

3/ix-79

3413/2-79



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

С324.1а

Л-38

P2 - 12355

Н.А. Левченко, Н.Е. Ньюнко, Ю.Н. Тюхтяев,
Р.Н. Фаустов

АНАЛИЗ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВКЛАДА $\sim \alpha^6 \ln \alpha$
ОТ ДИАГРАММЫ ОДНОФОТОННОГО ОБМЕНА
В ПОЗИТРОНИИ

1979

P2 - 12355

Н.А.Левченко, Н.Е.Нюнько, Ю.Н.Тюхтяев,
Р.Н.Фаустов

АНАЛИЗ ЛОГАРИФИЧЕСКОГО ВКЛАДА $\sim \alpha^6 \ln \alpha$
ОТ ДИАГРАММЫ ОДНОФОТОННОГО ОБМЕНА
В ПОЗИТРОНИИ

Институт физики
Ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Анализ логарифмического вклада $\sim a^6 \ln a$
от диаграммы однофотонного обмена в позитронии

В рамках квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе рассмотрен логарифмический вклад порядка $a^6 \ln a$ в сверхтонкое расщепление основного уровня позитрония, получающийся в однофотонном приближении. Показано, что результаты вычислений, проведенных в рамках двух вариантов квазипотенциального подхода, совпадают и равны:

$$\Delta E_1(a^6 \ln a) = \frac{1}{2} E_F a^2 \ln a^{-1},$$

где E_F — фермиевское расщепление, что позволяет уточнить полученный ранее другим методом результат, который в два раза превышает этот вклад.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Analysis of $\sim a^6 \ln a$ Logarithmic Contribution from
a Single-Photon Exchange in Positronium

Within the quasipotential Logunov-Tavkhelidze approach the logarithmic contribution of $a^6 \ln a$ order to a hyper-fine splitting of the positronium ground level obtained in a single-photon approximation is analysed. It is shown that the results of calculations performed within the two versions of quasipotential approach coincide and are equal:

$$\Delta E_1(a^6 \ln a) = \frac{1}{2} E_F a^2 \ln a^{-1},$$

where E_F is the Fermi splitting. It allows to improve the earlier result obtained by the other method that exceeds by a factor of two this contribution.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В связи с повышением точности экспериментального значения для сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония особую актуальность приобретает уточнение теоретического значения этой величины.

Для сравнения приведем имеющиеся на этот счет экспериментальные

$$\begin{aligned} \Delta \nu_{\text{exp}}^{\text{hfs}} &= 203,3849 (12) \text{ ГГц}^{/1/}, \\ \Delta \nu_{\text{exp}}^{\text{hfs}} &= 203,3870 (16) \text{ ГГц}^{/2/} \end{aligned} \quad (1)$$

и теоретическое

$$\Delta \nu_{\text{theor.}}^{\text{hfs}} = 203,4003 (452) \text{ ГГц}$$

значения сверхтонкого сдвига в позитронии ^{/3/}.

Интересно отметить, что различные методы приводят к разным результатам для вклада $\sim a^6 \ln a$ в сдвиг уровня энергии даже от простейшей диаграммы обмена одним поперечным фотоном в позитронии:

$$\Delta E_1(a^6 \ln a) = E_F \cdot a^2 \ln a^{-1} \cdot 1^{/4/}, \quad (3)$$

$$\Delta E_1(a^6 \ln a) = E_F \cdot a^2 \ln a^{-1} \cdot \frac{1}{2}^{/5/}, \quad (4)$$

где

$$E_F = \frac{2\pi\alpha}{3m^2} |\psi_C(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = R y_\infty \cdot \frac{\alpha^2}{6} \cdot \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle.$$

Сравнение и уточнение этих результатов возможно на основе квазипотенциального подхода к исследованию плюсной диаграммы второго порядка по заряду электрона.

Рассмотрим квазипотенциальное уравнение в виде ^{/5/}:

$$G_f^{-1} \psi = \tilde{V} \psi; \quad \tilde{V} = G_f^{-1} - [G^+]^{-1}; \quad G_f = \bar{G}_0^+ (1 + \tilde{U}_C G_f).$$

$$G_0 = i(2\pi)^4 \delta(p-q) S_1(p_1) S_2(p_2); G_0 = \frac{(2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q})}{E - \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + M^2}}; \bar{C}_C = -\frac{4\pi a}{(\vec{p}-\vec{q})^2}$$

где \bar{V} - квазипотенциал, \bar{C}_C - кулоновский потенциал, G_0 - свободная двухчастичная функция Грина, G_0^+ и G_0^- - соответственно свободная и полная двухвременные функции Грина двух частиц с произвольными массами, спроектированные на положительно-частотные состояния^{/8/}. В систем центра масс амплитуда рассеяния описывает процесс взаимодействия частиц, внешние импульсы которых изображены на рис. 1.

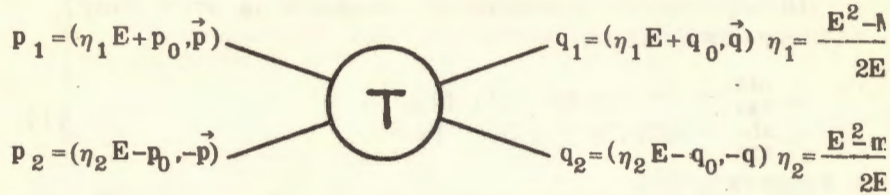


Рис. 1

Используя соотношения

$$\bar{C}_C + \bar{V} = [G_0^+]^{-1} \cdot G_0 T G_0^+ \cdot [G_0^+]^{-1}; T = K(1 + GK), \quad (6)$$

где K - ядро уравнения Бете-Солпитера, в низшем приближении для квазипотенциала получаем

$$\bar{V}^{(1)} = [G_0^+]^{-1} \cdot G_0 T^{(2)} G_0^+ \cdot [G_0^+]^{-1} - \bar{C}_C. \quad (7)$$

В кулоновской калибровке $T^{(2)}$ дается выражением

$$T^{(2)} = T_C + T_T = \bar{C}_C \gamma_{10} \gamma_{20} - \frac{4\pi a \gamma_1^i \gamma_2^j}{(p-q)^2} \cdot \perp_{ij}(\vec{k}); \quad (8)$$

$$\perp_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k^j k^i}{k^2}; \vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$$

и квазипотенциал (7) принимает вид

$$\bar{V}^{(1)} = V_C + V_T; V_C = [G_0^+]^{-1} \cdot G_0 T_C G_0^+ \cdot [G_0^+]^{-1} - \bar{C}_C,$$

$$V_T = -[G_0^+]^{-1} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\mathbf{p}_0 d\mathbf{q}_0 [S_1(p_1) S_2(p_2) T_T(p_0, \vec{p}; q_0, \vec{q}) S_1(q_1) S_2(q_2)]^+ [G_0^+]^{-1},$$

где S - пропагатор свободного фермиона и

$$T_T = -4\pi a \frac{\gamma_1^i \gamma_2^j}{(p_0 - q_0)^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} \cdot \perp_{ij}(\vec{k}) \quad (10)$$

- элемент амплитуды рассеяния 2-го порядка, соответствующий обмену поперечным фотоном.

Амплитуда рассеяния в выражении для квазипотенциала может быть записана в терминах как четырехвременных, так и двухвременных функций Грина. В первом случае при интегрировании в (9) учитывается и полюс амплитуды T_T . Во втором - относительные энергии p_0 и q_0 фиксируются значениями их на массовой поверхности.

В соответствии с этим из общей формулы для квазипотенциала могут быть получены исходные выражения работ^{/4,5/} для вычисления вклада $-a^6 \ln a$ в сверхтонкий сдвиг основного уровня позитрония от прямой диаграммы однофотонного обмена и уточнено значение этого сдвига.

При этом $m = M, \eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$.

Согласно теории возмущений для основной поправки к кулоновскому уровню энергии имеем

$$\Delta E_1^{C+T} = \langle n | V_C + V_T | n \rangle = \Delta E_C + \Delta E_T. \quad (11)$$

Поскольку величина T_C не зависит от относительных энергий, выражения для ΔE_C в обоих подходах идентичны, что приводит к результату для сдвига уровня с точностью до $a^6 \ln a$:

$$\Delta E_C = \langle n | \bar{C}_C \{[\gamma_{10} \gamma_{20}]^+ - 1\} | n \rangle =$$

$$= E_F \cdot \frac{\alpha^2 m^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dpdq \cdot p^2 q^2 \phi_p^2 \phi_q^2}{\epsilon_p \epsilon_q (\epsilon_p + m)(\epsilon_q + m)} [2p^2 - (p^2 - q^2) \cdot \frac{p}{q} \mathcal{L}_{pq}] \approx$$

$$\approx E_F \cdot \alpha^2 \ln \alpha^{-1} \cdot \frac{1}{16}; \phi_p = (p^2 + \omega^2)^{-1}; \mathcal{L}_{pq} = \ln \frac{|p-q|}{p+q}; \epsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}; \omega = 1 \quad (12)$$

Полученный вклад совпадает с результатами работ [3,7,8].

Выражение для сдвига уровня энергии от поперечной части амплитуды рассеяния в четырехвременном формализме имеет вид

$$\Delta E_T = \langle n | [\overline{G}_0^+]^{-1} \cdot \overline{G}_0 T_T \overline{G}_0^+ \cdot [\overline{G}_0^+]^{-1} | n \rangle =$$

$$= -\frac{4\alpha^2 |\psi_C(0)|^2}{(2\pi)^6} \iint d^4p d^4q \phi_p \phi_q [S_1(p_1) S_2(p_2) T_T S_1(q_1) S_2(q_2)]^+ \quad (13)$$

Используя в (10) известное представление для δ -функции, можно получить

$$\Delta E_T = -\frac{8\alpha^3 |\psi_C(0)|^2}{(2\pi)^7} \iiint d^3p d^3q dt dt' \phi_p \phi_q \iint dp_0 dq_0 e^{ip_0 t} e^{-iq_0 t'} \times$$

$$\times [S_1 S_2 \Gamma_{12} S_1 S_2]^+ \iint dk_0 dk_0' \frac{e^{-ik_0 t} e^{ik_0' t'}}{(k_0' - k_0)^2 - k^2 + i\epsilon}; \Gamma_{12}(\vec{k}) = \gamma_1^i \gamma_2^j \perp_{ij}(\vec{k}). \quad (14)$$

После интегрирования по k_0' , k_0 и t выражение для ΔE_T записывается следующим образом:

$$\Delta E_T = -\frac{4i\alpha^3 |\psi_C(0)|^2}{(2\pi)^5} \iint \frac{d^3p d^3q}{|\vec{k}|} \phi_p \phi_q \int dt e^{-i|t| |\vec{k}|} \times \quad (15)$$

$$\times [\int dp_0 e^{ip_0 t} S_1 S_2 \Gamma_{12} \int dq_0 e^{-iq_0 t'} S_1 S_2]^+.$$

Интегрируя по относительным энергиям p_0 и q_0 , в приближении "больших" компонент биспиноров для основной части вклада в сдвиг уровня получаем

$$\Delta E_T = \frac{2i\alpha^3 |\psi_C(0)|^2}{(2\pi)^4} W_1 W_2 \iint \frac{d^3p d^3q \phi_p^2 \phi_q^2}{\epsilon_p \epsilon_q |\vec{k}|} \int dt e^{-i|t| |\vec{k}|} \times$$

$$\times \left(1, \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{p}}{2m}\right) \left(1, -\frac{\vec{\sigma}_2 \vec{p}}{2m}\right) \gamma_{10} \gamma_{20} \Gamma_{12} \cdot \left(\frac{1}{2m} \vec{\sigma}_1 \vec{q}\right) \left(-\frac{1}{2m} \vec{\sigma}_2 \vec{q}\right) W_1 W_2 (E f_+^p + \epsilon f_-^p) \times \quad (16)$$

$$\times (E f_+^q + \epsilon f_-^q); f_\pm^q = \frac{e^{-i(\epsilon_q - E)|t|} \pm e^{i(\epsilon_q + E)|t|}}{2}.$$

Интегрируя по t и упрощая матричную структуру в (16), приходим к соотношению

$$\Delta E_T = -\frac{\alpha^3}{3(2\pi)^3} |\psi_C(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \iint \frac{d^3p d^3q}{\epsilon_p \epsilon_q} \phi_p^2 \phi_q^2 \times \quad (17)$$

$$\times \left\{ 4m^2 \frac{p^2(\epsilon_q + m) + q^2(\epsilon_p + m)}{|\vec{k}| + \epsilon_p + \epsilon_q - 2E} + \frac{2(p^2 \epsilon_q + q^2 \epsilon_p)}{|\vec{k}| + \epsilon_p + \epsilon_q} - \frac{p^2(\epsilon_q - m) + q^2(\epsilon_p - m)}{|\vec{k}| + \epsilon_p + \epsilon_q + 2E} \right\}.$$

Следует отметить полное совпадение полученного выражения с формулой (42) в работе [4].

После интегрирования в (17) по угловым переменным и выделения известного вклада [9] от слагаемого, пропорционального $4m^2$, сдвиг ΔE_T принимает вид

$$\Delta E_T = E_F \left(1 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) + E_F (I(0) - I(-2E) - I(2E)), \quad (18)$$

где

$$I(0) = 2\rho \iint_0^\infty dp dq \theta(p, q) \epsilon_q (\epsilon_q + \epsilon_p) \mathcal{L}(0),$$

$$I(-2E) = \rho \iint_0^\infty dp dq \theta(p, q) (\epsilon_q + m)(\epsilon_q + \epsilon_p - 2E) \mathcal{L}(-2E),$$

$$I(2E) = \rho \int_0^\infty \int_0^\infty dp dq \theta(p, q) (\epsilon_q - m)(\epsilon_q + \epsilon_p + 2E) \mathcal{L}(2E);$$

$$\theta(p, q) = \frac{p^3 q}{\epsilon_p \epsilon_q} \phi_p^2 \phi_q^2; \mathcal{L}(A) = \ln \frac{|p-q| + \epsilon_p + \epsilon_q + A}{p+q + \epsilon_p + \epsilon_q + A}; \rho = \left(\frac{m\alpha}{\pi}\right)^2. \quad (19)$$

Анализ приведенных интегралов показывает, что наибольшего вклада следует ожидать от $I(0)$, поскольку интегралы $I(-2E)$ и $I(2E)$ включают множители, быстро убывающие в области малых импульсов при энергии, близкой к сумме масс частиц.

В самом деле, непосредственный расчет показывает, что выражение $I(-2E)$ обуславливает вклады в сдвиг уровня, пропорциональные α^5 и $\alpha^6 \ln \alpha$, тогда как интеграл $I(0)$ приводит к результатам порядка α^5 и $\alpha^5 \ln \alpha$. Величина $I(2E)$ имеет порядок α^6 и по этой причине нас в дальнейшем не интересует.

Рассмотрим более подробно вычисление интегралов $I(0)$ и $I(-2E)$:

$$I(0) \approx \rho \int \frac{p^3 dp}{\epsilon_p} \phi_p^2 \left[\int_0^p \frac{dq (p - \epsilon_p - \epsilon_q)}{\epsilon_q} \phi_q + p \int_p^\infty \frac{dq}{\epsilon_q} \phi_q \right],$$

$$I(-2E) \approx \rho \left[I_{CT}(-2E) + \frac{\pi}{m^2 \alpha} \int_0^\infty \frac{\phi_p \cdot p (\epsilon_p - p + m)}{\epsilon_p} \phi_p \right], \quad (20)$$

$$I_{CT}(-2E) = \iint_0^\infty \frac{dp dq \cdot pq \phi_p \phi_q}{\epsilon_p \epsilon_q} \cdot \mathcal{L}(-2E) \approx \frac{1}{2\rho} \alpha^2 \ln \alpha.$$

Для получения этого результата использовалось интегрирование по частям и отбрасывались интегралы, приводящие ко вкладам порядка α^6 . Дальнейшее интегрирование тривиально и приводит к выражениям

$$I(0) = 2 \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \alpha + \frac{1}{4} \right) + O(\alpha^2), \quad (21)$$

$$I(-2E) = - \left(2 \frac{\alpha}{\pi} \ln 2 + \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha^{-1} \right) + O(\alpha^2).$$

Следует сказать, что при более строгом выделении основной части вклада (учет малых компонент биспиноров), аномальные вклады отсутствуют.

Таким образом, для логарифмического по константе взаимодействия вклада порядка $\alpha^6 \ln \alpha$ имеем

$$\Delta E_T(\alpha^6 \ln \alpha) = E_F \cdot \alpha^2 \ln \alpha^{-1} \cdot \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Отметим, что в работе ^{5/} указанный результат получен на основе построения квазипотенциала с помощью двухвременной амплитуды рассеяния.

Как известно, для описания процессов рассеяния используют амплитуду рассеяния $T(p_1, p_2; q_1, q_2)$, внешние концы которой удовлетворяют законам сохранения $p_1^2 = q_1^2 = m^2$, $p_2^2 = q_2^2 = M^2$. В системе центра масс такая амплитуда $T(p_0, \vec{p}; q_0, \vec{q}; E) = T(\vec{p}, \vec{q}, E)$ изображена графически на рис. 2, где относительные энергии p_0 и q_0 равны нулю.

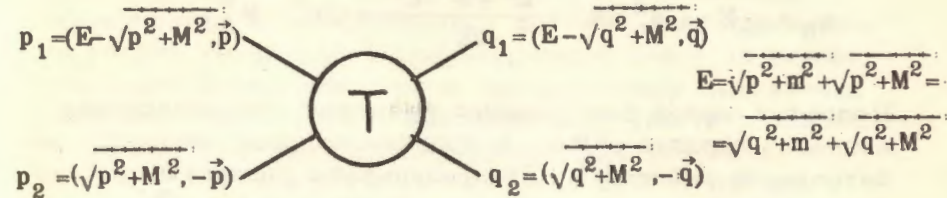


Рис. 2

В приближении рассеяния ($p_{20} = \sqrt{p^2 + M^2}$, $q_{20} = \sqrt{q^2 + M^2}$; $E = \sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2}$) эта амплитуда может быть использована и для описания связанных состояний. В этом случае выражение для сдвига ΔE_T принимает вид

$$\Delta E_T = \frac{8\alpha^3 \mu^2}{3\pi^2} |\psi_C(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \iint \frac{d^3 p d^3 q \phi_p^2 \phi_q^2}{[(\epsilon_p^M - \epsilon_q^M)^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2]} N_m(p) N_M(p) N_m(q) N_M(q) \times$$

$$\times \left[\frac{\vec{p} \vec{q}}{(\epsilon_p^M + M)(\epsilon_q^M + m)} + \frac{\vec{p} \vec{q}}{(\epsilon_p^M + m)(\epsilon_q^M + M)} - \frac{p^2}{(\epsilon_p^M + m)(\epsilon_p^M + M)} - \frac{q^2}{(\epsilon_q^M + m)(\epsilon_q^M + M)} \right];$$

$$N_m(p) = \sqrt{\frac{\epsilon_p^M + m}{2\epsilon_p^M}}.$$

Для вычисления значения сдвига δE_0 в работе /10/ была использована область $p \ll M$, в которой интегрирование выражения (23) дает для ΔE_T идентичный результат.

Для более полного согласия с методикой /11/ возможно использование другой разновидности квазипотенциального подхода, известной как модифицированное уравнение Дирака /12/. В указанном подходе одна из частиц переводится на массовую поверхность. В используемой нами параметризации импульсов (рис. 1) это соответствует тому, что в амплитуде рассеяния нужно, например, положить:

$$\begin{aligned} p_2^2 &= q_2^2 = M^2; \quad p_0 = \eta_2 E - \sqrt{p^2 + M^2} = \frac{E^2 + M^2 - m^2}{2E} - \sqrt{p^2 + M^2}, \\ q_0 &= \eta_2 E - \sqrt{q^2 + M^2} = \frac{E^2 + M^2 - m^2}{2E} - \sqrt{q^2 + M^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подобный метод был успешно применен для вычисления поправок порядка $a^6 \ln a$ к уровням энергии мюония и позитрония в работе /8/. Эти результаты согласуются с последующими расчетами, проведенными в работе /8/.

Для последовательного описания проблемы связанных состояний выполним выход с массовой поверхности по параметру полной энергии $E \neq \sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2} \neq \sqrt{q^2 + m^2} + \sqrt{q^2 + M^2}$, $\vec{p}_0 = \vec{q}_0 = 0$. В этом случае \vec{p} и \vec{q} остаются независимыми трехмерными переменными, а полная энергия $E = m + M + W$ (W — энергия связи). При данном подходе сдвиг уровня энергии дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta E_T &= -\frac{8a^3 \mu^2}{3\pi^3} |\psi_C(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \iint \frac{d^3 p d^3 q}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \phi_p^2 \phi_q^2 \cdot N_m(p) N_M(p) N_m(p) N_M(p) \times \\ &\times \left[\frac{\vec{p}\vec{q}}{(\epsilon_p^M + M)(\epsilon_q^m + m)} + \frac{\vec{p}\vec{q}}{(\epsilon_p^m + m)(\epsilon_q^M + M)} - \frac{p^2}{(\epsilon_p^m + m)(\epsilon_p^M + M)} - \frac{q^2}{(\epsilon_q^m + m)(\epsilon_q^M + M)} \right]. \end{aligned}$$

Значение сдвига основного уровня позитрония получаем при $m = M$ в выражении (25), в результате чего имеем

$$\begin{aligned} \Delta E_T &= \frac{8a^3 m^2}{3\pi} |\psi_C(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \iint \frac{dp dq \cdot pq \phi_p^2 \phi_q^2}{\epsilon_p \epsilon_q} \times \\ &\times \left[1 + \frac{(\epsilon_p - \epsilon_q)^2}{2pq} \ln \frac{|p - q|}{p + q} \right] = E_F \cdot \frac{a^2 \ln a^{-1}}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычисление (26) выполнено в предыдущей работе /5/.

Таким образом, результаты вычисления вклада $-a^6 \ln a$ в сдвиг уровня позитрония от поперечной части однофотонного взаимодействия, соответствующие двум рассмотренным выше способам построения квазипотенциала (см. (22) и (26)), полностью совпадают. Это показывает эквивалентность использования для описания связанных состояний амплитуды рассеяния, построенной на основе уравнения Бете-Солпитера и двухвременной амплитуды, полученной при сходе с массовой поверхности по параметру полной энергии. Поэтому уточненный результат (3) работы /4/ оказывается равным значению $\Delta E_1(a^6 \ln a)$, приведенному выше (4).

В заключение авторы приносят благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логуну, В.А.Мешерякову, Л.Д.Соловьеву, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталеву, а также Н.Б.Скачкову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Egan P.O. et al. Phys.Lett., 1975, 54A, p.412.
2. Mills A.P., Jr., Berman G.H. Phys.Rev.Lett., 1975, 34, p.246.
3. Lepage G.P. Phys.Rev., 1977, 16A, p.863.
4. Fulton T., Owen D.A., Repko W.W. Phys.Rev., 1971, 4A, p.1802.
5. Тютхьяев Ю.Н. ТМФ, 1978, 36, с.264.
6. Фаустов Р.Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, с.238; ОИЯИ, P2-8246, Дубна, 1974.
7. Cung V.K. et al. Ann.Phys. (N.Y.), 1975, 96, p.261.
8. Bodwin G.T., Yennie D.R. Cornell preprint CLNS-383,

9. Karplus R., Klein A. Phys. Rev., 1962, 87, p.848.1977.
10. Lepage G.P. SLAC Pub-1900, 1977.
11. Grotch H., Yennie D.R. Rev. Mod. Phys., 1969, 41, p.350.
12. Дульян Л.С., Фаустов Р.Н. ТМФ, 1975, 22, с.314.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1979 года.