сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12268

В.Л.Любошиц

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ СОСТОЯНИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

1979

P2 - 12268

В.Л.Любошиц

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ СОСТОЯНИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Любошиц В.Л. P2 - 12268

Неортогональные внутренние состояния в формализме вторичного квантования

Получены коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения частиц с неортогональными внутренними состояниями. Показано, что аппарат вторичного квантования автоматически приводит к единому описанию свойств тождественных и нетождественных частиц, включающему непрерывный подход от различающихся внутренних состояний к одинаковым.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Lyuboshitz V.L. P2 - 12268

Nonorthogonal Internal States in the Second Quantization Formalism

The commutation relations for creation and destruction operators of the particles with nonorthogonal internal states are obtained. It is shown that the second quantization formalism leads to a united description of identical and nonidentical particle properties. It contains a continuous transition from different particles to identical ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В работах [1-4], результаты которых обобщены в монографии [5], построена теория рассеяния частиц с неортогональными внутренними состояниями, исследована общая структура волновой функции для системы двух частиц и показано, что, вопреки традиционным представлениям, в рамках квантовой механики существует непрерывный переход между свойствами тождественных и нетождественных частиц, причем роль непрерывного параметра близости микрочастиц играет скалярное произведение их внутренних состояний. Это, в частности, послужило основой для разработки нового подхода к решению парадокса Гиббса, парадокса Эйнштейна и других парадоксов разрывности [5-8].

В настоящей заметке мы рассмотрим свойства частиц с неортогональными внутренними состояниями с точки зрения формализма вторичного квантования /см., например, [9] /.

Как известно, бозонные операторы рождения и уничтожения частиц удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\hat{a}_{m\vec{k}'}\hat{a}^{+}_{n\vec{k}} - \hat{a}^{+}_{n\vec{k}}\hat{a}_{m\vec{k}'} = \delta_{nm}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,, \qquad /1/$$

$$\hat{a}_{m\vec{k}'}\hat{a}_{n\vec{k}} - \hat{a}_{n\vec{k}}\hat{a}_{n\vec{k}'} = 0,$$

а фермионные - антикоммутационным соотношениям

$$\hat{a}_{m\vec{k}'}\hat{a}^{+}_{n\vec{k}} + \hat{a}^{+}_{n\vec{k}}\hat{a}_{m\vec{k}'} = \delta_{nm}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,, \qquad /2/$$

$$\hat{a}_{m\vec{k}'}\hat{a}_{n\vec{k}} + \hat{a}_{n\vec{k}}\hat{a}_{m\vec{k}'} = 0.$$

Здесь δ_{nm} - символ Кронекера, $\hat{a}^{+}_{n\vec{k}'}$ - оператор рождения частицы с внутренним состоянием $|A_n>$ и импульсом $\vec{k}$, $\hat{a}_{m\vec{k}'}$ - оператор уничтожения частицы с внутренним состоянием $|A_m>$ и импульсом $\vec{k}'$; при этом под $|A_n>$ и $|A_m>$ понимаются либо ортогональные друг другу $(m \neq n)$, либо одинаковые внутренние состояния $(m = n)$. Формулы /1/ и /2/ инвариантны относительно дираковских преобразований, т.е. справедливы в произвольном представлении.

В соответствии с общими принципами квантовой теории базисные состояния $|A_n>$ могут объединяться в произвольные суперпозиции /если такое объединение не запрещено дополнительными правилами суперотбора/. Пусть $|C> = \sum_n <A_n|C> |A_n>$, $|D> = \sum_m <A_m|D> |A_m>$, причем внутренние состояния $|C>$ и $|D>$, вообще говоря, неортогональны друг другу:

$$<C|D> = \sum_n < A_n|C>^* <A_n|D>. \qquad /3/$$

Ясно, что операторы рождения и уничтожения суперпозиций $|C>$ и $|D>$ будут иметь вид

$$\hat{a}^{+}_{C\vec{k}} = \sum_n \hat{a}^{+}_{n\vec{k}} <A_n|C>, \quad \hat{a}^{+}_{D\vec{k}} = \sum_m \hat{a}^{+}_{m\vec{k}} <A_m|D>,$$
$$\hat{a}_{C\vec{k}} = \sum_n \hat{a}_{n\vec{k}} <A_n|C>^*, \quad \hat{a}_{D\vec{k}} = \sum_m \hat{a}_{m\vec{k}} <A_m|D>^* \quad . \qquad /4/$$

---

* Например, операторы рождения и уничтожения долгоживущего и короткоживущего нейтральных K-мезонов связаны с соответствующими операторами для состояний K° и $\bar{K}^\circ$ соотношениями:

$$\hat{a}^{+}_{K_L} = \frac{(1+\epsilon)\hat{a}^{+}_{K^\circ} - (1-\epsilon)\hat{a}^{+}_{\bar{K}^\circ}}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}, \quad \hat{a}^{+}_{K_S} = \frac{(1+\epsilon)\hat{a}^{+}_{K^\circ} + (1-\epsilon)\hat{a}^{+}_{\bar{K}^\circ}}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}},$$

$$\hat{a}_{K_L} = \frac{(1+\epsilon^*)\hat{a}_{K^\circ} - (1-\epsilon^*)\hat{a}_{\bar{K}^\circ}}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}, \quad \hat{a}_{K_S} = \frac{(1+\epsilon^*)\hat{a}_{K^\circ} + (1-\epsilon^*)\hat{a}_{\bar{K}^\circ}}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}},$$

где ϵ - параметр нарушения CP-инвариантности

$$\left(<K_S|K_L> = \frac{2\,\mathrm{Re}\,\epsilon}{1+|\epsilon|^2}\right).$$

Используя /1-4/, мы сразу приходим к коммутационным и антикоммутационным соотношениям для частиц с неортогональными внутренними состояниями:

$$\hat{a}_{D\vec{k}}\hat{a}^{+}_{C\vec{k}'} - \eta\hat{a}^{+}_{C\vec{k}'}\hat{a}_{D\vec{k}} =$$
$$= \sum_n\sum_m (\hat{a}_{m\vec{k}}\hat{a}^{+}_{n\vec{k}'} - \eta\hat{a}^{+}_{n\vec{k}'}\hat{a}_{m\vec{k}}) <D|A_m><A_n|C> = <D|C>\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \qquad /5/$$

$$\hat{a}_{D\vec{k}}\hat{a}_{C\vec{k}'} - \eta\hat{a}_{C\vec{k}'}\hat{a}_{D\vec{k}} = 0, \qquad /6/$$

где η принимает значение $(+1)$ в случае бозонов и (-1) - в случае фермионов. Подчеркнем, что коммутационные и антикоммутационные соотношения /5/ содержат непрерывный параметр $<D|C>$, крайние значения которого /1 и 0/ соответствуют тождественным и нетождественным частицам.

Как обычно, обозначим символом $|0>$ вакуумное состояние. Из /5/ и /6/ непосредственно следует равенство

$$< 0|\hat{a}_{L_2\vec{k}_2}\hat{a}_{L_1\vec{k}_1}\hat{a}^{+}_{C\vec{k}'_1}\hat{a}^{+}_{D\vec{k}'_2}|0> = \qquad /7/$$
$$= <L_1|C><L_2|D>\delta_{\vec{k}_1\vec{k}'_1}\delta_{\vec{k}_2\vec{k}'_2} + \eta <L_1|D><L_2|C>\delta_{\vec{k}_1\vec{k}'_2}\delta_{\vec{k}_2\vec{k}'_1} .$$

С учетом /6/ легко определить структуру волновой функции двух частиц C и D с неортогональными внутренними состояниями. Предположим, что волновая функция частицы C /в импульсном представлении/ есть $\phi_1(\vec{k})$, а волновая функция частицы D - $\phi_2(\vec{k})$; при этом $<\phi_1|\phi_2> = 0$, $<C|D> \neq 0$. По определению, волновая функция рассматриваемого двухчастичного состояния равна амплитуде вероятности его регистрации двумя одночастичными детекторами, фиксирующими состояния $|C>$ и $|D>$. Следовательно,

$$\Psi_{CD}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, L_1, L_2) = <\Phi_2|\Phi_1>,$$

где

$$|\Phi_1> = \hat{a}^{+}_{C\phi_1}\hat{a}^{+}_{D\phi_2}|0> = \sum_{\vec{k}'_1}\sum_{\vec{k}'_2}\phi_1(\vec{k}'_1)\phi_2(\vec{k}'_2)\hat{a}^{+}_{C\vec{k}'_1}\hat{a}^{+}_{D\vec{k}'_2}|0>,$$

$$|\Phi_2\rangle = \hat a^+_{L_1\vec k_1}\hat a^+_{L_2\vec k_2}|0\rangle. \qquad /8/$$

Отсюда

$$\Psi(\vec k_1,\vec k_2,L_1,L_2) = \sum_{\vec k_1'}\sum_{\vec k_2'}\phi_1(\vec k_1')\phi_2(\vec k_2')\langle 0|\hat a_{L_2\vec k_2}\hat a_{L_1\vec k_1}\hat a^+_{C\vec k_1'}\hat a^+_{D\vec k_2'}|0\rangle. \qquad /9/$$

Применяя /7/, находим

$$\Psi_{CD}(\vec k_1,\vec k_2,L_1,L_2) = \langle L_1|C\rangle\langle L_2|D\rangle\phi_1(k_1)\phi_2(k_2) + $$

$$+\,\eta\langle L_1|D\rangle\langle L_2|C\rangle\phi_1(\vec k_2)\phi_2(\vec k_1). \qquad /10/$$

Формула /10/ совпадает с соответствующими выражениями, полученными в [4,5] на основе принципа интерференции квантово-механических амплитуд вероятности. Мы видим, что волновая функция двухчастичного состояния симметрична или антисимметрична относительно полной перестановки $\vec k_1 \leftrightarrows \vec k_2$, $L_1 \leftrightarrows L_2$. В то же время она, вообще говоря, не обладает определенной симметрией относительно перестановки одних только "внешних квантовых" чисел $\vec k_1$ и $\vec k_2$. Однако легко видеть, что симметрия или антисимметрия относительно перестановки $\vec k_1 \leftrightarrows \vec k_2$ нарушается тем меньше, чем ближе друг к другу состояния $|L_1\rangle$ и $|L_2\rangle$, фиксируемые приборами, или исходные внутренние состояния $|C\rangle$ и $|D\rangle$. Действительно,

$$\Delta\Psi = \Psi_{CD}(\vec k_1,\vec k_2,L_1,L_2) - \eta\Psi_{CD}(\vec k_2,\vec k_1,L_1,L_2) = \qquad /11/$$

$$= (\phi_1(\vec k_1)\phi_2(\vec k_2) - \eta\phi_2(\vec k_1)\phi_1(\vec k_2))(\langle L_1|C\rangle\langle L_2|D\rangle - \langle L_1|D\rangle\langle L_2|C\rangle).$$

Если $|L_1\rangle \to |L_2\rangle$ или $|C\rangle \to |D\rangle$, то $\Delta\Psi \to 0$, т.е. имеет место непрерывный переход к волновой функции тождественных частиц

$$\Psi \sim \phi_1(\vec k_1)\phi_2(\vec k_2) \pm \phi_1(\vec k_2)\phi_2(\vec k_1).$$

Таким образом, аппарат вторичного квантования автоматически приводит к единому описанию свойств тождественных и нетождественных частиц, включающему непрерывный переход от различающихся внутренних состояний к одинаковым.

В качестве иллюстрации найдем дифференциальную вероятность того, что частицы, которым отвечает волновая функция /10/, будут обнаружены в пространственных точках $\vec x_1$ и $\vec x_2$. Для этого нужно перейти в координатное представление, взять в качестве $|L_1\rangle$ и $|L_2\rangle$ базисные состояния $|A_m\rangle$ и $|A_n\rangle$ и просуммировать $|\Psi_{CD}|^2$ по всем возможным значениям внутренних квантовых чисел. В итоге получаем:

$$W(\vec x_1,\vec x_2) = \sum_m\sum_n|\Psi_{CD}(\vec x_1,\vec x_2,A_m,A_n)|^2 = \qquad /12/$$

$$= |u(\vec x_1,\vec x_2)|^2 + |u(\vec x_2,\vec x_1)|^2 + 2\eta|\langle C|D\rangle|^2\,\mathrm{Re}[u(\vec x_1,\vec x_2)u^*(\vec x_2,\vec x_1)],$$

где

$u(\vec x_1,\vec x_2) = \phi_1(\vec x_1)\phi_2(\vec x_2)$, $u(\vec x_2,\vec x_1) = \phi_1(\vec x_2)\phi_2(\vec x_1)$ $(\int\phi_1(\vec x)\phi_2(\vec x)d^3\vec x)$.

Величина $W(\vec x_1,\vec x_2)$ непрерывно зависит от степени неортогональности внутренних состояний $\langle C|D\rangle$ и удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{1}{2}\int W(\vec x_1,\vec x_2)\,d^3\vec x_1\,d^3\vec x_2 = 1.^{*}$$

Рассмотрим поведение $W(\vec x_1,\vec x_2)$ при $\vec x_1 \to \vec x_2$. Обозначим $u \equiv u(\vec x_1,\vec x_2)$. Тогда, согласно /11/,

$$W(\vec x,\vec x) = 2|u|^2(1+\eta|\langle C|D\rangle|^2). \qquad /13/$$

Вероятность регистрации двух бозонов в малой пространственной области ΔV равна

$$P = \frac{1}{2}W(\vec x,\vec x)(\Delta V)^2 = |u|^2(1+|\langle C|D\rangle|^2)(\Delta V)^2. \qquad /14/$$

В пределе $|C\rangle \to |D\rangle$ вероятность регистрации двух бозонов удваивается по сравнению со случаем нетождественных частиц, а в случае "частично различных" состояний $(0<|\langle C|D\rangle|<1)$ принимает промежуточные значения.

---

*Коэффициент 1/2 связан с тем, что при интегрировании по фазовому объему двухчастичной системы одни и те же события учитываются дважды.

Если речь идет о фермионах, то

$$P = |u|^2 (1 - |\langle C|D\rangle|^2)(\Delta V)^2. \qquad /15/$$

При $|C\rangle \to |D\rangle$ вероятность регистрации непрерывно стремится к нулю /принцип Паули/. Подчеркнем, что в нашем рассмотрении данный запрет выступает не как абсолютный; при любом отступлении величины $|\langle C|D\rangle|$ от единицы $P > 0$.

Автор признателен М.И.Подгорецкому за интерес к работе и ценные советы, а также Б.Н.Валуеву, В.И.Огиевецкому и М.И.Широкову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любошиц В.Л. ОИЯИ, Р2-4631, Дубна, 1969.*
2. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ЖЭТФ, 1971, 60, с.9.*
3. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, Р2-6116, Дубна, 1971.*
4. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, Р2-5809, Дубна, 1971.*
5. *Гельфер Я.М., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. "Наука", М., 1975.*
6. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ДАН СССР, 1970, 194, с.547.*
7. *Любошиц В.Л. ДАН СССР, 1970, 195, с.63.*
8. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. УФН, 1971, 105, с.353.*
9. *Липкин Г. Квантовая механика. "Мир", М., 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1979 года.