объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12471

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

ОБОБЩЕНИЕ СТРУННОЙ МОДЕЛИ В РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

1979

P2 - 12471

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

ОБОБЩЕНИЕ СТРУННОЙ МОДЕЛИ В РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Направлено на Международный семинар по проблемам физики высоких энергий и теории поля /Протвино, 1979/

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. P2 - 12471

Обобщение струнной модели в рамках геометрического подхода

Предложена модель одномерного протяженного релятивистского объекта, движение которого определяется требованием, чтобы покрываемая им поверхность в пространстве Минковского имела постоянную среднюю кривизну H. Частным случаем таких поверхностей является мировая поверхность релятивистской струны /минимальная поверхность с $H=0$ /. С помощью методов дифференциальной геометрии исследуется простейший случай, когда поверхность с постоянной средней кривизной вложена в трехмерное псевдоевклидово пространство. Показано, что сеть линий кривизны на рассматриваемой поверхности является одновременно изометрической системой координат. В этом случае система уравнений на коэффициенты квадратичных форм поверхности сводится к одному нелинейному уравнению $\phi_{\tau\tau} - \phi_{\sigma\sigma} = H \,\mathrm{sh}\, \phi$, которое является условием совместности деривационных формул Гаусса-Вейнгартена. С помощью этих формул найдена пара операторов Лакса. Поставлена и решена спектральная задача рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. P2 - 12471

Generalization of the Relativistic String Model in the Geometrical Approach

We present a model of the one-dimensional extended relativistic object whose motion is defined by the requirement that its timetrack in Minkowsky space is a surface of the constant mean curvature H. The world surface of the relativistic string is a particular case of such surfaces, namely, minimal surface with $H=0$. By the differential geometry methods the theory of the proposed object moving in three-dimensional space-time is reduced to one nonlinear equation $\phi_{\tau\tau} - \phi_{\sigma\sigma} = H \,\mathrm{sh}\, \phi$. In the theory under consideration, there naturally arises the pair of Lax's operators needed to solve this nonlinear equation by the inverse scattering method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. В физике элементарных частиц релятивистская струна /1-3/ является одной из простейших моделей, качественно объясняющих механизм удержания кварков в адронах /4,5/. В последнее время интерес к этой модели стимулируется исследованием полей Янга-Миллса с помощью функционалов, заданных на контурах. В этом подходе уравнения релятивистской струны возникают как одно из приближений в теории Янга-Миллса /6,7/. Имея в виду хорошо известные трудности в обычной струнной модели, мы предлагаем одну из возможных ее модификаций, которая основывается на геометрической формулировке данной задачи.

В работах /8,9/ релятивистская струна рассматривалась в так называемом геометрическом подходе, когда в качестве динамических переменных выбирались коэффициенты основных квадратичных форм мировой поверхности струны, а не ее радиус-вектор. В этом случае для изучения динамики системы применялись методы дифференциальной геометрии, а также то обстоятельство, что мировая поверхность струны является минимальной, т.е. ее средняя кривизна равна нулю. Представляется естественным в качестве обобщения модели релятивистской струны в рамках геометрического подхода рассмотреть более общий класс поверхностей с постоянной средней кривизной.

2. Напомним кратко основные положения обычной теории релятивистской струны /1-3/. Функция действия в этой модели берется в следующем виде:

$$S = -\gamma \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} = -\gamma \iint d^2u \sqrt{-g(u)}, \qquad /1/$$

где: $\dot{x}^{\mu} = \partial x^{\mu}(\sigma,\tau)/\partial\tau$, $\acute{x}^{\mu} = \partial x^{\mu}(\sigma,\tau)/\partial\sigma$, $g = \det g_{ij}$, $g_{ij} = (\partial x^{\mu}/\partial u^{i})(\partial x_{\mu}/\partial u^{j})$ – метрический тензор на мировой поверхности струны $x^{\mu}(u^1,u^2)$, $u^1 = \tau$, $u^2 = \sigma$, $i,j = 1,2$, $\mu = 0,1,2$. Вариационный принцип для функционала /1/ приводит к задаче о нахождении минимальной поверхности, покрываемой струной в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.

В изометрической системе координат на мировой поверхности струны

$$\Lambda = g_{11} = \dot{x}^2 = -g_{22} = -\acute{x}^2 , \quad g_{12} = \dot{x}\acute{x} = 0 \qquad /2/$$

уравнения Эйлера-Лагранжа $\delta\sqrt{-g}/\delta x^{\mu} = 0$ сводятся к уравнению д'Аламбера для радиус-вектора $x^{\mu}(\sigma,\tau)$

$$\ddot{x}^{\mu}(\sigma,\tau) - x''^{\mu}(\sigma,\tau) = 0. \qquad /3/$$

Согласно основной теореме из дифференциальной геометрии /10/, искомую поверхность можно описать не только ее радиус-вектором $x^{\mu}(\sigma,\tau)$, но и основными квадратичными формами поверхности. Поэтому коэффициенты этих форм g_{ij} и b_{ij} можно рассматривать как динамические переменные для релятивистской струны. В терминах этих переменных из уравнений движения /3/, с учетом /2/, следует, что средняя кривизна минимальной поверхности в каждом нормальном направлении равна нулю:

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij} = 0 \qquad /4/$$

/для простоты рассматривается трехмерное пространство-время/. В таком подходе к теории релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени уравнения движения /3/ и нелинейные дополнительные условия /2/ объединяются в одно нелинейное уравнение на новую динамическую переменную $u(\sigma,\tau) = -\ln g_{11}$ /8,9/:

$$u_{\tau\tau} - u_{\sigma\sigma} = R e^{u} . \qquad /5/$$

Уравнение /5/ имеет солитонные решения, которые в квазиклассическом приближении приводят к новому спектру масс по сравнению с обычным подходом к теории дуальной струны /8/.

В рамках геометрического подхода естественным обобщением модели релятивистской струны является рассмотрение более общего класса мировых поверхностей с постоянной средней кривизной $H = \mathrm{const}$. В изометрической системе координат /2/ на произвольной поверхности $x^{\mu}(u^1,u^2)$ первая и вторая квадратичные формы имеют вид:

$$\phi_1 = ds^2 = \Lambda du^{+} du^{-} , \qquad /6/$$

$$\phi_2 = H ds^2 + \frac{1}{2}\Lambda[Q_{+}(du^{+})^2 + Q_{-}(du^{-})^2], \qquad /7/$$

где $Q_{\pm} = \frac{1}{\Lambda}(b^1_1 - b^2_2 \pm 2 b^1_2)$ и введены конусные переменные $u^{\pm} = u^1 \pm u^2$. Коэффициенты этих форм $\Lambda = g_{11}$, b_{ij}, $i,j = 1,2$ как функции координат u^1, u^2, заданных на поверхности, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци.

Уравнения Петерсона-Кодацци в нашем случае записываются следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial u^{-}} - \Lambda^{-1}\frac{\partial(\Lambda Q_{-})}{\partial u^{+}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u^{+}} - \Lambda^{-1}\frac{\partial(\Lambda Q_{+})}{\partial u^{-}} = 0. \qquad /8/$$

Теперь учтем, что для рассматриваемой поверхности $H = \mathrm{const}$, в результате чего получаем

$$\Lambda Q_{\pm} = f_{\pm}(u^{\pm}), \qquad /9/$$

где $f_{\pm}(u^{\pm})$ – произвольные функции. Это обстоятельство позволяет использовать произвол в выборе координатной сетки на данной поверхности, оставшийся после наложения условий /2/, так, чтобы зафиксировать координатную сеть в линиях кривизны

$$b_{12} = 0. \qquad /10/$$

Используя инвариантность /2/, /8/ и /9/ относительно конформных преобразований координат $\tilde{u}^{\pm} = \tilde{u}^1 \pm \tilde{u}^2 = \Phi_{\pm}(u^{\pm})$, легко показать, что соответствующим выбором функций $\Phi_{\pm}(u^{\pm})$

условию /10/ всегда можно удовлетворить. Действительно, если положить

$$\tilde{u}^{\pm} = 2\int du^{\pm}\sqrt{f_{\pm}(u^{\pm})}, \qquad /11/$$

то выражения /6/ и /7/, с учетом /9/, можно представить следующим образом:

$$\phi_1 = ds^2 = [(d\tilde{u}^1)^2 - (d\tilde{u}^2)^2]/4\sqrt{E}, \qquad /12/$$

$$\phi_2 = [k_+(d\tilde{u}^1)^2 - k_-(d\tilde{u}^2)^2]/4\sqrt{E}, \qquad /13/$$

где величина $E = Q_+Q_-$ - эйлерова разность поверхности, а $k_{\pm} = H \pm \sqrt{E}$ - нормальные кривизны в главном направлении [11].

В новых переменных /11/ уравнение Гаусса имеет вид:

$$\Box \ln\sqrt{E} = -\frac{1}{2}\left(\frac{H^2}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\right), \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2}. \qquad /14/$$

Если средняя кривизна поверхности равна нулю $H = 0$, то, вводя обозначение $\sqrt{E} = 2R\exp u$, из /14/ получаем уравнение Лиувилля /5/. В рассматриваемом случае $(H = \mathrm{const})$ с помощью замены $\sqrt{E} = He^{-\phi}$ /14/ сводится к нелинейному уравнению на функцию $\phi(u^1, u^2)$

$$\Box\phi = H\,\mathrm{sh}\,\phi. \qquad /15/$$

С учетом этой замены первая и вторая квадратичные формы /12/, /13/ принимают вид

$$\phi_1 = \frac{e^{\phi}}{4H}[(du^1)^2 - (du^2)^2], \qquad /16/$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1+e^{\phi})(du^1)^2 + \frac{1}{4}(1-e^{\phi})(du^2)^2. \qquad /17/$$

Таким образом, в трехмерном пространстве-времени теория одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной кривизны сводится к одному нелинейному уравнению /15/.

3. Уравнение /15/ по своему построению является условием совместности деривационных формул Гаусса-Вейнгартена [10], представляющих собой дифференциальные операторы первого порядка. Поэтому представляется естественным рассматривать эти операторы в качестве пары операторов Лакса, которые необходимы для решения нелинейного уравнения /15/ методом обратной задачи рассеяния [12-14].

Введем в рассмотрение единичный ортогональный базис

$$\vec{e}_1 = \dot{\vec{x}}/\sqrt{g_{11}}, \quad \vec{e}_2 = -i\vec{x}'/\sqrt{|g_{22}|}, \quad \vec{e}_3 = -i\vec{n}, \qquad /18/$$

где $\dot{\vec{x}}$ и $\vec{x}'$ - касательные векторы в данной точке поверхности, а $\vec{n}$ - единичный пространственноподобный вектор, ортогональный к $\dot{\vec{x}}$ и $\vec{x}'$. При движении по поверхности с метрикой /16/ изменение этого базиса сводится к вращению в трехмерном евклидовом пространстве R_3. Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена в базисе /18/ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial u^1} = \frac{i\phi_{,2}}{2}\vec{e}_2 - i\sqrt{H}\,\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\vec{e}_3, \qquad \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial u^2} = \frac{i\phi_{,1}}{2}\vec{e}_2,$$

$$\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial u^1} = -\frac{i\phi_{,2}}{2}\vec{e}_1, \qquad \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial u^2} = -\frac{i\phi_{,1}}{2}\vec{e}_1 + \sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\vec{e}_3,$$

$$\frac{\partial\vec{e}_3}{\partial u^1} = i\sqrt{H}\,\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\vec{e}_1, \qquad \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial u^2} = -\sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\vec{e}_2. \qquad /19/$$

Кососимметрические матрицы, стоящие в правых частях этих уравнений, являются матрицами бесконечномалых вращений в трехмерном евклидовом пространстве R_3. Такое вращение подвижного трехгранника /19/ можно описать на языке спиноров $\psi(u^1,u^2)$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^j} = \frac{i}{2}(\vec{\omega}^j \vec{\sigma})\psi, \quad j = 1,2, \qquad /20/$$

где

$$\vec{\omega}^1 = (i\sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},\ \frac{i\phi_{,2}}{2},\ 0),\quad \vec{\omega}^2 = (0,\ \frac{i\phi_{,2}}{2},\ \sqrt{H}\,\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}).$$

Для удобства в формуле /20/ совершен поворот в спинорном пространстве $\psi(u^1,u^2)$ на угол $\pi/2$ вокруг оси x. С геометрической точки зрения спиноры $\psi(u^1,u^2)$ являются чисто вспомогательными величинами. Тем не менее, условие совместности спинорных уравнений /20/, так же как и условие совместности /19/, дает уравнение Гаусса /15/ для квадратичных форм /16/, /17/. Величины $\vec{\omega}^j$ в /20/ зависят только от функции $\phi(u^1,u^2)$, в то время как для метода обратной задачи рассеяния необходимо ввести в $\vec{\omega}^j$ еще и спектральный параметр γ. Для этого воспользуемся инвариантностью уравнения /15/ при лоренцевских преобразованиях в двумерном пространстве u^1, u^2: $\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2 = \gamma(u^1 + u^2)$, $\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2 = \gamma^{-1}(u^1 - u^2)$.

Уравнения /20/ неинвариантны относительно такой замены и принимают вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{u}^j} = \frac{i}{2}\Omega^j_k(\phi,\gamma)\sigma_k\psi, \quad j = 1,2. \qquad /21/$$

Здесь

$$\Omega^1_k = [2i\gamma_+\sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},\ \frac{i\phi_{,2}}{2},\ -2\gamma_-\sqrt{H}\,\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}],$$

$$\Omega^2_k = [-2i\gamma_-\sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},\ \frac{i\phi_{,1}}{2},\ 2\gamma_+\sqrt{H}\,\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}]$$

и введены обозначения $\gamma_\pm = (\gamma \pm \frac{1}{\gamma})/4$. Условия совместности уравнений /21/ дают по-прежнему формулу /15/.

Согласно /21/, линейная спектральная задача для /15/ сводится к уравнению

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{i}{2}\Omega^2_k(\phi,\gamma)\sigma_k\psi, \quad x = \tilde{u}^2,\ t = \tilde{u}^1 \qquad /22/$$

с граничными условиями

$$\phi(t,x) \to 0 \qquad |x| \to \infty. \qquad /23/$$

При вещественном $\gamma \neq 0$ определим, как обычно, решения Йоста $\Psi_+(x,\gamma)$ и $\Psi_-(x,\gamma)$ системы уравнений /22/ следующими условиями:

$$\Psi_+(x,\gamma) \to \Psi(x,\gamma), \quad x \to +\infty,$$
$$\Psi_-(x,\gamma) \to \Psi(x,\gamma), \quad x \to -\infty, \qquad /24/$$

где матрица $\Psi(x,\gamma) = \exp(i\gamma_+\sqrt{H}\sigma_3 x)$ является решением уравнения

$$\frac{d\Psi}{dx} = i\gamma_+\sqrt{H}\sigma_3\Psi. \qquad /25/$$

в которое переходит уравнение /22/ при $|x| \to \infty$. Решения Йоста /24/ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\Psi_+(x,\gamma) = \exp(i\gamma_+\sqrt{H}\sigma_3 x) - \qquad /26/$$

$$-\int_x^{+\infty} dz\, e^{i\gamma_+\sqrt{H}\sigma_3(x-z)}(\gamma_-\sqrt{H}\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\sigma_1 - \frac{\phi_{,1}}{4}\sigma_2 + 2i\gamma_+\sqrt{H}\,\mathrm{sh}^2\frac{\phi}{4}\sigma_3)\Psi_+(z,\gamma)$$

и аналогичному уравнению для $\Psi_-(x,\gamma)$. Согласно /26/, первый столбец f_1 матрицы $\Psi(x,\gamma)$ и второй столбец ϕ_2 матрицы $\Psi_-(x,\gamma)$ допускают следующее аналитическое продолжение в область комплексной переменной γ:

$$\mathrm{Im}\,\gamma > 0, \quad |\gamma| > 1 \quad и \quad \mathrm{Im}\,\gamma < 0, \quad |\gamma| < 1. \qquad /27/$$

Для второго столбца f_2 матрицы Ψ_+ и первого столбца ϕ_1 матрицы Ψ_- соответственно имеем:

$$\mathrm{Im}\,\gamma > 0, \quad |\gamma| < 1 \quad и \quad \mathrm{Im}\,\gamma < 0, \quad |\gamma| > 1. \qquad /28/$$

Поскольку $(d/dx)\det\Psi_{\pm}(x,\gamma) = \frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}\,\Omega_k^2\sigma_k\Psi_{\pm} = 0$, то $\det\Psi_+ = \det\Psi_- = \det\Psi = 1$ и , таким образом, при вещественном γ решения Йоста $\Psi_{\pm}$ являются фундаментальными матрицами уравнения /22/, поэтому

$$\Psi_+(x,\gamma,t) = \Psi_-(x,\gamma,t)\,S(\gamma,t), \qquad /29/$$

где $S(\gamma,t)$ - матрица перехода

$$S(\gamma,t) = \begin{pmatrix} a(\gamma,t) & b(\gamma,t) \\ b^*(\gamma,t) & a^*(\gamma,t) \end{pmatrix},$$

элементы которой даются соотношениями

$$a(\gamma,t) = \det(f_1,\phi_2), \quad b(\gamma,t) = \det(f_2,\phi_1). \qquad /30/$$

Из /30/ следует, что $a(\gamma,t)$ также допускает аналитическое продолжение /27/ в комплексную область переменной γ. Отметим еще следующие свойства элементов матрицы перехода

$$|a(\gamma,t)|^2 - |b(\gamma,t)|^2 = 1, \quad a(\gamma,t) = a^*(-\gamma,t), \; b(\gamma,t) = -b^*(-\gamma,t).$$

Согласно уравнению /21/ с $j=1$ матрица перехода $S(\gamma,t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением

$$i\frac{dS}{dt} = \gamma_-\sqrt{H}\,[S,\sigma_3]. \qquad /31/$$

Решение уравнения /31/ имеет вид

$$S(\gamma,t) = \exp(i\gamma_-\sqrt{H}\sigma_3 t)\,S(\gamma,0)\exp(-i\gamma_-\sqrt{H}\sigma_3 t). \qquad /32/$$

Отсюда получаем зависимость от времени элементов матрицы перехода:

$$a(\gamma,t) = a(\gamma,0), \quad b(\gamma,t) = b(\gamma,0)\,e^{2i\gamma_-\sqrt{H}t}.$$

Далее можно стандартным путем использовать метод обратной задачи рассеяния /см., например,[12-14] / для решения задачи Коши, введения переменных "действие-угол" для гамильтоновой системы, связанной с уравнением /15/, и построения бесконечных серий законов сохранения. Однако на этих вопросах здесь мы останавливаться не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rebbi C. Phys.Rep., 1974, C12, p.3.
2. Scherk J. Rev.Mod.Phys., 1975, 47, p.123.
3. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып. 5, с.709.
4. Wilson K.C. Phys.Rev., 1974, D10, p.2445.
5. Nambu Y. Phys.Rev., 1974, D12, p.4262.
6. Nambu Y. Phys.Lett., 1979, 80B, p.372.
7. Gervais J.L., Neveu A. Phys.Lett., 1979, 80B, p.255.
8. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. JINR, E2-11669, Dubna, 1978.
9. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. JINR, E2-11706, Dubna, 1978.
10. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1964.
11. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. "Наука", М., 1978.
12. Lax P.D. Comm. Pure Appl.Math/, 1968, 21, p.467.
13. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1974, 21, с.160.
14. Ablowitz M. et al. Stud. in Appl.Math., 1974, 53, p.249.

Рукопись поступила в издательский отдел 21 мая 1979 года.