сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12395

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1979

P2 - 12395

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Стрельцов В.Н. P2 - 12395

О релятивистской квантовой механике скалярного поля

Развивается релятивистская квантовая механика комплексного скалярного поля, в рамках которой явным образом в выражениях для заряда Q и импульса P^i поля принимаются во внимание члены, учитывающие относительность одновременности и зависящие от плотностей тока и 4-импульса соответственно. Полученные в импульсном представлении формулы для Q и P^i совпадают с общеизвестными. Вводится релятивистский оператор координаты $\hat{x}^1$, который имеет такой же вид, как и в нерелятивистском случае; получены формулы для $d\bar{x}^1/d\tau$ и $d^2\bar{x}^1/d\tau$. Дается релятивистское инвариантное определение трехмерной δ-функции.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Strel'tsov V.N. P2 - 12395

On the Relativistic Quantum Mechanics of Scalar Field

The relativistic quantum mechanics of a complex field has been developed in the framework of which in an explicit form in the expressions for charge Q and momentum P^i of the field there are considered the terms taking into account the relativity of simultaneity and depending on current density and four-momentum density, respectively. The expressions for Q and P^i, obtained in the momentum space, coincide with the conventional ones. The relativistic position operator $\hat{x}^1$ is introduced that has the same form as for a non-relativistic approximation. The relativistic analogous of the Ehrenfest theorems are derived. The relativistic invariant definition is given for a three-dimensional δ-function.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время при релятивистском описании протяженных систем или систем /совокупностей/ со сплошным распределением материи /скажем, массы, заряда и т.д./ все чаще стал применяться следующий подход /см., например,[1] и цитированную там литературу/. В собственной системе отсчета K°, где данная совокупность покоится, положения ее элементов берутся в один и тот же момент времени, т.е. одновременно. В силу относительности одновременности с точки зрения любой несобственной инерциальной системы отсчета K, где данная совокупность движется, это соответствует разным моментам времени. В результате в K-системе, скажем, при вычислении заряда отмеченной совокупности необходимо принимать во внимание дополнительные члены, зависящие от величины плотности тока заряда.

Ниже мы применим указанный подход к случаю релятивистской квантовой механики. В качестве первого шага будет рассмотрено свободное комплексное /псевдо/ скалярное поле. При этом исключительно для наглядности в наших вычислениях мы ограничимся случаем /1+1/ - пространства, поскольку обобщение указанных вычислений на /1+3/-пространство особого труда не представляет. Все компоненты 4-векторов выбраны действительными. Метрика определяется /контравариантным/ тензором Минковского, взятым с обратным знаком:

$$g^{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, \quad g^{\circ\circ} = -g^{\alpha\alpha} = 1,$$

где i, k =0, 1, 2, 3 и α =1, 2, 3. Поэтому

$$a_\circ = a^\circ, \quad a_\alpha = -a^\alpha,$$

а скалярное произведение

$$ab = a_i b^i = a^\circ b^\circ - \vec{a}\vec{b}.$$

При этом будет использована система единиц

$$c = \hbar = 1.$$

2. ЗАРЯД ПОЛЯ

Рассмотрим выражение для 4-вектора плотности тока вероятности

$$J_k = i(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^k}\phi) \qquad /1/$$

комплексного /псевдо/ скалярного поля ϕ, описывающего бесспиновые частицы. Если, как обычно, мы домножим это выражение на электрический заряд e, то полученную в результате величину

$$j_k = ie(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^k}\phi) \qquad /1'/$$

можно трактовать как 4-вектор плотности электрического тока. Опираясь на /1'/, в специальной* K -системе для полного заряда поля Q будем иметь

$$Q = \int j^k dV_k =$$

$$= ie[\int(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^o} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^o}\phi)dV_o - \int(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^1}\phi)dV_1], \qquad /2/$$

где dV_k - 4-вектор элемента объема.

Здесь важно подчеркнуть, что выражение /2/ также определяет собою скалярное произведение (ϕ,ϕ), которое очевидно, отличается от общепринятого выражения /см., например,[2] / присутствием отмеченного выше второго члена в правой части, учитывающего неодновременность.

Произведем далее разбиение волновой функции на положительно- и отрицательно-частотные части $(\phi = \overset{+}{\phi} + \overset{-}{\phi})$ и перейдем к импульсному представлению на основе известных выражений /см. например,[3] /, которые в частном случае одного пространственного измерения имеют вид:

---

*Переход к указанной системе от K° -системы описывается специальными преобразованиями Лоренца.

$$\phi^{\pm}(x^1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\frac{dk^1}{\sqrt{2}k^o} e^{\pm ikx}\phi^{\pm}(k^1), \qquad /3/$$

$$\overset{*}{\phi}{}^{\pm}(x^1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\frac{dk^1}{\sqrt{2}k^o} e^{\pm ikx}\overset{*}{\phi}{}^{\pm}(k^1). \qquad /4/$$

Для этого подставим /3/ и /4/ в /2/ и проинтегрируем по конфигурационному пространству, приняв во внимание, что в случае /1+1/-пространства

$$dV_o = dx^1, \; dV_1 = -dx^o. \qquad /5/$$

Нетрудно показать, что при этом слагаемые, содержащие произведения функций $\phi^{\pm}$ одинаковой частотности, как обычно, не будут давать вклада в выражение для Q. Вместе с тем необходимо обратить внимание на следующее. При использовании в рамках релятивистской теории, скажем, известного равенства

$$\int\delta(\vec{x}' - \vec{x})d\vec{x} = 1, \qquad /6/$$

являющегося фактическим определением δ-функции, необходима известная осторожность. Это связано, в частности, с тем, что в релятивистском случае элемент объема $d\vec{x}$ уже не является инвариантной величиной, а представляет собою временную компоненту $d\vec{x} \equiv dV_0$ 4-вектора dV_i. Поэтому, чтобы удовлетворить требованию релятивистской инвариантности, в /6/ вместо $d\vec{x}$ следует воспользоваться инвариантным объемом

$$dV = dV_i u^i, \qquad /7/$$

где u^i - 4-скорость, и инвариантной δ-функцией. Вопросы введения и использования указанной функции детально обсуждаются в Приложении А. Здесь же мы приведем две необходимые формулы, соответствующие /А.7/ и /А.8/, которые /с учетом замены $u_o \to k^o$ / в случае /1+1/ пространства имеют вид

$$\delta(k^1 - k^{1'}) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{dx^1}{k^o} e^{i(k-k')x}, \qquad /8/$$

$$\int \frac{dk^1}{k^\circ} f(k^1)\delta(k^1 - k^{1\prime}) = f(k^{1\prime}). \qquad /9/$$

Заметим, что по своей форме, скажем, выражение /8/ находится в определенном соответствии с формулами /3/ и /4/. С учетом /8/ и /9/, например, для следующего интеграла:

$$Q_{12} = ie \int dV_o \overset{*}{\phi}{}^{+} \frac{\partial \phi^-}{\partial x^\circ},$$

получим

$$Q_{12} = ie \int \frac{dk^1 dk^{1\prime}}{2k^{\circ\prime}} \overset{*}{\phi}{}^{+}(k^1)(-ik^{\circ\prime})\phi^-(k^{1\prime})\frac{1}{2\pi} \int \frac{dx^1}{k^\circ} e^{i(k'-k)x} =$$

$$= \frac{e}{2} \int dk^1 dk^{1\prime} \overset{*}{\phi}{}^{+}(k^1)\phi^-(k^{1\prime})\delta(k^{1\prime} - k^1) =$$

$$= \frac{e}{2} \int dk^1 k^\circ \overset{*}{\phi}{}^{+}(k^1)\phi^-(k^1).$$

При вычислении второго слагаемого в /2/ следует учитывать, что согласно нашему определению элемента пространственного объема $dV_i^{(o)}(dV^{(o)}, 0, 0, 0)$*, а поэтому

$$dV_1 = -\beta\, dV_o = -\frac{k^1}{k^\circ} dV_o. \qquad /10/$$

В результате для полного заряда Q в импульсном пространстве получим следующее известное выражение:

$$Q = e \int dk^1 \frac{1}{k^\circ}(\overset{*}{\phi}{}^{+}\phi^- - \overset{*}{\phi}{}^{-}\phi^+). \qquad /11/$$

*Здесь и далее верхний индекс в скобках указывает на собственную систему отсчета K°.

3. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ПОЛЯ

Рассмотрим тензор энергии импульса комплексного скалярного поля

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) - g_{ik}\mathcal{L}, \qquad /12/$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\ell} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} - m^2 \overset{*}{\phi}\phi. \qquad /13/$$

В частности, для плотности и потока энергии будем иметь

$$T^{\circ\circ} = \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\ell} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\ell} + m^2 \overset{*}{\phi}\phi, \qquad /14/$$

$$T^{\circ\alpha} = -\left(\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\circ} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\circ}\right), \qquad /15/$$

а 4-импульс поля P^i будет определяться выражением

$$P^i = \int T^{ik} dV_k. \qquad /16/$$

В специальном случае /1+1/-пространства для энергии поля, в частности, найдем

$$P^\circ = \int\left(\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\circ} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\circ} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + m^2 \overset{*}{\phi}\phi\right)dx^1 + \int\left(\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^\circ} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\circ}\right)dx^\circ. \qquad /16'/$$

Здесь мы хотим обратить внимание на следующее. Возьмем второй член выражения /2/, деленного на заряд e, и подействуем под интегралом оператором $i\partial/\partial x^\circ$ на ϕ и $-i\partial/\partial x^\circ$ на $\overset{*}{\phi}$. После интегрирования по частям слагаемых, содержащих вторые производные, полагая, что ϕ и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования, получим второй член выражения /16'/. Аналогичным образом действуя указанными операторами под интегралом в первом члене /2/, используя уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x_k} - m^2 \phi = 0 \qquad /17/$$

и проводя интегрирование по частям, получим первый член /16'/ /см. Приложение Б/.

Таким образом, можно сказать, что действуя оператором

$$\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial x^\circ} \quad (\hat{p}_0^* = -i\frac{\partial}{\partial x^\circ}) \qquad /18/$$

на 4-ток плотности вероятности j^k в формуле для вероятности /2/, мы получили энергию поля P°. Поэтому величину /14/ следует называть оператором энергии. Аналогичное утверждение, как легко проверить, будет справедливо и для оператора импульса $\hat{p}_1 = i\partial/\partial x^1$.

Следует также отметить, что величина j^k, очевидно, может быть получена в результате действия оператора $\hat{p}_k$ на скаляр $\overset{*}{\phi}\phi$.

Переход к импульсному представлению легко провести, воспользовавшись результатами п.2. Подставим для этого разложения /3/ и /4/ в выражение для плотности энергии-импульса /14/ и /15/ и проведем интегрирование по конфигурационному пространству. В результате придем к известной формуле

$$P^i = \int \frac{dk^1}{k^\circ} k^i (\overset{*+}{\phi}\phi^- + \overset{*-}{\phi}\phi^+). \qquad /19/$$

4. ОПЕРАТОР КООРДИНАТЫ

4.1. Опираясь на формулу /2/ для полной вероятности $W = Q/e$, определим среднее значение пространственной координаты с помощью следующего выражения:

$$\bar{x}^1 = \int x^1 j^k dV_k =$$

$$= i[\int x^1(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^\circ} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^\circ}\phi)dV_0 + \int x^1(\overset{*}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^1}\phi)\,dV_1]. \qquad /20/$$

Если мы снова воспользуемся результатами п. 2 для перехода к импульсному представлению, то после несложных вычислений найдем

$$\bar{x}^1 = \int \frac{dk^1}{k^\circ}(\overset{*}{\phi}{}^+ \frac{1}{i}\frac{\partial\phi^-}{\partial k^1} - \overset{*}{\phi}{}^- \frac{1}{i}\frac{\partial\phi^+}{\partial k^1}). \qquad /21/$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение может быть получено на основе формулы /11/ для полной вероятности и в импульсном пространстве, если в качестве оператора координаты использовать величину

$$\hat{x}^1 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial k^1}. \qquad /22/$$

Очевидно, что данный оператор тождествен обычному нерелятивистскому оператору координаты, но отличается от релятивистского оператора, введенного Ньютоном и Вигнером /4/. Может быть, здесь следует отметить, что оператор /22/ действует именно на функции поля, но не на элементы инвариантного объема $dv = d\vec{k}/k^\circ$.

Что касается собственной волновой функции оператора координаты, то в координатном представлении это будет релятивистская δ-функция

$$\delta(x^1 - x^{1\prime}) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{dk^1}{k^\circ} e^{i(x-x')k}. \qquad /23/$$

В импульсном представлении собственная волновая функция оператора $\hat{x}^1$, как и в нерелятивистском случае, будет представлять собою плоскую волну

$$\phi(k^1) = \frac{1}{2\pi^{1/2}}\exp(ikx). \qquad /24/$$

Действительно, подставляя /24/ в формулу /21/ для $\bar{x}^1$, с учетом /23/ найдем

$$\bar{x}^1 = x^1 \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk^1}{k^\circ} e^{i(x-x')k} = x^1 \delta(x^1 - x^{1\prime}). \qquad /25/$$

4.2. Вычислим теперь релятивистски-ковариантную величину $d\bar{x}^1/d\tau$, описывающую изменение $\bar{x}^1$ в зависимости от собственного времени τ /вдоль данного элемента мировой трубки/. С учетом того, что выбор элемента объема /длины/ соответствует нормальному сечению мировой трубки /полосы/, в частности, будем иметь

$$\frac{d\bar{x}^1}{d\tau} = i[u^\circ \int x^1 (\overset{*}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{o2}} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\phi}}{\partial x^{o2}} \phi) dx^1 +$$

$$+ u^1 \int (\overset{*}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \phi) dx^\circ + u^1 x^1 \int (\overset{*}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{12}} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\phi}}{\partial x^{12}} \phi) dx^\circ]. \qquad /26/$$

Подставив в первый и третий интегралы значения вторых производных из уравнения Клейна-Гордона /17/ и проведя интегрирования по частям, получим, что

$$\frac{d\bar{x}^1}{d\tau} = u^\circ \int J^1 dV_o + u^1 \int J^1 dV_1 = u^i \int J^1 dV_i \ . \qquad /26'/$$

В том случае, когда 4-скорость u^i постоянная внутри элемента объема, последнее выражение можно формально переписать в виде

$$\int J^1 u^i dV_i = \frac{1}{m} \int j^1 u^i dV_i = \frac{1}{m} \int \theta^{1i} dV_i \ , \qquad /26''/$$

где $j^i = mJ^i$ - аналог 4-тока плотности массы, а θ^{ik} - аналог обычного кинетического тензора, или

$$m \frac{d\bar{x}^1}{d\tau} = \int \theta^{1i} \, dV_i \, . \qquad /27/$$

Последнее выражение будет совпадать с формулой для P^1, если

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^\circ} = i m u^\circ \phi, \qquad /28/$$

т.е. в том случае, когда ϕ является собственной функцией оператора энергии.

Для второй производной $d^2\bar{x}^1/d\tau^2$ получим

$$\frac{d^2 \bar{x}^1}{d\tau^2} = \frac{du^i}{d\tau} \int J^1 dV_i + 2(u^\circ)^2 \int (\frac{\partial^2 \overset{*}{\phi}}{\partial x^\circ} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^\circ}) dV_o \, . \qquad /29/$$

Здесь так же формально первый член в правой части может быть записан в виде

$$\frac{1}{m} \int j^1 w^i dV_i = \frac{1}{m} \int f^{1i} dV_i \ , \qquad /30/$$

где w^i - 4-ускорение, f^{ik} - тензор мощности-силы. Напомним, что классическое выражение для релятивистской силы F^i через тензор f^{ik} имеет вид $F^i = \int f^{ik} dV_k$. Однако в случае второй производной из-за наличия второго члена в /29/ нельзя получить аналога классического уравнения движения для $\bar{x}^1$. Тогда как в первом случае в каком-то смысле можно говорить о "релятивистской теореме Эренфеста".

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше при релятивистском описании комплексного скалярного поля мы исходили из выражений для заряда и 4-импульса поля, которые отличались от соответствующих обычно используемых выражений тем, что в них члены, учитывающие относительность одновременности, не равны нулю. Указанное отличие исчезло, однако, после перехода к импульсному представлению, что объясняется использованием введенной релятивистски-инвариантной трехмерной δ-функции. Было показано, что в рамках развитого подхода релятивистский оператор координаты $\hat{x}^1$ имеет тот же вид. что и в нерелятивистском случае. При этом его собственные функции в координатном и импульсном пространстве суть отмеченная инвариантная δ-функция и плоская волна соответственно. Были получены также ковариантные формулы для первой и второй производных по /собственному/ времени от средней координаты $\bar{x}^1$ /аналоги известных нерелятивистских теорем Эренфеста/.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Инвариантное определение 3-мерной δ-функции в /1+3/-пространстве.

Как известно, в трехмерном случае δ-функция определяется на основе следующего равенства:

$$\int d\vec{x}\,\delta(\vec{x}) = 1, \qquad /А.1/$$

где $d\vec{x}$ - элемент пространственного объема. Используя представление δ-функции, с помощью кратного интеграла Фурье

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{x}} \qquad /А.2/$$

перепишем /А.1/ в виде

$$\int d\vec{x}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{x}} = 1. \qquad /А.3/$$

Меняя порядок интегрирования, представим /А.3/ в форме

$$\int d\vec{k}\,\delta(\vec{k}) = 1, \qquad /А.4/$$

где

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}. \qquad /А.5/$$

Однако здесь важно подчеркнуть следующее. Выписанные выше выражения /А.1/-/А.5/ не могут быть прямо использованы в рамках релятивистской теории, поскольку они не удовлетворяют требованию лоренц-инвариантности. Это, в частности, связано с тем, что в релятивистском случае элемент пространственного объема $d\vec{x}(d\vec{k})$ является временной компонентой 4-вектора $dV_i\,(dv_i)$. Поэтому отмеченные выражения должны преобразовываться при переходе от одной системы отсчета к другой.

Требованию лоренц-инвариантности можно удовлетворить, если в отмеченных выражениях вместо $dV_o(dv_o)$ пользоваться элементом инвариантного объема

$$dV = dV_i u^i \quad (dv = dv_i u^i). \qquad /А.6/$$

Кроме того, в выражениях /А.2/, /А.3/ и /А.5/ экспоненту необходимо домножить на величину $\exp(-ik^o x^o)$*. Таким образом, вместо /А.5/ и /А.4/, например, будем иметь следующие релятивистски-инвариантные выражения:

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{dx}{u_o} e^{ikx}\,{}^{**}, \qquad /А.7/$$

$$\int \frac{d\vec{k}}{u_o}\,\delta(\vec{k}) = 1, \qquad /А.8/$$

где мы учли, что $d\vec{x} = dV_o = u_o dV\,(d\vec{k} = u_o dv)$.

Следует подчеркнуть, что в нерелятивистском пределе /когда $u_o \to 1$/ /А.7/ и /А.8/, действительно, переходят в обычные известные выражения. Указанный переход обеспечивается также специальным выбором векторов x^i.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Применение оператора энергии

Подействуем оператором $i\partial/\partial x^o\,(-i\partial/\partial x^o)$ на $\phi(\overset{*}{\phi})$ в выражении /2/ для вероятности $W = Q/e$. В результате получим

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^o}\frac{\partial\phi}{\partial x^o} + \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^o}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^o}\right)dV_o - \frac{1}{2}\int\left(\overset{*}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^{o2}} + \frac{\partial^2\overset{*}{\phi}}{\partial x^{o2}}\phi\right)dV_o$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^o}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + \frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^o}\right)dV_1 + \frac{1}{2}\int\left(\overset{*}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^1\partial x^o} + \frac{\partial^2\overset{*}{\phi}}{\partial x^1\partial x^o}\right)dV_1. \qquad /Б.1/$$

---

*Здесь временные компоненты векторов $\vec{x}$ выбраны специально так, что в K^o-системе $x^{o(o)} = 0$.

**Заметим, что $\delta(\vec{x})$ по виду будет совпадать фактически с положительно-частотной частью перестановочной функции Паули-Йордана.

Используя уравнение Клейна-Гордона /17/ и интегрируя четвертый член в /Б.1/ по частям с учетом того, что в рассматриваемом частном случае $dV_1 = -dx^{\circ}$, найдем

$$\int \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\circ}} dV_o - \frac{1}{2}\int (\overset{*}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{1\,2}} + \frac{\partial^2 \overset{*}{\phi}}{\partial x^{1\,2}} \phi - 2m^2 \overset{*}{\phi} \phi) dV_o$$

$$- \int (\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^{\circ}}) dV_1 + (\overset{*}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \phi) \Big|_{x^{\circ}=-\infty}^{x^{\circ}=\infty} . \qquad /Б.2/$$

После интегрирования по частям во втором члене /Б.2/ с учетом равенства $dV_o = dx^1$ и отбрасывания последнего слагаемого придем к следующему выражению:

$$\int (\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\circ}} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + m^2 \overset{*}{\phi} \phi) dV_o - \int (\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}) dV_1 , \qquad /Б.3/$$

которое, очевидно, тождественно формуле /16'/, определяющей собою энергию поля P° .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Собственные функции оператора импульса

Рассмотрим в рамках /1+1/-пространства выражение для импульса P^1 поля, которое в координатном представлении имеет вид

$$P^1 = - \int (\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\circ}} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \frac{\partial \phi}{\partial x^1}) dV_o +$$

$$+ \int (\frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^{\circ}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^{\circ}} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - m^2 \overset{*}{\phi} \phi) dV_1 . \qquad /В.1/$$

Если при этом ϕ представляет собою собственную функцию оператора импульса

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \exp(ikx), \qquad /В.2/$$

то первый и второй члены /В.1/ запишутся соответственно в виде

$$P^1_{(1)} = \frac{1}{2} (k^{\circ} k^1 k^{\circ\prime} + k^{\circ 2}) \delta(k^{1\prime} - k^1),$$

$$P^1_{(2)} = \frac{1}{2} (k^{\circ} k^{\circ\prime} k^1 + k^{1\,2} k^{1\prime} - m^2 k^1) \delta(k^{1\prime} - k^1), \qquad /В.3/$$

где использована релятивистски-инвариантная δ-функция /8/. Складывая указанные члены, получим

$$P^1 = k^{1\prime} \delta(k^{1\prime} - k^1) = k^1 \delta(k^1 - k^{1\prime}). \qquad /В.4/$$

В рамках импульсного представления согласно /19/ будем иметь

$$P^1 = \int \frac{dk^1}{k^{\circ}} k^1 (\overset{*}{\phi}{}^{+} \phi^{-} - \overset{*}{\phi}{}^{-} \phi^{+}). \qquad /В.5/$$

При этом собственные функции оператора импульса будут представлять собою релятивистски-инвариантные δ-функции. Подставляя их в /В.5/ и проводя интегрирование согласно /9/, снова придем к /В.4/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10912, Р2-11115, Дубна, 1977; ОИЯИ, Р2-11684, Р2-11925, Дубна, 1978.
2. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ., М., 1963, с. 65.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, "Наука", М., 1973, п. 3.4.
4. Newton T.D., Wigner E.P. Rev.Mod.Phys., 1949, 21, p. 400.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1979 года.