объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12304

В.К.Мельников

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1979

P2 - 12304

В.К.Мельников

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Направлено на V Международное совещание по нелокальной квантовой теории поля /Алушта, 1979/

Мельников В.К. Р2 - 12304

Симметрии и законы сохранения

Рассмотрены нелинейные эволюционные уравнения, порождаемые операторным соотношением, обобщающим известное представление Лакса. В отличие от представления Лакса предлагаемое операторное соотношение обладает инвариантностью относительно широкой группы преобразований. Это позволяет описать все уравнения, порождаемые этим соотношением, и найти несколько бесконечных серий законов сохранения, которым удовлетворяют решения этих уравнений. Установлена связь между предложенным соотношением и представлением Лакса. Метод допускает обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P2 - 12304

Mel'nikov V.K.

Symmetries and Conservation Laws

Nonlinear evolution equations generated by the operator relation which is an extension of the known representation of P.Lax are considered. Unlike the Lax representation, the operator relation proposed is invariant with respect to a rather wide transformation group. This allows us to obtain all the equations generated by this relation and to establish several infinite series of conservation laws for solutions of these equations. A connection between our relation and the Lax representation is found. The method suggested admits a generalization to the case of arbitrary number of space variables.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В настоящей работе речь будет идти о нелинейных эволюционных уравнениях, обладающих операторным представлением

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [\mathcal{A}, L] = \mathcal{B}(L-\eta), \tag{I}$$

где L, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - операторы, а η - комплексный параметр. При этом операторы L, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сами могут рациональным образом зависеть от параметра η. И хотя для широкого класса операторов L уравнения, обладающие представлением (I), обладают также обычным представлением Лакса,

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [P, L] = 0, \tag{2}$$

существует ряд причин, по которым представление (I) является более предпочтительным, нежели представление (2). Среди них одной из важнейших является инвариантность соотношения (I) относительно группы G преобразований вида

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} + g(L-\eta), \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B} + [g, L], \tag{3}$$

где оператор $g \in G$. По-видимому, именно этот факт является причиной того, что уравнения, обладающие представлением (I), во всех известных случаях имеют несколько бесконечных серий законов сохранения. Далее, во всех этих случаях порождаемые оператором L уравнения образуют зависящее от целочисленного параметра $n \geq -1$ семейство. При этом n равно порядку полюса оператора $\mathcal{A}$ в бесконечно удаленной точке $\eta = \infty$. Мы будем считать, что $n = 0$, если при $\eta \to \infty$ оператор $\mathcal{A}$ имеет конечный отличный от нуля предел, и $n = -1$, если $\mathcal{A} \to 0$ при $\eta \to \infty$, однако $\mathcal{A} \not\equiv 0$. Тогда оказывается, что в некотором смысле, который позже будет уточнен, законы сохранения рассматриваемых уравнений не зависят от η. Это также говорит в пользу того, что обсуждаемые законы сохранения связаны с инвариантностью соотношения (I) относительно группы преобразований (3).

§I. Связь между представлениями (I) и (2)

Имеется случай, когда из существования представления (I) следует существование представления (2). Это случай, когда оператор L не зависит от параметра η.

Предположим сначала, что операторы L и $\mathcal{A}$ не зависят от параметра η. Тогда в силу (I) оператор $\mathcal{B}(L-\eta)$ также не зависит от η. Положим

$$\mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\beta_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p}.$$

Тогда имеем

$$\mathcal{B}(L-\eta) = \sum_{m=0}^{n} B_m L \eta^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m+1} + \tag{I.I}$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\beta_{\mu p}(L-\eta_\mu)}{(\eta-\eta_\mu)^p} - \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\beta_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^{p-1}}.$$

Поскольку $\mathcal{B}(L-\eta)$ не зависит от η, то из равенства (I.I) следует, что

$$B_0 = B_1 = \ldots = B_n = 0.$$

Далее, из равенства (I.I) следует, что при любом $\mu = 1, \ldots, \mu_0$ имеем

$$\beta_{\mu, p_\mu} = \beta_{\mu, p_\mu - 1} = \ldots = \beta_{\mu 1} = 0,$$

т.е. $\mathcal{B} = 0$. Таким образом, в этом случае представление (I) в действительности имеет вид (2).

Пусть теперь $\mathcal{A}$ зависит рационально от η. Положим

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\alpha_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p}.$$

Далее, положим

$$P = \sum_{m=0}^{n} A_m L^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \alpha_{\mu p} (L-\eta_\mu)^{-p},$$

где оператор $(L-\eta_\mu)^{-p}$ является обратным к оператору $(L-\eta_\mu)^p$. Если перейти от пространства H, на котором определен оператор L, к подходящим образом выбранному подпространству $H_0 \subset H$, то оператор $(L-\eta_\mu)^{-p}$ может быть корректно определен. В силу равенства

$$\mathcal{A} = P + g(L-\eta),$$

где

$$g = -\sum_{m=0}^{n-1} A_m \sum_{k=0}^{n-m-1} \eta^{n-m-k-1} L^k +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \alpha_{\mu p} \sum_{k=1}^{p} (\eta-\eta_\mu)^{-p+k-1} (L-\eta_\mu)^{-k},$$

из соотношения (I) следует равенство

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [P, L] = Q(L-\eta),$$

причем оператор $Q = \mathcal{B} - [g, L]$ и, очевидно, зависит рационально от параметра η. В силу сказанного выше имеем $Q = 0$, т.е.

$$\mathcal{B} = [g, L]. \tag{I.2}$$

Полагая снова

$$\mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\beta_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p}$$

и сравнивая с (I.2), получаем $B_0 = 0$, при $m > 0$ имеем

$$B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} [A_{m-k-1}, L] L^k$$

и, наконец, при любых $p = 1, \dots, p_\mu$ и $\mu = 1, \dots, \mu_0$ имеем

$$\beta_{\mu p} = \sum_{k=1}^{p_\mu - p + 1} [\alpha_{\mu, p+k-1}, L](L-\eta_\mu)^{-k}.$$

Отсюда следует, что при $m = 0, 1, \dots, n-1$ справедливо равенство

$$[A_m, L] = B_m L - B_{m+1}, \tag{I.3}$$

а при любых $p = 1, \dots, p_\mu$ и $\mu = 1, \dots, \mu_0$ справедливо равенство

$$[\alpha_{\mu p}, L] = \beta_{\mu p}(L-\eta_\mu) - \beta_{\mu, p+1},$$

причем $\beta_{\mu p} = 0$ при $p > p_\mu$. Таким образом, вытекающее из соотношения (I) эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A_n, L] = B_n L - \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \beta_{\mu 1},$$

если $n \geqslant 0$, а при $n = -1$ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \beta_{\mu 1} = 0.$$

§2. Построение операторов A_m и B_m

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим случай, когда оператор L имеет вид

$$L = \Lambda_0^{-(k_0+1)} \left(\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k \right), \quad k_0 \geqslant 0,$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, Λ_0 - диагональная матрица порядка r_0 с отличными от нуля диагональными элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_0} \in \mathbb{C}$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r^{k_0+1} \neq \lambda_{r'}^{k_0+1} \quad \text{при} \quad r \neq r',$$

и, наконец, $u_k = u_k(x,t)$ - квадратные матрицы порядка r_0, причем у матрицы u_{k_0} предполагаются равными нулю элементы, стоящие на главной диагонали. Мы опишем сейчас все пары операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых соотношение (I) эквивалентно нелинейному эволюционному уравнению вида

$$\dot{u} = f(u, u', \dots, u^{(n)}), \tag{2.I}$$

где $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k_0})$, $f = (f_0, f_1, \dots, f_{k_0})$, а штрихами обозначено дифференцирование по x. Оказывается, что это имеет место, когда операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ зависят полиномиально от параметра η, т.е.

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m}, \quad \mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m}.$$

При этом в силу (3) мы можем предполагать, что порядки операторов A_m и B_m не превосходят k_0. Достигается это следующим образом.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F], \tag{2.2}$$

где

$$U = \begin{vmatrix} & 0 & \\ u_0 & u_1 \ldots & u_{k_0} \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \left| \begin{array}{c:c} 0 & E_{k_0 r_0} \\ \hdashline (\zeta \Lambda_0)^{k_0+1} & 0 \end{array} \right| \tag{2.3}$$

Положим далее

$$F = \theta G \theta^{-1},$$

где

$$\theta = \begin{vmatrix} E & E & \ldots & E \\ \zeta\Lambda_0 & \zeta\Lambda_1 & \ldots & \zeta\Lambda_{k_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\zeta\Lambda_0)^{k_0} & (\zeta\Lambda_1)^{k_0} & \ldots & (\zeta\Lambda_{k_0})^{k_0} \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

а $\Lambda_k = \Lambda_0 \exp\left(i \frac{2k\pi}{k_0+1}\right)$, $k = 1, \ldots, k_0$.
Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} + [V, G] = \zeta [\Lambda, G], \tag{2.5}$$

где

$$V = \theta^{-1} U \theta,$$

а

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \Lambda_0 & & & \\ & \Lambda_1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \Lambda_{k_0} \end{vmatrix}.$$

При этом в силу (2.3) и (2.4) имеем

$$V = \sum_{k=0}^{k_0} V_k \zeta^{k-k_0}, \tag{2.6}$$

где

$$V_k = \frac{1}{k_0+1} \Lambda^{-k_0} U_k \Lambda^k,$$

а

$$U_k = \begin{vmatrix} u_k & u_k & \ldots & u_k \\ u_k & u_k & \ldots & u_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_k & u_k & \ldots & u_k \end{vmatrix}.$$

Уравнение (2.5) имеет формальное решение вида

$$\hat{G} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat{G}_m \zeta^{-m},$$

где $\hat{G}_0$ – произвольная диагональная матрица с не зависящими от x и параметра ζ диагональными элементами $C_1, \ldots, C_{(k_0+1)r_0}$, а при $m > 0$ матрицы $\hat{G}_m$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида

$$[\Lambda, \hat{G}_m] - [V, \hat{G}_{m-1}] - \frac{\partial \hat{G}_{m-1}}{\partial x} = 0.$$

При этом элементы матриц $\hat{G}_m$ либо будут равны нулю, либо будут квазиоднородными полиномами ранга m от элементов матрицы V и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка. С учетом равенства (2.6) положим теперь при $m > 0$

$$\hat{G}_m = \sum_{k=0}^{m k_0} G_{mk} \zeta^{k - m k_0},$$

где G_{mk} не зависят от ζ. Положим, далее, $G_0 = \hat{G}_0$, а при $m > 0$ положим

$$G_m = \sum_{\mu=\mu_m}^{m} G_{\mu, (k_0+1)\mu - m}, \quad \mu_m = \left[\frac{m+k_0}{k_0+1} \right].$$

Тогда нетрудно убедиться, что матрицы G_m при $1 \le m \le K_0$ удовлетворяют соотношению

$$[\Lambda, G_m] - \sum_{\mu = K_0 - m + 1}^{K_0} [V_\mu, G_{m-K_0+\mu-1}] - \frac{\partial G_{m-1}}{\partial x} = 0, \qquad (2.7)$$

а при $m > K_0$ – соотношению

$$[\Lambda, G_m] - \sum_{\mu=0}^{K_0} [V_\mu, G_{m-K_0+\mu-1}] - \frac{\partial G_{m-1}}{\partial x} = 0. \qquad (2.7')$$

Отсюда следует, что формальный ряд

$$G \sim \sum_{m=0}^{\infty} G_m \zeta^{-m}$$

удовлетворяет уравнению (2.5).

Положим теперь при $m \geqslant 0$

$$\hat{F}_m = \theta G_m \theta^{-1}.$$

В силу равенства (2.4) имеем

$$\hat{F}_m = \sum_{K=-K_0}^{K_0} F_{mK} \zeta^K,$$

где F_{mK} от ζ не зависят. Далее, положим

$$F_m = \begin{cases} \sum\limits_{\mu=0}^{m+K_0} F_{\mu,\mu-m}, & \text{если} \quad -K_0 \le m \le K_0, \\ \sum\limits_{\mu=m-K_0}^{m+K_0} F_{\mu,\mu-m}, & \text{если} \quad m > K_0. \end{cases}$$

С помощью равенств (2.7) и (2.7') нетрудно убедиться, что матрицы F_m при $-K_0 \le m \le 0$ удовлетворяют соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] = 0, \qquad (2.8)$$

а при $m > 0$ – соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-K_0-1}] - [U, F_{m-K_0-1}] - \frac{\partial F_{m-K_0-1}}{\partial x} = 0, \qquad (2.9)$$

где матрица Γ_0 равна значению при $\zeta = 0$ матрицы Γ, определенной с помощью равенства (2.3), а $\Gamma_1 = (\Gamma - \Gamma_0)\zeta^{-(K_0+1)}$.

Полученный таким образом формальный ряд

$$F \sim \sum_{m=-K_0}^{\infty} F_m \zeta^{-m}$$

удовлетворяет уравнению (2.2).

Пусть теперь $F_{m,\mu\nu}$ – матрица порядка z_0, образованная элементами матрицы F_m, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu z_0 + 1, \ldots, (\mu+1) z_0$ и столбцов с номерами $\nu z_0 + 1, \ldots, (\nu+1) z_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, K_0$. С помощью этих матриц определим операторы

$$A_m = \sum_{K=0}^{K_0} F_{m,0K} \partial^K, \qquad (2.10)$$

$$A_m^* = \Lambda_0^{-(K_0+1)} \Big(\sum_{K=0}^{K_0} \partial^{K_0-K} F_{m,KK_0} + \sum_{K=1}^{K_0} u_K \sum_{\varkappa=0}^{K-1} \partial^{K-\varkappa-1} F_{m,\varkappa K_0} \Big) \Lambda_0^{K_0+1}.$$

Нетрудно убедиться, что при $-K_0 \le m \le -1$ справедливо равенство

$$A_m = A_m^* = 0, \qquad (2.11)$$

а при $m = 0$ имеем

$$A_0 = A_0^* = \sum_{K=0}^{K_0} C_K,$$

где $C_K = diag(c_{Kz_0+1}, \ldots, c_{(K+1)z_0})$, $K = 0, 1, \ldots, K_0$.

Далее, с помощью равенств (2.8) и (2.9) нетрудно убедиться, что при $m > 0$ справедливо соотношение

$$A_m - A_m^* = L A_{m-K_0-1} - A^*_{m-K_0-1} L . \qquad (2.12)$$

Из этого соотношения при $0 \le m \le K_0$ в силу (2.II) следует равенство

$$A_m = A_m^* = \sum_{K=0}^{K_0} C_K \Lambda_K^{-m} + \alpha_m , \qquad (2.13)$$

где оператор α_m имеет порядок $m-1$. Наконец, с помощью соотношения (2.I2) нетрудно убедиться, что операторы A_m и $B_m = A_m - A_m^*$ при $m \geqslant -K_0$ удовлетворяют соотношению

$$[A_m, L] = B_m L - B_{m+K_0+1} ,$$

аналогичному (I.3).

§3. Вывод уравнений (2.I) и законы сохранения

Положим теперь

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n,\varkappa} = \sum_{m=0}^{n}{}' A_{\varkappa+(K_0+1)m}\, \eta^{n-m} ,$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{n,\varkappa} = \sum_{m=0}^{n} \left(A_{\varkappa+(K_0+1)m} - A^*_{\varkappa+(K_0+1)m} \right) \eta^{n-m} ,$$

где $0 \le \varkappa \le K_0$ и $n \geqslant 0$. Тогда в силу (2.I2) и (2.I3) соотношение (I) будет эквивалентно равенству

$$\frac{\partial L}{\partial t} = A_{\varkappa+(K_0+1)(n+1)} - A^*_{\varkappa+(K_0+1)(n+1)} . \qquad (3.1)$$

В левой и правой частях этого равенства стоят операторы одного и того же порядка K_0. Приравнивая между собой коэффициенты этих операторов, мы получим систему уравнений вида (2.I). Далее, в силу равенств (2.I0) операторы A_m и A_m^* имеют вид

$$A_m = F_{m,0K_0} \partial^{K_0} + \hat{A}_m ,$$

$$A_m^* = \Lambda_0^{-(K_0+1)} F_{m,0K_0} \Lambda_0^{K_0+1} \partial^{K_0} + \hat{A}_m^* ,$$

где $\hat{A}_m$ и $\hat{A}_m^*$ - операторы порядка K_0-1. Следовательно, одно из уравнений системы (2.I) имеет вид

$$\dot{u}_{K_0} = \left[\Lambda_0^{K_0+1} , F_{\varkappa+(K_0+1)(n+1), 0K_0} \right] ,$$

что находится в полном соответствии со сделанным ранее предположением о равенстве нулю диагональных элементов матрицы u_{K_0}.

Положим теперь при $m > K_0+1$

$$I_m = \sum_{\mu=\mu_m}^{m} \frac{1}{\mu-1} Sp\left(\Lambda G_{\mu,(K_0+1)\mu-m} \right) , \quad \mu_m = \left[\frac{m+K_0}{K_0+1}\right],$$

а при $m = 2, \ldots, K_0+1$ положим

$$I_m = \sum_{\mu=2}^{m} \frac{1}{\mu-1} Sp\left(\Lambda G_{\mu,(K_0+1)\mu-m} \right) + Sp\left(G_0 V_{K_0-m+1} \right) .$$

Пусть, далее,

$$T_{m\tau} = \frac{\partial I_m}{\partial c_\tau} , \quad \tau = 1, \ldots, (K_0+1)\tau_0 , \qquad (3.2)$$

где c_τ - диагональные элементы матрицы G_0. Пусть, наконец,

$$\frac{\delta T_{m\tau}}{\delta \tilde{u}_K} = \sum_{S=0}^{\infty}{}' (-1)^S \frac{\partial^S}{\partial x^S} \frac{\partial T_{m\tau}}{\partial \tilde{u}_K^{(S)}} ,$$

где $u_K^{(S)} = \frac{\partial^S u_K}{\partial x^S}$, а знак „$\sim$" над матрицей u_K означает транспонирование. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\delta T_{m\tau}}{\delta \tilde{u}_K} = \frac{1}{K_0+1} \frac{\partial F_{m-1, K K_0}}{\partial c_\tau} .$$

С помощью этого равенства и соотношений (2.8) и (2.9) доказывается существование полинома $X_{m\tau, n\varkappa}$ от элементов матриц u_K и их производных по x достаточно высокого порядка, такого, что для любого решения системы (3.I) справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{m\tau} = \frac{\partial}{\partial x} X_{m\tau, n\varkappa} . \qquad (3.3)$$

При этом согласно определению полиномы T_{mr} от η и $\varkappa$ явно не зависят, в то время как полиномы $X_{mr,n\varkappa}$ зависят явно от n и $\varkappa$. Левая часть равенства (3.3) будет зависеть от η и $\varkappa$ только после подстановки в нее решения системы (3.I). Таким образом, если решение системы (3.I) существует при любых $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \geqslant t_0$, а при $x \to \pm\infty$ стремится достаточно быстро к нулю, то определены величины

$$I_{mr} = \int_{-\infty}^{\infty} T_{mr}\, dx$$

и согласно равенству (3.3) они не зависят от t.

В заключение этого параграфа необходимо отметить, что все опущенные здесь детали доказательств могут быть восстановлены по работе /I/.

§4. Случай рациональной зависимости от параметра η

Рассмотрим теперь случай, когда операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, входящие в соотношение (I), зависят рационально от параметра η. С этой целью положим

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\alpha_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p},$$

$$\mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n}{}' B_m \eta^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{\beta_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p},$$

где $\alpha_{\mu p}$ и $\beta_{\mu p}$ - операторы порядка κ_0. Тогда из соотношения (I) следует, что

I) $B_0 = 0$,

2) при $m = 0, I, \ldots, n-I$ справедливо равенство

$$[A_m, L] = B_m L - B_{m+1},$$

3) вытекающее из соотношения (I) эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A_n, L] = B_n L - \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \beta_{\mu 1}, \tag{4.I}$$

4) операторы $\alpha_{\mu p}$ и $\beta_{\mu p}$ удовлетворяют соотношению

$$[\alpha_{\mu p}, L] = \beta_{\mu p}(L - \eta_\mu) - \beta_{\mu, p+1}, \tag{4.2}$$

причем $\beta_{\mu p} = 0$ при $p > p_\mu$.

Положим теперь

$$B_m = A_m - A_m^*, \quad \beta_{\mu p} = \alpha_{\mu p} - \alpha_{\mu p}^*.$$

Пусть, далее, $B_{n+1} = B_n L - [A_n, L]$, а при $m > 0$ положим

$$\alpha_m = \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_{\mu m}} \frac{(m-1)!}{(m-p)!\,(p-1)!} \eta_\mu^{m-p} \alpha_{\mu p}, \tag{4.3}$$

$$\alpha_m^* = \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_{\mu m}} \frac{(m-1)!}{(m-p)!\,(p-1)!} \eta_\mu^{m-p} \alpha_{\mu p}^*,$$

где $p_{\mu m} = \min(p_\mu, m)$. Тогда эволюционное уравнение (4.I) примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = A_{n+1} - A_{n+1}^* - \alpha_1 + \alpha_1^*, \tag{4.4}$$

а из соотношения (4.2) следует, что при любом $m > 0$ справедливо равенство

$$L\alpha_m - \alpha_{m+1} = \alpha_m^* L - \alpha_{m+1}^*. \tag{4.5}$$

Определим теперь бесконечную последовательность матриц $\hat{F}_m$, $m > 0$, следующим образом. Пусть $\hat{F}_{m,\mu\nu}$ - матрицы порядка r_0, образованные элементами матрицы $\hat{F}_m$, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \ldots, (\mu+1) r_0$ и столбцов с номерами.

$\nu\tau_0+1, \dots, (\nu+1)\tau_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, \kappa_0$. Прежде всего определим матрицы $\hat{F}_{m,0\kappa}$ для $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$ так, чтобы имело место равенство

$$\alpha_m = \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} \hat{F}_{m,0\kappa} \partial^\kappa ,$$

и матрицы $\hat{F}_{m,\kappa\kappa_0}$ при $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$ так, чтобы имело место равенство

$$\alpha_m^* = \Lambda_0^{-(\kappa_0+1)} \Big(\sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} \partial^{\kappa_0-\kappa} \hat{F}_{m,\kappa\kappa_0} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} u_\kappa \sum_{\varkappa=0}^{\kappa-1} \partial^{\kappa-\varkappa-1} \hat{F}_{m,\varkappa\kappa_0} \Big) \Lambda_0^{\kappa_0+1} .$$

Нетрудно видеть, что этими требованиями матрицы $\hat{F}_{m,0\kappa}$ и $\hat{F}_{m,\kappa\kappa_0}$ при $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$ определяются однозначно. При этом в силу равенства (4.5) оба способа дают для матрицы $\hat{F}_{m,0\kappa_0}$ одно и то же значение. Далее, положим

$$\hat{D}_{m,\mu} = \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} \hat{F}_{m,\mu\kappa} \partial^\kappa , \quad \mu = 0, 1, \dots, \kappa_0 ,$$

и определим последовательно матрицы $\hat{F}_{m,\mu\kappa}$ при $\mu = 1, \dots, \kappa_0$ и $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$ из условия

$$\hat{D}_{m,\mu} = \partial \hat{D}_{m,\mu-1} - \hat{F}_{m,\mu-1,\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} L + \hat{F}_{m+1,\mu-1,\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} . \quad (4.6)$$

Нетрудно видеть, что этим требованием матрицы $\hat{F}_{m,\mu\kappa}$ определяются однозначно. Далее, из равенства (4.5) следует, что получаемые таким образом значения матриц $\hat{F}_{m,\kappa\kappa_0}$ при $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$ совпадают с полученными ранее значениями. Действительно, согласно равенству (4.6) при $\kappa = 1, \dots, \kappa_0$ имеем

$$\partial^\kappa \alpha_m = \hat{D}_{m,\kappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\kappa-1} \partial^{\kappa-\varkappa-1} \hat{F}'_{m,\varkappa\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} L - \sum_{\varkappa=0}^{\kappa-1} \partial^{\kappa-\varkappa-1} \hat{F}_{m+1,\varkappa\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} ,$$

а при $\kappa = \kappa_0+1$

$$\partial^{\kappa_0+1} \alpha_m = \partial \hat{D}_{m,\kappa_0} + \sum_{\varkappa=0}^{\kappa_0-1} \partial^{\kappa_0-\varkappa} \hat{F}'_{m,\varkappa\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} L - \sum_{\varkappa=0}^{\kappa_0-1} \partial^{\kappa_0-\varkappa} \hat{F}_{m+1,\varkappa\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} ,$$

где $\hat{F}'_{m,\varkappa\kappa_0}$ – полученные с помощью равенства (4.6) значения матриц $\hat{F}_{m,\varkappa\kappa_0}$, $\varkappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$. Отсюда с учетом равенства (4.5) следует равенство

$$a_m L + b_m = 0 , \quad (4.7)$$

где

$$a_m = \Lambda_0^{-(\kappa_0+1)} \Big\{ \sum_{\varkappa=0}^{\kappa_0} \partial^{\kappa_0-\varkappa} \big(\hat{F}'_{m,\varkappa\kappa_0} - \hat{F}_{m,\varkappa\kappa_0} \big) + \sum_{\kappa=1}^{\kappa_0} u_\kappa \sum_{\varkappa=0}^{\kappa-1} \partial^{\kappa-\varkappa-1} \big(\hat{F}'_{m,\varkappa\kappa_0} - \hat{F}_{m,\varkappa\kappa_0} \big) \Big\} ,$$

$$b_m = \Lambda_0^{-(\kappa_0+1)} \Big(\partial \hat{D}_{m,\kappa_0} - \hat{F}'_{m,\kappa_0\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} L + \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} u_\kappa \hat{D}_{m,\kappa} + \hat{F}_{m+1,\kappa_0\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} \Big) - \alpha_{m+1} .$$

В силу того, что порядки операторов a_m и b_m не превосходят κ_0, равенство (4.7) возможно только при $a_m = b_m = 0$. Следовательно, полученные разными способами значения матриц $\hat{F}_{m,\kappa\kappa_0}$ совпадают при $\kappa = 0, 1, \dots, \kappa_0$, а

$$\partial \hat{D}_{m,\kappa_0} = - \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} u_\kappa \hat{D}_{m,\kappa} + \hat{F}_{m,\kappa_0\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} L - \hat{F}_{m+1,\kappa_0\kappa_0} \Lambda_0^{\kappa_0+1} + \Lambda_0^{\kappa_0+1} \alpha_{m+1} . \quad (4.8)$$

С помощью равенств (4.6) и (4.8) нетрудно убедиться, что полученные таким образом матрицы $\hat{F}_m$ при любом $m > 0$ удовлетворяют соотношению

$$[\Gamma_1, \hat{F}_{m+1}] + [\Gamma_0, \hat{F}_m] - [U, \hat{F}_m] - \frac{\partial \hat{F}_m}{\partial x} = 0, \qquad (4.9)$$

где матрицы Γ_1 , Γ_0 и U те же самые, что и в равенстве (2.9). Далее, согласно равенствам (4.3) и (4.6) получаем, что элементы матриц $\hat{F}_m$ выражаются линейно через коэффициенты операторов $\alpha_{\mu p}$ и производные этих коэффициентов по x соответствующего порядка.

Посмотрим теперь, как будут меняться со временем определенные с помощью равенства (3.2) величины $T_{m r}$, если в них подставить теперь какое-нибудь решение уравнения (4.4). Повторив почти дословно рассуждения §5 из работы /I/, получаем, что в рассматриваемом нами теперь случае справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{m r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(X_{m r, n k} + \hat{X}_{m r}\right), \qquad (4.10)$$

где величины $X_{m r, n k}$ те же самые, что и в равенстве (3.3), а величины $\hat{X}_{m r}$ получаются аналогичным образом с помощью соотношения (4.9). При этом величины $\hat{X}_{m r}$ будут зависеть линейно от коэффициентов операторов $\alpha_{\mu p}$ и их производных по x достаточно высокого порядка. Таким образом, система уравнений (4.I) и (4.2) обладает несколькими бесконечными сериями законов сохранения вида (4.I0).

В заключение необходимо отметить, что с помощью соотношения (I) могут быть получены нелинейные эволюционные уравнения с произвольным числом пространственных переменных $x = (x_1, \dots, x_{\alpha_0})$, обладающие несколькими бесконечными сериями законов сохранения. Подробному рассмотрению этого случая посвящена работа /2/, и поэтому здесь нет необходимости останавливаться на этом подробнее.

Литература

I. Мельников В.К. О законах сохранения для одного класса систем нелинейных эволюционных уравнений. Препринт ОИЯИ Р5-I2060, Дубна, 1978.

2. Мельников В.К. Об уравнениях, порождаемых операторным соотношением, Матем.сборник, I08, №3 (1979), 378-392.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1979 года