L^{\nu\mu}(p)\{p_{\mu}\psi_{\nu}(p)-p_{\nu}\psi_{\mu}(p)-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^{\alpha}\psi^{\beta}(p)\},\\
&p_{\mu}\psi'_{\nu}(p)-p_{\nu}\psi'_{\mu}(p)-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^{\alpha}\psi'^{\beta}(p)=L_{\mu\nu}(p)\{p^{\sigma}\psi_{\sigma}(p)\}+\\
&+\tfrac{1}{2}L_{\nu}{}^{\sigma}(p)\{p_{\sigma}\psi_{\mu}(p)-p_{\mu}\psi_{\sigma}(p)-i\varepsilon_{\sigma\mu\alpha\beta}p^{\alpha}\psi^{\beta}(p)\}-\\
&-\tfrac{1}{2}L_{\mu}{}^{\sigma}(p)\{p_{\sigma}\psi_{\nu}(p)-p_{\nu}\psi_{\sigma}(p)-i\varepsilon_{\sigma\nu\alpha\beta}p^{\alpha}\psi^{\beta}(p)\},\\
&p^{\sigma}\psi'_{\sigma\mu}(p)-p_{\mu}\psi'(p)=-L_{\mu}{}^{\nu}(p)\{p^{\sigma}\psi_{\sigma\nu}(p)-p_{\nu}\psi(p)\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в пространстве решений волнового уравнения действует группа преобразований. Чтобы установить структуру этой группы и решить систему (3), выберем в импульсном пространстве локальный ортонормированный базис $t^{i}_{\mu}(p)$. Верхний, латинский индекс нумерует векторы базиса и пробегает значения 0,I,2,3. Орт $t^{0}_{\mu}(p)$ направим по p_{μ},

$$t^{0}_{\mu}(p)=p_{\mu}/mc. \tag{8}$$

По определению базиса

$$g^{\mu\nu}t^{i}_{\mu}(p)\,t^{j}_{\nu}(p)=g^{ij}, \tag{9}$$

условие полноты базиса

$$g_{kj}\,t^{k}_{\mu}(p)\,t^{j}_{\nu}(p)=g_{\mu\nu}. \tag{I0}$$

Приведем еще важное соотношение

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}t^{i}_{\mu}(p)t^{j}_{\nu}(p)t^{k}_{\alpha}(p)t^{s}_{\beta}(p)=\varepsilon^{ijks}, \tag{II}$$

которое также потребуется.

Обозначим через $f^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)$ бивекторы

$$f^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)=f^{\kappa}_{\mu}(p)\,f^{j}_{\nu}(p)-f^{\kappa}_{\nu}(p)\,f^{j}_{\mu}(p),$$

и через $Z^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)=-Z^{j\kappa}_{\mu\nu}(p)$ самодуальные бивекторы

$$Z^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)=f^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)-i\,\tilde{f}^{\kappa j}_{\mu\nu}(p).$$

Как показано, бивекторы $Z^{\kappa j}_{\mu\nu}(p)$ задают операторы $Z_{\kappa j}=-Z_{j\kappa}$, действующие в пространстве решений волнового уравнения. Из (9)-(II) следует, что операторы $Z_{\kappa j}$ линейно зависимы:

$$Z_{12}=i\,Z_{03}\,,\quad Z_{23}=i\,Z_{01}\,,\quad Z_{31}=i\,Z_{02}.$$

Положим, как обычно,

$$Z_1=Z_{23}\,,\quad Z_2=Z_{31}\,,\quad Z_3=Z_{12}.$$

После громоздких вычислений приходим к структурным соотношениям для операторов Z_a, $a=1,2,3$,

$$Z_a Z_b+Z_b Z_a=-2\,\delta_{ab},$$
$$Z_a Z_b=-\delta_{ab}-\varepsilon_{abc}Z_c, \qquad (12)$$

где ε_{abc} - единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Операторы $S_a=i/2\,Z_a$ удовлетворяют соотношениям момента

$$S_a S_b-S_b S_a=i\,\varepsilon_{abc}\,S_c. \qquad (13)$$

Таким образом, искомая группа симметрии изоморфна группе $SU(2)$. Эту группу будем называть группой внутреннего спина, и, соответственно, векторный оператор $\vec{S}=(S_1,\,S_2,\,S_3)$ - внутренним спином.

Разложим $\psi_\mu(p)$, $\psi_{\mu\nu}(p)$ по базису $f^{i}_{\mu}(p)$

$$\psi_\mu(p)=a_\kappa(p)\,f^{\kappa}_{\mu}(p)\,,\quad \psi_{\mu\nu}(p)=a_{\kappa j}(p)\,f^{\kappa}_{\mu}(p)\,f^{j}_{\nu}(p). \qquad (14)$$

Амплитуды $a_{\kappa j}(p)$ в силу (2), (9)-(II), подчиняются условиям

$$a_{\kappa j}(p)=-a_{j\kappa}(p)\,,\quad i\,a_{\kappa j}(p)=1/2\,\varepsilon_{\kappa j i s}\,a^{is}(p). \qquad (15)$$

Подставляя (14) в (3) и учитывая (8), (15), получаем

$$a_o(p)=i\,\psi(p),\; a_\kappa(p)=i\,a_{\kappa o}(p), \text{при} \quad \kappa=1,2,3.$$

Потребуем, чтобы волновая функция $\Psi(p)$ была собственной функцией третьей проекции внутреннего спина. В результате приходим к соотношениям

$$a_1(p)=\pm\, i\,a_2(p)\,,\quad a_o(p)=\pm\, a_3(p).$$

Следовательно, общее решение уравнений (3) можно представить в виде

$$\psi^{\lambda}_{\mu}(p)=a^{\lambda}(p)\,h^{\lambda}_{\mu}(p)+b^{\lambda}(p)\,q^{\lambda}_{\mu}(p),$$
$$\psi^{\lambda}_{\mu\nu}(p)=-a^{\lambda}(p)\,Z^{\lambda}_{\mu\nu}(p)-b^{\lambda}(p)\,Z^{12}_{\mu\nu}(p),$$
$$\psi^{\lambda}(p)=-i\,b^{\lambda}(p),$$

где $\lambda=+1$, если собственное значение S_3 равно 1/2 и $\lambda=-1$, если собственное значение S_3 равно -1/2;

$$h^{\lambda}_{\mu}(p)=f^{1}_{\mu}(p)-i\lambda f^{2}_{\mu}(p),\quad q^{\lambda}_{\mu}(p)=f^{o}_{\mu}(p)+\lambda f^{3}_{\mu}(p),\quad Z^{\lambda}_{\mu\nu}(p)=Z^{23}_{\mu\nu}(p)-i\lambda Z^{31}_{\mu\nu}(p).$$

Векторы $\psi^{+1}_{\mu}(p)$, $\psi^{-1}_{\mu}(p)$, очевидно, изотропны.

2. Групповая структура волнового уравнения

Лагранжиан тензорного волнового уравнения, инвариантный относительно калибровочного преобразования $\Psi(x)\to \exp[i\omega]\,\Psi(x)$, нельзя построить из компонент только волновой функции $\Psi(x)$, так как $\psi_{\mu\nu}\,\overline{\psi}^{\mu\nu}\equiv 0$. Черта обозначает комплексное сопряжение. Необходимо независимо ввести волновую функцию

$$\Phi=(\varphi\,,\;\varphi_\mu\,,\;\varphi_{\mu\nu}),$$

где $\varphi_{\mu\nu}$ - антисамодуальный бивектор, то есть такой, что

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}=-i\,\varphi_{\mu\nu}. \qquad (16)$$

Волновая функция Φ подчиняется системе уравнений

$$\partial^\sigma \varphi_\sigma = \frac{mc}{\hbar}\varphi,$$
$$\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha \varphi^\beta = \frac{mc}{\hbar}\varphi_{\nu\mu},$$
$$\partial^\sigma \varphi_{\sigma\mu} - \partial_\mu \varphi = \frac{mc}{\hbar}\varphi_\mu, \qquad (17)$$

совместной с условием дуальности (16).

Уравнения (1), (17) могут быть получены вариационной процедурой из лагранжиана

$$\mathcal{L}_0 = \bar\psi^\mu \partial_\mu \varphi + \bar\psi^{\mu\nu}\partial_\mu \varphi_\nu + \bar\varphi^\mu \partial_\mu \psi + \bar\varphi^{\mu\nu}\partial_\mu \psi_\nu +$$
$$+ \frac{mc}{\hbar}\left(\bar\psi\varphi + \bar\psi^\mu \varphi_\mu + \frac{1}{4}\bar\psi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}\right) + \text{к.с.} \qquad (18)$$

Лагранжиан (18) инвариантен относительно глобального преобразования

$$\Psi(x) \to z\,\Psi(x), \quad \Phi(x) \to z/|z|^2\,\Phi(x), \qquad (19)$$

где z - комплексное число. Представление (19) можно обобщить на случай локальных преобразований. Полагая $z = \exp\left[\frac{ie}{\hbar c}\omega + \frac{q}{\hbar c}\delta\right]$, будем считать ω, δ функциями точки x, записывая

$$\Psi(x) \to \exp\left[\frac{ie}{\hbar c}\omega(x) + \frac{q}{\hbar c}\delta(x)\right]\Psi(x),$$
$$\Phi(x) \to \exp\left[\frac{ie}{\hbar c}\omega(x) - \frac{q}{\hbar c}\delta(x)\right]\Phi(x). \qquad (20)$$

Лагранжиан $\mathcal{L}_0$ в общем случае не будет инвариантен относительно преобразования (20). Инвариантность можно восстановить, заменив всюду градиент ∂_μ так называемой ковариантной производной

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu - \frac{q}{\hbar c}B_\mu, \quad \Delta_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu + \frac{q}{\hbar c}B_\mu,$$

причем оператор ∇_μ действует на $\Psi(x)$, а производная Δ_μ на $\Phi(x)$. Инвариантный лагранжиан можно представить

в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{e}{\hbar c}A^\mu J^e_\mu - \frac{q}{\hbar c}B^\mu J^q_\mu, \qquad (21)$$

где J^e_μ, J^q_μ - сохраняющиеся токи:

$$J^e_\mu = i\left\{\psi\bar\varphi_\mu + \varphi\bar\psi_\mu + \psi^\sigma\bar\varphi_{\mu\sigma} + \varphi^\sigma\bar\psi_{\mu\sigma}\right\} + \text{к.с.}, \qquad (22)$$

$$J^q_\mu = \left\{\psi\bar\varphi_\mu - \varphi\bar\psi_\mu + \psi^\sigma\bar\varphi_{\mu\sigma} - \varphi^\sigma\bar\psi_{\mu\sigma}\right\} + \text{к.с.}. \qquad (23)$$

Обратимся к физическому смыслу констант связи e и q. Число e следует отождествить с электрическим зарядом. Действительно, составим уравнения второго порядка для волновой функции Ψ в присутствии внешних полей A_μ, B_μ. Волновое уравнение при наличии внешних сил получается заменой в уравнении для свободной частицы градиента ∂_μ на ковариантную производную

$$\nabla^\sigma \psi_\sigma = \frac{mc}{\hbar}\psi,$$
$$\nabla_\mu \psi_\nu - \nabla_\nu \psi_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^\alpha \psi^\beta = \frac{mc}{\hbar}\psi_{\nu\mu}, \qquad (24)$$
$$\nabla^\sigma \psi_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \psi = \frac{mc}{\hbar}\psi_\mu.$$

Исключая ψ, $\psi_{\mu\nu}$, получаем

$$\left(\nabla^\sigma\nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_\mu = \frac{ie}{\hbar c}(F_{\mu\sigma} + i\tilde F_{\mu\sigma})\psi^\sigma + \frac{q}{\hbar c}(H_{\mu\sigma} + i\tilde H_{\mu\sigma})\psi^\sigma, \qquad (25)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Проделав то же самое с ψ_μ, получаем с учетом (4)

$$(\nabla^\sigma \nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi = \frac{ie}{2\hbar c} F_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} + \frac{g}{2\hbar c} H_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu},$$

$$(\nabla^\sigma \nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi_{\mu\nu} = \frac{ie}{\hbar c}(F_{\mu\sigma}\psi^\sigma{}_\nu - F_{\nu\sigma}\psi^\sigma{}_\mu) +$$

$$+\frac{g}{\hbar c}(H_{\mu\sigma}\psi^\sigma{}_\nu - H_{\nu\sigma}\psi^\sigma{}_\mu) - \frac{ie}{\hbar c}(F_{\mu\nu} - i\tilde{F}_{\mu\nu})\psi -$$

$$-\frac{g}{\hbar c}(H_{\mu\nu} - i\tilde{H}_{\mu\nu})\psi,$$

где $\psi^\sigma{}_\mu = g^{\sigma\nu}\psi_{\nu\mu}$. Запишем, например, уравнение (25) в трехмерной векторной форме в отсутствии внешнего поля B_μ. Полагая,

$$\chi = -i\psi_0, \quad \vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3),$$

имеем:

$$\{-(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0)^2 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^4\}\chi = e\hbar c(\vec{E} - i\vec{H})\cdot\vec{\Psi}, \quad (26)$$

$$\{-(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0)^2 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^4\}\vec{\Psi} = -e\hbar c(\vec{E} - i\vec{H})\chi - e\hbar c[(\vec{E} - i\vec{H})\times\vec{\Psi}] \quad (27)$$

Выражения (26), (27) отличаются от релятивистского обобщения уравнения Шредингера членами, содержащими векторы электрического и магнитного полей. Добавочные члены отражают обычную спиновую структуру тензорной частицы. Укажем попутно нерелятивистский предел волнового уравнения $(B_\mu = 0)$:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2\chi - eA_0\chi + \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{H}\cdot\vec{\Psi},$$

$$i\hbar\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2\vec{\Psi} - eA_0\vec{\Psi} - \frac{ie\hbar}{2mc}[\vec{H}\times\vec{\Psi}] - \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{H}\chi.$$

Продолжая, рассмотрим отображение пары Ψ, Φ на себя $\Psi' = U\Phi$, $\Phi' = U\Psi$, задаваемое векторным полем U_μ:

$$\begin{cases} \psi' = U^\sigma \varphi_\sigma, \\ \psi'_\mu = U^\sigma \varphi_{\mu\sigma} - U_\mu \varphi, \\ \psi'_{\mu\nu} = U_\mu \varphi_\nu - U_\nu \varphi_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U^\alpha \varphi^\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi' = U^\sigma \psi_\sigma, \\ \varphi'_\mu = U^\sigma \psi_{\mu\sigma} - U_\mu \psi, \\ \varphi'_{\mu\nu} = U_\mu \psi_\nu - U_\nu \psi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U^\alpha \psi^\beta. \end{cases}$$

Если вектор U_μ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\nu U_\mu = 0, \quad (28)$$

то

$$\nabla^\sigma \psi'_\sigma = U^\mu(\nabla^\sigma \varphi_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \varphi),$$

$$\nabla_\mu \psi'_\nu - \nabla_\nu \psi'_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^\alpha \psi'^\beta = U_\nu(\nabla^\sigma \varphi_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \varphi) -$$

$$-U_\mu(\nabla^\sigma \varphi_{\sigma\nu} - \nabla_\nu \varphi) + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} U^\alpha(\nabla_\sigma \varphi^{\sigma\beta} - \nabla^\beta \varphi),$$

$$\nabla^\sigma \psi'_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \psi' = U^\sigma(\nabla_\sigma \varphi_\mu - \nabla_\mu \varphi_\sigma + i\varepsilon_{\sigma\mu\alpha\beta}\nabla^\alpha \varphi^\beta) - U_\mu \nabla^\sigma \varphi_\sigma.$$

Выпишем волновое уравнение для Φ

$$\Delta^\sigma \varphi_\sigma = \frac{mc}{\hbar}\varphi,$$

$$\Delta_\mu \varphi_\nu - \Delta_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Delta^\alpha \varphi^\beta = \frac{mc}{\hbar}\varphi_{\nu\mu},$$

$$\Delta^\sigma \varphi_{\sigma\mu} - \Delta_\mu \varphi = \frac{mc}{\hbar}\varphi_\mu. \quad (29)$$

Видим, что при $B_\mu = 0$, когда $\nabla_\mu = \Delta_\mu$, $\Psi' = U\Phi$ будет решением уравнений (24). Так же показывается, что $\Phi' = U\Psi$ будет решением уравнений (29). Таким образом, волновое уравнение для тензорной частицы во внешнем электромагнитном поле инвариантно относительно введенного преобразования.

Из установленной симметрии немедленно следует уравнение непрерывности:

$$\partial^\mu V_\mu = 0, \quad (30)$$

где $V_\mu = u^\sigma V_{\sigma\mu}$. Тензор $V_{\mu\nu}$ составлен из членов, квадратичных по компонентам волновой функции Ψ

$$V_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\bar\psi\psi - \bar\psi_\sigma\psi^\sigma) + \bar\psi_\mu\psi_\nu + \bar\psi_\nu\psi_\mu + \bar\psi_{\mu\sigma}\psi^\sigma{}_\nu + \bar\psi\,\psi_{\mu\nu} + \bar\psi_{\mu\nu}\psi - i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar\psi^\alpha\psi^\beta.$$

Подобный тензор существует, конечно, и для Φ. Тензор $V_{\mu\nu}$ интересен и сам по себе, так как на решениях уравнений (24)

$$\partial^\sigma V_{\mu\sigma} = \frac{2q}{\hbar c} B^\sigma V_{\mu\sigma}. \qquad (31)$$

Соотношение (31) несколько проясняет роль векторного поля B_μ. Вернемся, однако, к уравнению (30), из которого следует, что интеграл по трехмерной, пространственно-подобной поверхности π

$$I_\pi = \int\limits_\pi V_\mu\, d\Omega^\mu$$

не зависит от поверхности π. Направим вектор u_μ по оси времени и выберем в качестве гиперповерхности π 3-плоскость $t = const$. Интеграл

$$I(t) = \int V_{00}\, d^3x$$

не зависит от времени. Величина $I(t)$ существенно положительна, поскольку

$$V_{00} = \bar\psi\psi + \sum_{K=0}^{3}(\bar\psi_K\psi_K + \bar\psi_{0K}\psi_{0K}).$$

Итак, для тензорного волнового уравнения задача о движении частицы во внешнем электромагнитном поле поставлена корректно. Заканчивая на этом обсуждение темы электрического заряда, перейдем к вопросу о константе q.

Если трактовать тензорную частицу как систему из двух спинов 1/2, то ясно, что хотя бы один из спинов должен нести электрический заряд. Так как спины вращаются, то можно сказать, что второй заряд q возникает в результате движения электрического заряда в спиновом пространстве.

Отсюда следует, что константа связи поля B_μ - **явление сугубо** квантовое, и поэтому в принципе не допускает классической интерпретации. Как и спин, второй заряд исчезает при переходе к пределу $\hbar \to 0$.

В целом укажем, что преобразования

$$C_e: \Psi \to C_e\Psi = \bar\Psi;\ \Phi \to C_e\Phi = \bar\Phi,$$
$$C_q: \Psi \to C_q\Psi = \Phi;\ \Phi \to C_q\Phi = \Psi$$

задают операции сопряжения зарядов. Располагая выражениями (22), (23), нетрудно убедиться, что преобразование C_e меняет знак у тока J^e_μ, оставляя вектор J^q_μ неизменным, а отображение C_q действует в обратном порядке.

Определенная в первом разделе группа внутреннего спина служит также группой внутренней симметрии тензорного волнового уравнения. Лагранжиан (21) инвариантен относительно глобального преобразования

$$\Psi(x) \to exp\left[\tfrac{1}{2}\tfrac{q}{\hbar c}\,\vec\Sigma\cdot\vec\omega\right]\Psi(x),$$
$$\Phi(x) \to exp\left[\tfrac{1}{2}\tfrac{q}{\hbar c}\,\vec\Sigma^*\cdot\vec\omega\right]\Phi(x), \qquad (32)$$

где $\vec\omega$ - произвольный постоянный вектор, а компоненты вектора $\vec\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ суть операторы, удовлетворяющие соотношениям (12). Операторы Σ_a, $(a=1,2,3)$ задаются такой же конструкцией, что и операторы Z_a, только действуют они на волновую функцию в координатном пространстве. Нет нужды переписывать соответствующие формулы. В случае необходимости - процедура проста. Локальным ортам $f^i_\mu(p)$ ставим в соответствие постоянные, не зависящие от x, орты e^i_μ, направленные по осям декартовых координат x, y, z, t. Дальше все совершается заменой $f^i_\mu(p)$ на e^i_μ и $\Psi(p)$ на $\Psi(x)$. Сопряженные **операторы** Σ^*_a **определены на** $\Phi(x)$ и $\bar\Psi(x)$ и удовлетворяют тем же соотношениям структуры, что и Σ_a.

В том, что лагранжиан (21) инвариантен относительно преобразования (32), проще всего убедиться с помощью тождеств

$$\psi^{\sigma}(L\bar{\varphi}_{\sigma}) \equiv -(L\psi_{\sigma})\bar{\varphi}^{\sigma}$$

$$\psi(L\bar{\varphi}) + \frac{1}{4}\psi^{\mu\nu}(L\bar{\varphi}_{\mu\nu}) \equiv -(L\psi)\bar{\varphi} - \frac{1}{4}(L\psi_{\mu\nu})\bar{\varphi}^{\mu\nu},$$

где L - оператор, заданный соотношениями (6). Запишем уравнения (24), (29) символически в виде $D\Psi = \frac{mc}{\hbar}\Psi$, $D^{*}\Phi = \frac{mc}{\hbar}\Phi$. Следует также иметь в виду, что $D\Sigma_a - \Sigma_a D = 0$, $D^{*}\Sigma_a^{*} - \Sigma_a^{*} D^{*} = 0$, $a = 1,2,3$.

Если считать $\vec{\omega}$ функцией пространственно-временных координат, то лагранжиан, инвариантный относительно локального преобразования

$$\Psi(x) \to \exp\left[\frac{1}{2}\frac{g}{\hbar c}\vec{\Sigma}\cdot\vec{\omega}(x)\right]\Psi(x),$$

$$\Phi(x) \to \exp\left[\frac{1}{2}\frac{g}{\hbar c}\vec{\Sigma}^{*}\cdot\vec{\omega}(x)\right]\Phi(x),$$

получается заменой в лагранжиане $\mathcal{L}$ операторов ∇_μ, Δ_μ на ковариантные производные

$$D_\mu \equiv \nabla_\mu - \frac{1}{2}\frac{g}{\hbar c}\vec{\Sigma}\cdot\vec{W}_\mu, \quad D_\mu^{*} \equiv \Delta_\mu - \frac{1}{2}\frac{g}{\hbar c}\vec{\Sigma}^{*}\cdot\vec{W}_\mu,$$

где $\vec{W}_\mu$ - поле Янга - Миллса. Таким образом, внутренний спин тензорной частицы служит источником поля Янга - Миллса.

Закон сохранения внутреннего спина глубоко связан со свойствами пространства - времени. Как отмечалось, векторы e^{i}_{μ} постоянны, то есть удовлетворяют уравнению (28). В плоском пространстве-времени это уравнение имеет четыре линейно независимых решения, за которые и были выбраны орты e^{i}_{μ}. В искривленном пространстве-времени уравнение $u_{\mu;\nu} = 0$, вообще говоря, не имеет решений. В этом месте придется поставить точку, так как всякая попытка исследовать обнаружившуюся связь поля Янга-Миллса с гравитационным полем увела бы нас слишком далеко в область общей теории относительности.

Операторы Σ_a обладают важным свойством - они коммутируют с операторами сдвига,

$$\Sigma_a P_\mu = P_\mu \Sigma_a. \qquad (33)$$

Генераторы группы Лоренца $M_{\alpha\beta}$ естественно задать как производные Ли[2] от ψ, ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$ вдоль соответствующих векторов Киллинга. При этом для P_μ, $M_{\alpha\beta}$ получаем структурные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре. Как выяснилось, операторы Σ_a не коммутируют с генераторами $M_{\alpha\beta}$. Таково главное препятствие на пути к решению принципиально важной задачи о движении тензорной частицы в центральном поле. Соотношений (33), однако, оказалось достаточно для решения вопроса о движении частицы в однородном магнитном поле.

3. Частица в магнитном поле

Уравнение для волновой функции Ψ, описывающей стационарные состояния частицы в постоянном магнитном поле, запишем в трехмерной векторной форме

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\psi - \hbar c\,\mathrm{div}\,\vec{\varphi} + ie\vec{A}\cdot\vec{\varphi} = mc^2\chi,\\
&\varepsilon\chi - \hbar c\,\mathrm{div}\,\vec{\Psi} + ie\vec{A}\cdot\vec{\Psi} = mc^2\psi,\\
&\varepsilon\vec{\Psi} + \hbar c\,\mathrm{rot}\,\vec{\Psi} - ie[\vec{A}\times\vec{\Psi}] + \hbar c\,\mathrm{grad}\,\chi - ie\vec{A}\chi = -mc^2\vec{\varphi},\\
&\varepsilon\vec{\Phi} - \hbar c\,\mathrm{rot}\,\vec{\varphi} + ie[\vec{A}\times\vec{\varphi}] + \hbar c\,\mathrm{grad}\,\psi - ie\vec{A}\psi = -mc^2\vec{\Psi},
\end{aligned} \qquad (34)$$

где $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\psi_{23}, \psi_{31}, \psi_{12})$; 3- скаляр χ и 3- вектор $\vec{\Psi}$ определены выше.

Соответственно и преобразование (6) представим в виде

$$\psi' = \vec{\ell}\cdot\vec{\varphi}, \quad \vec{\varphi}' = -\vec{\ell}\psi - [\vec{\ell}\times\vec{\varphi}],$$

$$\chi' = -\vec{\ell}\cdot\vec{\Psi}, \quad \vec{\Psi}' = \vec{\ell}\chi - [\vec{\ell}\times\vec{\Psi}], \qquad (35)$$

где

$$\vec{\ell} = (L_{23}, L_{31}, L_{12}).$$

Исключив из (34) ψ и $\vec{\varphi}$, придем к уравнениям второго порядка для определения χ, $\vec{\Psi}$:

$$\Lambda\chi = ie\hbar c\,\vec{H}\cdot\vec{\Psi}$$

$$\Lambda\vec{\Psi} = -ie\hbar c\,\{\vec{H}\chi + \vec{H}\times\vec{\Psi}\}, \qquad (36)$$

где $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$ – вектор магнитного поля,

$$\Lambda = \varepsilon^2 - m^2c^4 + \hbar^2c^2\Delta - 2ie\hbar c(\vec{A}\cdot\mathrm{grad}) - e^2(\vec{A}\vec{A}) - ie\hbar c\,\mathrm{div}\vec{A}.$$

Разложим векторы $\vec{\varphi}$, $\vec{\Psi}$ по циклическому базису /3/

$$\vec{\varphi} = \varphi^{+1}\vec{e}_{+1} + \varphi^{0}\vec{e}_{0} + \varphi^{-1}\vec{e}_{-1}, \quad \vec{\Psi} = \psi^{+1}\vec{e}_{+1} + \psi^{0}\vec{e}_{0} + \psi^{-1}\vec{e}_{-1}.$$

Третью проекцию внутреннего спина $S_3 = -i/2\Sigma_3$ зададим вектором $\vec{e}_0$, то есть положим в (35) $\vec{\ell} = \vec{e}_0$. Тогда решение уравнения $S_3\Psi = 1/2\Psi$ есть

$$\vec{\Psi} = \psi^{+1}\vec{e}_{+1} + \psi^{0}\vec{e}_{0}, \quad \chi = i\psi^{0},$$

$$\vec{\varphi} = \varphi^{+1}\vec{e}_{+1} + \varphi^{0}\vec{e}_{0}, \quad \psi = -i\varphi^{0}.$$

Предполагая, что однородное магнитное поле направлено вдоль оси z, $\vec{H} = \mathcal{H}\vec{e}_0$, векторный потенциал выберем таким:

$$\vec{A} = \frac{\mathcal{H}y}{\sqrt{2}}(\vec{e}_{+1} - \vec{e}_{-1}).$$

Подставив эти выражения в (36), получим следующие уравнения для определения ψ^{+1}, χ

$$\{\varepsilon^2 - m^2c^4 + \hbar^2c^2\Delta + 2ie\hbar c\,\mathcal{H}y\frac{\partial}{\partial x} - e^2\mathcal{H}^2y^2\}\chi = e\hbar c\,\mathcal{H}\chi,$$

$$\{\varepsilon^2 - m^2c^4 + \hbar^2c^2\Delta + 2ie\hbar c\,\mathcal{H}y\frac{\partial}{\partial x} - e^2\mathcal{H}^2y^2\}\psi^{+1} = -e\hbar c\,\mathcal{H}\psi^{+1}. \qquad (37)$$

Компоненты φ^{+1}, ψ находятся с помощью (34). Уравнения (37) встречались в литературе. Поэтому выпишем сразу соотношение, определяющее энергию тензорной частицы

$$\varepsilon^2 = m^2c^4 + 2e\hbar c\,\mathcal{H}n + p_z^2c^2,$$

где $n = 1,2,3,\ \dots,$ p_z – импульс частицы вдоль $\vec{H}$. Уровни энергии, соответствующие собственному значению – 1/2, будут такими же. Естественный результат, если учесть, что внутренний спин служит источником поля Янга – Миллса.

Автор глубоко благодарен В.А. Мещерякову, Н.А. Черникову, Б.М. Барбашову, А.Б. Говоркову, Р.В. Джолосу, Б.Н. Захарьеву, В.Б. Приезжеву за конструктивные замечания.

Литература:

1. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. "Наука", М., 1965.
2. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
3. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, 34, 1; ОИЯИ, Р2-9842, Дубна, 1976; ОИЯИ, Р2-11630, Р2-12010, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1979 года.