объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12267

Н.А.Свешников

ПРОСТРАНСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ $g \Psi \Psi \varphi$

1979

P2 - 12267

Н.А.Свешников

ПРОСТРАНСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ $g\bar{\Psi}\Psi\varphi$

Направлено в ТМФ

Свешников Н.А. P2 - 12267

Пространство асимптотических состояний в теории $g\bar{\psi}\psi\phi$

Предлагается формулировка метода асимптотической динамики, позволяющая провести построение пуанкаре-инвариантного пространства асимптотических состояний в теориях с безмассовыми частицами. В качестве примера рассмотрена теория с взаимодействием $g\bar{\psi}\psi\phi$, где ϕ - безмассовое скалярное поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Sveshnikov N.A. P2 - 12267

Asymptotic Space in the $g\bar{\psi}\psi\phi$ Theory

A formulation of the method of asymptotic dynamics is proposed, which permits to construct a Poincare-invariant space of asymptotic states for theories with massless particles. The theory with interaction $g\bar{\psi}\psi\phi$ is examined as an example, where ϕ is a massless scalar field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В последние годы, особенно в связи с попытками построить пространство асимптотических состояний в квантовой хромодинамике, большой интерес вызывают проблемы, связанные с инфракрасными расходимостями в квантовой теории поля. Существует предположение /1-4/, что последовательная процедура устранения из теории инфракрасных расходимостей приведет к пространству состояний, существенно отличному от фоковского, и, в частности, позволит теоретически описать явление "невылетания" кварков. Основная трудность в формулировке такой процедуры определяется ее явно непертурбативным характером, связанным с необходимостью учета инфракрасных расходимостей во всех порядках по константе связи.

С нашей точки зрения, наиболее последовательным подходом к решению указанной проблемы является использование метода асимптотической динамики, состоящего в построении матрицы рассеяния в представлении, отличном от представления взаимодействия. В квантовой теории поля этот метод был впервые сформулирован в известной работе П.П.Кулиша и Л.Д.Фаддеева /5/ при построении пространства асимптотических состояний в квантовой электродинамике /КЭД/. Дальнейшие примеры применения метода асимптотической динамики для решения инфракрасных проблем содержатся в работах /6-8/. Необходимо, однако, отметить, что использование этого метода сопряжено с рядом трудностей, связанных с нарушением пуанкаре-инвариантности в традиционной формулировке представления асимптотической динамики.

В настоящей работе предлагается формулировка представления асимптотической динамики, позволяющая в принципе построить пуанкаре-инвариантное пространство асимптотических состояний, отличное от фоковского, в котором существует инфракрасно конечная S-матрица, а также получить количественное описание структуры инфракрасных расходимостей матричных элементов в представлении взаимодействия. В основе предлагаемой схемы лежит тот факт, что инфракрасные расходимости отсутствуют в пространстве размерности $n>4$. Следовательно, при $n-4=\epsilon>0$ теория может быть сформулирована в фоковском пространстве и при этом "существенные" в терминологии Киношиты и Укавы [9] инфракрасные расходимости будут проявляться как обратные степени ϵ в перенормированных матричных элементах. Переход от представления взаимодействия к представлению асимптотической динамики описывается при этом унитарным оператором асимптотической эволюции $U_{as}(t)$ в фоковском пространстве, который, однако, сингулярным образом зависит от ϵ при $t\to\infty$ и в пределе $\epsilon\to+0$ описывает переход к нефоковскому пространству асимптотических состояний. Отметим, что в построении оператора асимптотической эволюции наблюдается произвол, связанный с выбором асимптотического гамильтониана $H_{as}(t)$. Этот произвол можно параметризовать, например, введением параметра T, характеризующего момент включения асимптотического взаимодействия /т.е. $H_{as}(t)=0$ при $|t|\leq T$ /. Совершив в конце предельный переход $T\to\infty$, мы добьемся исчезновения регулярной по ϵ части $U_{as}(\infty)$, которая нарушает пуанкаре-инвариантность, и придем к инвариантному пространству асимптотических состояний.

В качестве примера будем рассматривать теорию с гамильтонианом взаимодействия $g\bar{\psi}\psi\phi$, где ψ - поле массивных фермионов и ϕ - безмассовое скалярное поле. Полученные результаты легко обобщаются на случай взаимодействия вида $J\phi$ и с некоторыми модификациями на случай $J_\mu A^\mu$, где J, J_μ - токи массивных частиц, A^μ - безмассовое векторное поле.

1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ БЕЗМАССОВЫХ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

Подробное описание пространства состояний свободных фотонов в 4-мерном пространстве содержится в работах [10, 11]. Рассмотрение свободного безмассового скалярного поля может быть проведено по такой же схеме с дополнительными упрощениями, связанными с дефинитностью метрики. Ниже вкратце изложены результаты такого рассмотрения.

Основным источником трудностей является необходимость видоизменения скалярного произведения в одночастичном пространстве $\mathcal{E}$. Действительно, физические соображения /желание рассматривать ситуации с неисчезающим на временной бесконечности током массивных частиц/ требуют наличия в $\mathcal{E}$ волновых функций $f(\vec{k})\sim|\vec{k}|^{-1}$ при $|\vec{k}|\to 0$. Поэтому разумно в качестве $\mathcal{E}$ выбрать пространство $\mathcal{S}$ функций от $\vec{k}=\omega\hat{\vec{k}}$, где $\hat{\vec{k}}^2=1$, $\omega\in[0,\infty)$ [11]. В то же время "естественное" лоренц-инвариантное скалярное произведение в $\mathcal{E}$:

$$(f_1,f_2)=\int\frac{d\vec{k}}{2\omega}f_1^*(\vec{k})f_2(\vec{k})=\int\frac{d\hat{\vec{k}}}{2}\int_0^\infty\omega d\omega\, f_1^*(\omega,\hat{\vec{k}})f_2(\omega,\hat{\vec{k}}) \qquad /1/$$

сингулярно при условии $\lim_{\omega\to 0}\omega f_{1,2}(\vec{k})\neq 0$ в силу логарифмической расходимости интеграла по энергии в /1/ на нижнем пределе. Следовательно, для дальнейшего продвижения нужно инфракрасно регуляризовать /1/. Независимо от конкретного выбора регуляризации регуляризованное скалярное произведение $(f_1,f_2)_\lambda$ может быть представлено в виде

$$(f_1,f_2)_\lambda=\frac{1}{\lambda}(f_1,f_2)_0+(f_1,f_2)_1+O(\lambda), \qquad /2/$$

где предел $\lambda\to+0$ соответствует снятию регуляризации, $(f_1,f_2)_{0,1}$ - конечные полуторалинейные формы по волновым функциям, причем $(f_1,f_2)_0$ содержит лишь предельные значения волновых функций

$$\lim_{\omega\to 0}\omega f_{1,2}(\omega,\hat{\vec{k}})=f_{1,2}(\hat{\vec{k}}). \qquad /3/$$

Можно показать, что при разумном выборе регуляризации $(f_1,f_2)_\lambda$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скалярному произведению [11]. Вследствие указанного выше свойства $(f_1,f_2)_0$ для функций $f_{1,2}\in\mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0=\{f\in\mathcal{E}\,|\,f(\hat{\vec{k}})=0\}$, имеет место равенство $(f_1,f_2)_\lambda=(f_1,f_2)$.

На основе изложенного, над базисным пространством $\mathcal{E}$, снабженным регуляризованным скалярным произведением /2/, обычным путем может быть построено фоковское пространство $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, после чего следует попытаться перейти к пределу $\lambda\to+0$. Такой предельный переход оказывается возможным для когерентных подпространств $W[f] \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$ [5,10,11], которые выделяются условием

$$\lim_{\omega\to 0} \omega\phi(\omega, \hat{\vec{k}})\, W[f] = f(\hat{\vec{k}})W[f], \qquad /4/$$

где $\phi(\omega, \hat{\vec{k}})$ - оператор уничтожения скалярного поля в обычной нормировке.

Можно показать [5], что $W[f]$ не зависит от конкретного выбора представителя $f \in \mathcal{E}$ из класса эквивалентности:

$$f \sim g, \quad \text{если} \quad \lim_{\omega\to 0} \omega f(\omega, \hat{\vec{k}}) = \lim_{\omega\to 0} \omega g(\omega, \hat{\vec{k}}). \qquad /5/$$

На каждом из подпространств $W[f]$ реализуется представление КПС для поля ϕ, причем эти представления униитарно неэквивалентны при $\lambda = 0$ вследствие взаимной ортогональности когерентных подпространств [5,10].

Перейдем к технической реализации изложенной схемы применительно к задачам, рассматриваемым в настоящей работе. В работах [12-15] на основе вычислений в КЭД было показано, что весьма удобным способом регуляризации инфракрасных расходимостей является, в силу своих инвариантных свойств, размерная регуляризация, что связано с отсутствием инфракрасных расходимостей в пространстве размерности $n > 4$. Положим $n = 4+\epsilon$. Переход к реальному миру соответствует пределу $\epsilon \to +0$. Мы будем пользоваться следующей нормировкой полевых операторов, удобство которой следует из /4/: свободное безмассовое поле есть

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{3+\epsilon}{2}} \int \frac{d\vec{k}}{2\omega^2_{\vec{k}}} (\phi^+(\vec{k})e^{ikx} + \phi(\vec{k})e^{-ikx}), \qquad /6/$$

где $k_0 = \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$. Тогда $[\phi(\vec{k}), \phi^+(\vec{\ell})] = 2\omega^3_{\vec{k}}\delta(\vec{k}-\vec{\ell})$. Положим, по определению

$$\phi^{\#}(\hat{\vec{k}}) = \lim_{\omega\to 0} \phi^{\#}(\omega, \hat{\vec{k}}). \qquad /7/$$

В дальнейшем объектам /7/ будут приданы свойства /8/ операторов. Лоренц-инвариантное скалярное произведение функций $f_{1,2} \in \mathcal{E}$ в пространстве размерности $4+\epsilon$ будем обозначать

$$(f_1, f_2) \equiv f^*_1 \circ f_{2\epsilon}. \qquad /8/$$

Введем также аналогичное обозначение для сглаженных полевых операторов

$$\phi[f] \equiv f^* \circ \phi_\epsilon\ ;\ \phi^+[f] = \phi^+ \circ f_\epsilon, \qquad f \in \mathcal{E}. \qquad /9/$$

При $\epsilon > 0$ скалярное произведение /8/ хорошо определено, и, следовательно, пространство состояний свободных безмассовых частиц $\mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Для функций $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$ /8/ равно

$$f^*_1 \circ f_{2\epsilon} = \int \frac{d\hat{\vec{k}}}{2\omega^3_{\vec{k}}} f^*_1(k) f_2(k) = \int \frac{d\hat{\vec{k}}}{2} \int_0^\infty \omega^{\epsilon-1} d\omega\, f^*_1 f_2(\omega, k), \qquad /10/$$

что при $\epsilon \to +0$ может быть записано в виде

$$f^*_1 \circ f_{2\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} f^*_1 \circ f_2 + f^*_1 \circ f_{2\Lambda}, \qquad /11/$$

где

$$f^*_1 \circ f_2 = \int \frac{d\hat{\vec{k}}}{2} f^*_1(\hat{\vec{k}}) f_2(\hat{\vec{k}}). \qquad /12/$$

$$f^*_1 \circ f_{2\Lambda} = -\int \frac{d\hat{\vec{k}}}{2} \int_0^\infty d\omega \ln\Big(\frac{\omega}{\Lambda(\hat{\vec{k}})}\Big) \frac{\partial}{\partial\omega} (f^*_1 f_2(\omega, \hat{\vec{k}})), \qquad /13/$$

$f_i(\hat{\vec{k}}) = \lim_{\omega\to 0} f_i(\omega, \hat{\vec{k}})$, $\Lambda(\hat{\vec{k}})$ - произвольная положительная функция с размерностью энергии. Как можно показать [15], эта функция связана с выбором представителей в классах эквивалентности /5/ и не влияет на структуру инфракрасных расходимостей.

Инфракрасные особенности теории связаны с первым членом выражения /11/. Для выделения связанных с ним структур в фоковском пространстве $\mathcal{F}_\epsilon$ рассмотрим базис когерентных состояний поля ϕ, которые вводятся соотношением

$$|\alpha\rangle_\epsilon = \exp(\alpha \circ \overset{+}{\phi}_\epsilon - \alpha^* \circ \phi_\epsilon)|0\rangle_\epsilon \qquad /14/$$

и удовлетворяют условиям $\phi(\vec{k})|\alpha\rangle_\epsilon = \alpha(\vec{k})|\alpha\rangle_\epsilon$

$$\langle\alpha|_\epsilon|\beta\rangle_\epsilon = \exp\Big(-\frac{1}{2}(\alpha^* - \beta^*)\circ(\alpha - \beta)_\epsilon + i\,\mathrm{Im}(\alpha^* \circ \beta)_\epsilon\Big),$$

где $|0\rangle_\epsilon$ есть фоковский вакуум, т.е. $\phi(\vec{k})|0\rangle_\epsilon = 0 \ \forall \vec{k}$. Основываясь на формуле /11/, можно попытаться представить состояние /14/ в виде

$$|\alpha\rangle_\epsilon = \exp(\frac{1}{\epsilon}(\alpha \circ \phi^+ - \alpha^* \circ \phi))|0\rangle \otimes \exp(\alpha \circ \phi^+_\Lambda - \alpha^* \circ \phi_\Lambda)|0\rangle_\Lambda . \qquad /15/$$

Представление /15/ оправдывается тем обстоятельством, что фоковское пространство может быть рассматриваемо как непрерывное тензорное произведение пространств, содержащих частицы с фиксированным импульсом [16] и оценкой

$$f^*_1 \circ f_{2\Lambda} = \int \frac{d\hat{\vec{k}}}{2} \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega \ln(\frac{\omega}{\Lambda(\hat{\vec{k}})}) \frac{\partial}{\partial\omega}(f^*_1 f_2)(\omega, \hat{\vec{k}}) + O(\omega_0 \ln \omega_0),$$

которая означает, что частицы нулевой энергии фактически не дают вклада в $f^*_1 \circ f_{2\Lambda}$. В формуле /15/

$$\exp(\frac{1}{\epsilon}(\alpha \circ \phi^+ - \alpha^* \circ \phi))|0\rangle = |\alpha\rangle \qquad /16/$$

есть когерентное состояние частиц нулевой энергии, которым соответствуют "операторы" /7/. Скалярное произведение таких состояний равно

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp(-\frac{1}{2\epsilon}(\alpha^* - \beta^*)\circ(\alpha - \beta) + \frac{i}{\epsilon}\operatorname{Im}(\alpha^* \circ \beta)). \qquad /17/$$

Используя /15/, представляем $\mathcal{F}_\epsilon$ в виде

$$\mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_\Lambda , \qquad /18/$$

где $\mathcal{F}_\Lambda$ - пространство частиц ненулевой энергии со скалярным произведением /13/, $\mathcal{F}_0$ - пространство частиц нулевой энергии, порожденное состояниями /16/.

Следует отметить, что результатам нашего рассмотрения можно придать строгий смысл в духе теории когерентных пространств. В частности, /15/ есть состояние, принадлежащее когерентному подпространству $W[\alpha]$, а пространство $\mathcal{F}_\Lambda$ в /18/ фактически совпадает с $\mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$. Удобство нашего подхода, содержащегося в формулах /15/-/18/, состоит в его явной независимости от выбора когерентных представителей в классах

/5/. Вместе с тем при работе с "операторами рождения и уничтожения частиц нулевой энергии" $\phi^{\#}(\hat{\vec{k}})$ следует соблюдать известную осторожность. В самом деле, формула /16/ вызывает желание заключить, что

$$[\phi(\hat{\vec{k}}), \phi^+(\hat{\vec{\ell}})] = 2\epsilon\delta(\hat{\vec{k}} - \hat{\vec{\ell}}), \qquad /19/$$

и строить асимптотическую динамику на основе гамильтониана типа

$$\frac{igm \operatorname{sgn}(t)}{(2\pi)^{(3+\epsilon)/2}} \Theta(t^2 - T^2) \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{|t|^{1+\epsilon}} \int \frac{d\vec{p}}{2p_0} \rho(\vec{p}) \frac{d\hat{\vec{k}}}{2p\hat{k}} \times$$
$$\times [\phi^+(\hat{\vec{k}}) e^{i\frac{\pi}{2}\epsilon \operatorname{sgn} t} - \phi(\hat{\vec{k}}) e^{-i\frac{\pi}{2}\epsilon \operatorname{sgn} t}]. \qquad /20/$$

Можно, однако показать, что решения гейзенберговских уравнений для /20/ имеют неправильный вид /точнее, воспроизводится лишь часть точной асимптотики полевых операторов/. Использование коммутатора /19/ оправдано лишь при вычислении скалярных произведений типа /17/. Помня об этом ограничении, мы будем в следующих разделах опускать кавычки при слове "операторы", говоря о $\phi^{\#}(\hat{\vec{k}})$.

2. *ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ*

В данном разделе будет изложена схема построения представления асимптотической динамики. Наше рассмотрение будет максимально упрощенной и чисто формальной демонстрацией того, что теория поля в представлении асимптотической динамики может быть в принципе сформулирована на том же уровне, который принят при квантовополевых вычислениях в представлении взаимодействия. Безусловно, при попытках придать более или менее строгий смысл излагаемой схеме, мы столкнулись бы с теми же проблемами, что и при обычной формулировке теории поля [17]. Единственным преимуществом представления асимптотической динамики перед представлением взаимодействия является возможность построения теории возмущений, свободной от инфракрасных расходимостей. Это, естественно, связано с тем, что при наличии в теории частиц нулевой энергии и как следствие дальнодействующих сил представление об асимптотически свободном движении частиц оказывается слишком грубым даже на формальном уровне строгости.

В целях упрощения выкладок мы будем рассматривать случай одного поля и игнорировать его аргументы, связанные с несущественными степенями свободы. Пусть полный гамильтониан есть $H[\phi, \phi^+]$, где ϕ^+ и ϕ - операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие обычным перестановочным соотношениям. Введем гейзенберговские полевые операторы как формальные решения уравнений

$$\begin{cases} i\dfrac{d\phi_h^{\#}(t)}{dt} = [\phi_h^{\#}(t),\ H[\phi_h(t),\ \phi_h^{+}(t)]] \\ \phi_h^{\#}(0) = \phi^{\#}. \end{cases} \qquad /21/$$

Пространство физических состояний $\mathcal{H}$ порождается собственными состояниями полного гамильтониана H.

В представлении асимптотической динамики роль свободного гамильтониана H_0 исполняет асимптотический гамильтониан $H^{\circ}_{as}[a, a^+; t]$, который, возможно, явно зависит от времени /см. раздел 3/. Гамильтониан асимптотического взаимодействия в представлении взаимодействия

$$H_{as}[a, a^+; t] = H^{\circ}_{as}[a_D(t),\ a^+_D(t),\ t] - H_0[a_D(t),\ a^+_D(t)],$$

где $a^{\#}_D(t)$ - свободные поля, широко используемый в дальнейшем, мы также будем называть для краткости асимптотическим гамильтонианом. Асимптотические поля $a^{\#}_{as}(t)$ определяются как решения уравнений

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}a^{\#}_{as}(t) = [a^{\#}_{as}(t),\ H^{\circ}_{as}[a_{as}(t),\ a^{+}_{as}(t);\ t] \\ a^{\#}_{as}(0) = a^{\#}_{as}, \end{cases} \qquad /22/$$

откуда

$$a^{\#}_{as}(t) = \overset{+}{U}{}^{\circ}_{as}(t)\, a^{\#}\, U^{\circ}_{as}(t),$$

где оператор асимптотической эволюции $U^{\circ}_{as}(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}U^{\circ}_{as}(t) = H^{\circ}_{as}(a,\ a^+;\ t)U^{\circ}_{as}(t) \\ U^{\circ}_{as}(0) = 1. \end{cases} \qquad /23/$$

Пространства асимптотических состояний порождаются собственными состояниями предельных гамильтонианов

$$H^{\pm}[a, a^+] = \lim_{t\to\pm\infty} H^{\circ}_{as}[a_{as}(t),\ a^{+}_{as}(t);\ t]$$

и связаны с пространствами $\mathcal{H}^{\pm}_0$, порождаемыми собственными состояниями асимптотического гамильтониана $H^{\circ}_{as}(t)$ при $t\to\pm\infty$, соотношением

$$\mathcal{H}^{\pm}_{as} = \lim_{t\to\pm\infty} \overset{+}{U}{}^{\circ}_{as}(t)\mathcal{H}^{\pm}_0. \qquad /24/$$

Для широкого класса теорий в $(4+\epsilon)$-мерном пространстве пространства $\mathcal{H}^{\pm}_0$ порождаются собственными состояниями свободного гамильтониана и, следовательно, совпадают с $\mathcal{F}_\epsilon$ /18/. Тогда в /24/ можно перейти к представлениям взаимодействия, что дает

$$\mathcal{H}^{\pm}_{as} = \overset{+}{U}_{as}(\pm\infty)\,\mathcal{F}_\epsilon\ , \qquad /25/$$

где $U_{as}(t)$ удовлетворяет уравнению /23/, в котором сделана замена $H^{\circ}_{as}(t)\to H_{as}(t)$. В силу отсутствия инфракрасных расходимостей в $(4+\epsilon)$-мерном пространстве операторы $U_{as}(\pm\infty)$ формально существуют и конечны, хотя, вообще говоря, сингулярным образом зависят от ϵ при $\epsilon\to+0$.

Введем теперь оператор $V(t)$ соотношением

$$\phi^{\#}_h(t) = V^{+}(t)\,a^{\#}_{as}(t)\,V(t). \qquad /26/$$

Тогда в силу /21/ и /22/ $V(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d}{dt}V(t) = (H[a_{as}(t),\ a^{+}_{as}(t)] - H^{\circ}_{as}[a_{as}(t),\ a^{+}_{as}(t);t])V(t).$$

Для формальной непротиворечивости постановки задачи рассеяния следует потребовать существования пределов

$$S_{\pm} = \lim_{t \to \pm\infty} V(t). \qquad /27/$$

Тогда

$$V(t) = T\exp(-i\int_{-\infty}^{t} d\tau (H - H^{\circ}_{as})[a_{as}(\tau), a^{+}_{as}(\tau);\tau])S_{-} \qquad /28/$$

и необходимым условием существования /27/ является сходимость на верхнем пределе интеграла

$$\int^{\pm\infty} (H[a_{as}(t), a^{+}_{as}(t)] - H^{\circ}_{as}[a_{as}(t), a^{+}_{as}(t); t])dt < \infty. \qquad /29/$$

При $n = 4$ условие /29/ нарушается в представлении взаимодействия /т.е. при $H^{\circ}_{as} = H_0$ / для ряда теорий, в которых присутствуют безмассовые частицы: гамильтониан взаимодействия ведет себя как t^{-1} при $t \to \infty$, что и приводит к инфракрасным трудностям.

В предположении, что пределы /27/ существуют, из /26/ и /29/ можно заключить, что

$$S_{\pm} H[\phi, \phi^{+}] = H_{\pm}[a, a^{+}]S_{\pm}.$$

Тогда пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^{-}_{as}$ связаны соотношением

$$\mathcal{H} = S^{+}_{\pm}\mathcal{H}^{\pm}_{as} = S^{+}_{\pm}U^{+}_{as}(\pm\infty)\mathcal{F}_{\epsilon}, \qquad /30/$$

которое вместе с /28/ дает основу для построения теории возмущений в представлении асимптотической динамики. Действительно, произвольный матричный элемент можно теперь записать в виде

$$S_{fi} = \langle \Psi^{f}_{as} | S_{as} | \Psi^{i}_{as} \rangle, \qquad /31/$$

где $|\Psi^{f,i}_{as}\rangle \in \mathcal{H}^{\pm}_{as}$ и $S_{as} = S_{+}S^{+}_{-}$,

$$S_{as} = T\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}(H - H^{\circ}_{as}(t))[a_{as}(t), a^{+}_{as}(t); t]dt). \qquad /32/$$

В предположении справедливости /25/ можно записать /31/ в виде

$$S_{fi} = \langle \Psi^{f} | U_{as}(+\infty)S_{as}U^{+}_{as}(-\infty) | \Psi^{i} \rangle, \qquad /33/$$

где $|\Psi^{f,i}\rangle \in \mathcal{F}_{\epsilon}$

Заметим, что в формуле /33/ матрица рассеяния в представлении асимптотической динамики инфракрасно конечна /т.е. регулярна как функция ϵ при $\epsilon \to +0$ / в силу /27/. Напротив, операторы $U_{as}(\pm\infty)$ и скалярное произведение в $\mathcal{F}_{\epsilon}$, как отмечалось выше, сингулярны по ϵ в этом пределе. Следовательно, требование конечности матричного элемента /33/ при снятии регуляризации приводит к некоему "закону сохранения" в том смысле, что задание состояния $|\Psi^{i}\rangle$ налагает определенные ограничения /вдобавок к обычным законам сохранения/ на вид $|\Psi^{f}\rangle \in \mathcal{F}_{\epsilon}$. В частности, если $|\Psi^{i}\rangle \in U_{as}(-\infty)\mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$, то из условия конечности /33/ следует, что $|\Psi^{f}\rangle \in U_{as}(+\infty)\mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$. В следующем разделе нами будет получен явный вид такого закона сохранения для рассматриваемой модели. Другим примером является условие "инфракрасной когерентности" в КЭД /10,11/.

Формулы /31/-/33/, приводящие к конечной S-матрице, достаточно неудобны для практических вычислений матричных элементов в теории возмущений. Очевидно, однако, что

$$S_{fi} = \langle \Psi^{f} | S_{D} | \Psi^{i} \rangle, \qquad /34/$$

где

$$S_{D} = T\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}(H - H_0)(a_{D}(t), a^{+}_{D}(t))dt)$$

- обычная S-матрица в представлении взаимодействия, которая уже инфракрасно сингулярна. При этом матричный элемент /34/ конечен, если $|\Psi^{i}\rangle$ и $|\Psi^{f}\rangle$ связаны упоминавшимся выше законом сохранения.

Таким образом, с точки зрения построения конечной S-матрицы роль представления асимптотической динамики сводится к установлению ограничений на возможные переходы между состояниями из $\mathcal{F}_{\epsilon}$. Одновременно это представление позволяет получить структуру инфракрасных расходимостей матричных элементов в обычном подходе. Действительно, инфракрасные расходимости матричного элемента /34/ между произвольными состояниями $|\Psi^{fi}\rangle \subset \mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$ определяются сингулярной частью скалярного произведения состояний $U^+_{as}(+\infty)|\Psi^f\rangle$ и $U^+_{as}(-\infty)|\Psi^i\rangle$ в силу

$$\langle\Psi^f|S_D|\Psi^i\rangle = \langle\Psi^f|U_{as}(+\infty)S_{as}U^+_{as}(-\infty)|\Psi^i\rangle . \qquad /35/$$

3. *СТРУКТУРА ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Построим теперь представление асимптотической динамики для теории с гамильтонианом взаимодействия $g\bar\psi\psi\phi$, где ψ - спинорное поле массы m и ϕ - безмассовое скалярное поле. Мы будем пользоваться следующей нормировкой полевых операторов: поле ψ в представлении взаимодействия имеет вид

$$\psi(x)=(2\pi)^{-\frac{3+\epsilon}{2}}\int\frac{d\vec p}{2E_{\vec p}}\left(e^{ipx}d_s^+(\vec p)u^s(\vec p)+e^{-ipx}b_s(\vec p)v^s(\vec p)\right), \qquad /36/$$

где

$p_0=E_{\vec p}=(\vec p^{\,2}+m^2)^{1/2}$, $[b_s(\vec p), b^+_\sigma(\vec q)]_+ = [d_s(\vec p), d^+_\sigma(\vec q)]_+ = 2E_{\vec p}\,\delta(\vec p-\vec q)$,

а поле $\phi(x)$ дается формулой /6/.

Построение асимптотического гамильтониана в рассматриваемой теории полностью аналогично соответствующей процедуре в электродинамике [5] и приводит к результату:

$$H_{as}(t)=\frac{gm}{(2\pi)^{\frac{3+\epsilon}{2}}}\int\frac{d\vec p}{2E^2_{\vec p}}\rho(\vec p)\left(e^{i\frac{pk}{E_{\vec p}}t}\phi^+(\vec k)+e^{-i\frac{pk}{E_{\vec p}}t}\phi(\vec k)\right)f_T(\vec p,\vec k,t), \qquad /37/$$

где $\rho(\vec p)=\sum_s\left(b^+_s(\vec p)b_s(\vec p)+d^+_s(\vec p)d_s(\vec p)\right)$.

Единственное существенное отличие гамильтониана /37/ от асимптотического гамильтониана, используемого в [5], состоит во введении "инфракрасного формфактора" $f_T(\vec p,\vec k,t)$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} f_T(\vec p,\vec k,t)=0, & \text{если } |t|\le T \\ f_T(\vec p,\vec k,t)=1, & \text{если } |t|>T \quad \omega_{\vec k}=0 \\ f_T(\vec p,\vec k,t)=0 \quad \forall\ t & \text{при } \omega>\omega_0 \text{ равномерно по } \vec p, \end{cases} \qquad /38/$$

где $T \gg m^{-1}$, $0<\omega_0\ll m$.

Смысл условий /38/ состоит в следующем: первое условие обеспечивает "малость" вклада $H_{as}(t)$ при конечных временах. Действительно, физические соображения и рассмотрение предыдущего раздела говорят о том, что существенные моменты в перестройке теории возмущений связаны с бесконечно большими временами. Роль $H_{as}(t)$ при конечных временах сводится к нарушению закона сохранения энергии, и ее желательно сделать по возможности малой. Третье условие гарантирует нас от возникновения ультрафиолетовых проблем при построении оператора асимптотической эволюции. Наконец, второе условие определяется самим выводом формулы /37/.

Как указывалось во введении, нас будут интересовать в первую очередь принципиальная возможность построения инфракрасно конечной S -матрицы и структура инфракрасных расходимостей матричных элементов в обычной теории возмущений. Обе эти проблемы связаны с сингулярностями оператора эволюции в пределе $\epsilon\to+0$. Поэтому при рассмотрении мы будем последовательно игнорировать члены, приводящие при $\epsilon\to+0$ к конечным вкладам. Из приведенных ниже выкладок видно, что только такие члены зависят от явного вида f_T при условиях /38/. Более того, легко показать, что эти члены исчезают при переходе в окончательных выражениях к пределу $T\to\infty$.

Для сокращения записи введем обозначение

$$\rho\circ g_t = \int\frac{d\vec p}{2E_{\vec p}}\rho(\vec p)\,g(\vec p,t). \qquad /39/$$

Используя /39/ и /9/, можно записать /37/ в виде

$$H_{as}(t)=\rho\circ(f_t\circ\phi^+_\epsilon+f^*_t\circ\phi_\epsilon),$$

где

$$f_t(\vec p,\vec k)=\frac{gm}{(2\pi)^{\frac{3+\epsilon}{2}}}\,\frac{\omega_{\vec k}}{E_{\vec p}}\,f_T(\vec p,\vec k,t)\,e^{i\frac{pk}{E_{\vec p}}t}.$$

Оператор асимптотической эволюции в представлении взаимодействия $U_{as}(t)$ удовлетворяет уравнению /23/:

$$\begin{cases} i\dfrac{dU_{as}(t)}{dt}=\rho\circ(f_t\circ\phi^+_\epsilon+f^*_t\circ\phi_\epsilon)U_{as}(t) \\ U_{as}(0)=1. \end{cases}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$U_{as}(t)=\exp(\rho \circ (F_t \circ \phi_\epsilon - F_t^* \circ \phi_\epsilon) + i\rho \circ R_t \circ \rho), \qquad /40/$$

где $F_t(\vec{p},\vec{k}) = -i\int_0^t f_\tau(\vec{p},\vec{k})d\tau$,

$$R_t(\vec{p},\vec{q}) = \mathrm{Im}\int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \int \frac{d\vec{k}}{2\omega^3_{\vec{k}}} f_s^*(\vec{p},\vec{k}) f_\tau(\vec{q},\vec{k}). \qquad /41/$$

Как можно показать, используя /38/, /41/ равно

$$R_t(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{\epsilon}(T^{-\epsilon} - |t|^{-\epsilon})\frac{g^2}{8\pi}\left(\frac{(pq)^2}{m^4}-1\right)^{-1/2}\Theta(t^2-T^2)+(\dots),$$

где явно выделена Θ-функция, связанная с первым из условий /38/ и через $(\dots)$ обозначены несущественные члены, т.е. члены, имеющие порядок $O(1)$ при $|t|\to\infty$ и ограниченные при конечных t. Аналогично, первый член в формуле /40/ равен

$$\frac{gm}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\epsilon}(T^{-\epsilon}-|t|^{-\epsilon})\Theta(t^2-T^2)\int\frac{d\hat{k}}{2}\frac{1}{p\hat{k}}(\phi(\hat{k})-\phi(\hat{k}))\frac{d\vec{p}}{2E_{\vec{p}}}\rho(\vec{p})+(\dots).$$

Таким образом, сингулярная часть оператора асимптотической эволюции, которую мы будем также обозначать $U_{as}(t)$, равна

$$U_{as}(t)=\exp(A_T(t)(\rho\circ F\circ(\phi^+-\phi)+i\,\mathrm{sgn}(t)\rho\circ R\circ\rho)), \qquad /42/$$

где $A_T(t)=\frac{1}{\epsilon}(T^{-\epsilon}-|t|^{-\epsilon})\Theta(t^2-T^2)$,

$$F(\vec{p},\hat{k}) = \frac{gm}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{p\hat{k}} \qquad /43/$$

$$R(\vec{p},\vec{q}) = \frac{g^2}{8\pi}\left(\frac{(pq)^2}{m^4}-1\right)^{-1/2}. \qquad /44/$$

Пространства асимптотических состояний рассматриваемой теории можно теперь записать в виде

$$\mathcal{H}^{\pm}_{as} = U_{as}(\pm\infty)\mathcal{F}_\epsilon \otimes \mathcal{F}_m,$$

где $\mathcal{F}_m$ есть фоковское пространство фермионов, или, используя /18/ и /42/, в виде

$$\mathcal{H}^{\pm}_{as}=\exp(-\frac{1}{\epsilon}(\rho\circ F\circ(\phi^+-\phi)\mp i\rho\circ R\circ\rho))\mathcal{F}_0\otimes\mathcal{F}_m\otimes\mathcal{F}_\Lambda, \qquad /45/$$

где конечная часть оператора асимптотической эволюции включена в определение $\mathcal{F}_\Delta$. Для дальнейшего рассмотрения зависимость асимптотических состояний от операторов рождения безмассовых частиц ненулевой энергии несущественна, и мы будем ее опускать. Удобный базис в пространствах $\mathcal{H}^{\pm}_{as}$ образуют состояния

$$|\{\vec{p}\}\rangle \otimes \exp(-\frac{1}{\epsilon}(\rho_{\{\vec{p}\}}\circ F\circ(\phi^+-\phi)\mp i\rho_{\{\vec{p}\}}\circ R\circ\rho_{\{\vec{p}\}}))|\alpha\rangle, \qquad /46/$$

где фоковское состояние, содержащее фермионы с импульсами $\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n$, обозначено как $|\{\vec{p}\}\rangle$ и

$$\rho_{\{\vec{p}\}}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\sum_{k=1}^{n}\delta(\vec{p}-\vec{p}_k). \qquad /47/$$

Рассматривая матричный элемент /33/ между состояниями /46/ и используя то обстоятельство, что оператор

$$(H-H^\circ_{as}(t))[a_{as}(t), a^+_{as}(t)]$$

и, как следствие, матрица рассеяния S_{as} в силу /37/ не содержат операторов $\phi^{\#}(\hat{k})$, получим

$$S_{fi}=\langle\{\vec{p}\}_f|S_{as}|\{\vec{p}\}_i\rangle\langle\alpha_f|\exp(\frac{1}{\epsilon}(\rho_f\circ F\circ(\phi^+-\phi)-$$

$$i\rho_f\circ R\circ\rho_f))\exp(-\frac{1}{\epsilon}(\rho_i\circ F\circ(\phi^+-\phi)+i\rho_i\circ R\circ\rho_i))|\alpha_i\rangle. \qquad /48/$$

Первый сомножитель в /48/ конечен, а второй описывает сингулярную структуру S_{fi} и равен, в силу /17/,

$$\langle\alpha_f-\rho_f\circ F|\alpha_i-\rho_i\circ F\rangle\exp(-\frac{i}{\epsilon}(\rho_f\circ R\circ\rho_f+\rho_i\circ R\circ\rho_i)) =$$

$$=\exp(-\frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{2}(\alpha_f^*-\alpha_i^*-(\rho_f-\rho_i)\circ F)\circ(\alpha_f-\alpha_i-(\rho_f-\rho_i)\circ F)+$$

$$i(\rho_f\circ R\circ\rho_f+\rho_i\circ R\circ\rho_i-\mathrm{Im}(\alpha_f^*-\rho_f\circ F)\circ(\alpha_i-\rho_i\circ F)))).$$

Условие конечности модуля /48/ дает, в силу невырожденности формы /12/, "закон сохранения":

$$\alpha_f-\rho_f\circ F=\alpha_i-\rho_i\circ F. \qquad /49/$$

Таким образом, матричные элементы конечны между состояниями вида

$$|\Psi^f_{as}\rangle = |\{\vec{p}\}_f\rangle \otimes |a_f\rangle \exp(-\frac{i}{\epsilon}\rho_f \circ R \circ \rho_f)$$
$$|\Psi^i_{as}\rangle = |\{\vec{p}\}_i\rangle \otimes |a_i\rangle \exp(\frac{i}{\epsilon}\rho_i \circ R \circ \rho_i) \qquad /50/$$

при условии, что a_f и a_i связаны соотношением /49/.

Напомним, что состояния /50/ могут содержать также безмассовые частицы ненулевой энергии из $\mathcal{F}_\Lambda$, наличие которых, однако, не сказывается на сингулярной части /48/.

Определим теперь структуру инфракрасных расходимостей произвольного матричного элемента в обычной теории возмущений, т.е.

$$S^D_{fi} = \langle\Psi^f|S_D|\Psi^i\rangle, \qquad /51/$$

где $|\Psi^{f,i}\rangle \in \mathcal{F}_m \otimes \mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$.

Представив /51/ в виде

$$S^D_{fi} = \langle\Psi^f|U_{as}(+\infty)S_{as}U^+_{as}(-\infty)|\Psi^i\rangle$$

и используя инфракрасную конечность S_{as} и формулы /17/ и /42/, получим для состояний вида

$$|\Psi^{f,i}\rangle = |\{\vec{p}\}_{f,i}\rangle \otimes |\{\vec{k}\}_{f,i}\rangle,$$

где $|\{\vec{k}\}_{f,i}\rangle$ - фоковские состояния из $\mathcal{F}(\mathcal{E}_0)$,

$$S^D_{fi} = \langle\Psi^f|S_{as}|\Psi^i\rangle\langle-\rho_f \circ F|-\rho_i \circ F\rangle \exp(-\frac{i}{\epsilon}(\rho_f \circ R \circ \rho_f + \rho_i \circ R \circ \rho_i)) =$$
$$= \langle\Psi^f|S_{as}|\Psi^i\rangle \exp(-\frac{1}{2\epsilon}(\rho_f - \rho_i)\circ F \circ F \circ (\rho_f - \rho_i) -$$
$$-\frac{i}{\epsilon}(\rho_f \circ R \circ \rho_f + \rho_i \circ R \circ \rho_i)). \qquad /52/$$

Подставляя /43/, /44/ и /47/ в /52/, получим

$$S^D_{fi} = \langle\Psi^f|S_{as}|\Psi^i\rangle \exp(-\frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\sum_{k,\ell=1}^{N}\frac{\eta_k\eta_\ell\ \Psi_{k\ell} + i\pi\Theta(\eta_k\eta_\ell)}{\operatorname{sh}\Psi_{k\ell}}), \qquad /53/$$

где $N = n_f + n_i$ - суммарное число фермионов в состояниях $|\Psi^f\rangle$ и $|\Psi^i\rangle$, $\eta_k = -1$ для частиц из $|\Psi^i\rangle$ и +1 для частиц из $|\Psi^f\rangle$, а $\Psi_{k\ell} \geq 0$ определяется уравнением $\operatorname{ch}\Psi_{k\ell} = p_k p_\ell / m^2$. Поскольку первый сомножитель в /53/ инфракрасно конечен, структура инфракрасных расходимостей произвольного матричного элемента во всех порядках обычной теории возмущений определяется разложением второго сомножителя в ряд по g.

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что проведенное исследование должно рассматриваться не как строгое доказательство возможности построения инфракрасно конечной теории возмущений для рассматриваемой модели, а скорее как установление вероятной структуры инфракрасных расходимостей. На современном этапе "доказательство" справедливости формул типа /53/ может означать, видимо, лишь их проверку по теории возмущений.

Нашей основной задачей было продемонстрировать возможности предлагаемой формулировки метода асимптотической динамики для получения предсказаний относительно сингулярного поведения квантовополевых величин. В связи с этим заметим, что формулы /48/-/50/ и /53/ получены как следствие применения представления асимптотической динамики без каких-либо дополнительных предположений. Это демонстрирует, на наш взгляд, преимущества метода асимптотической динамики перед методами, развитыми для получения аналогичных формул в КЭД в работах [10,11,14,18], где использовались предположения, связанные со структурой гейзенберговских уравнений в КЭД и не имеющие прямых аналогов в других теориях.

Основное состояние в нашей теории бесконечнократно вырождено. Действительно, в силу /30/ и /46/ оно представимо в виде

$$|\Phi_a\rangle = S^+_\pm U^+_{as}(\pm\infty)|a\rangle \otimes |0\rangle_m \otimes |0\rangle_\Lambda,$$

где $|0\rangle_m$ и $|0\rangle_\Lambda$ - вакуумы массивных частиц и безмассовых частиц ненулевой энергии соответственно, т.е. параметризуется функцией $a(\vec{k})$, описывающей когерентное состояние частиц нулевой энергии. Вывод формулы /31/ для матричного элемента неявно предполагает выбор в качестве основного состояния "истинного" вакуума $|\Phi_0\rangle$. Это позволяет придать физический смысл /с точностью до бесконечной фазы пространства "истинных" асимптотических состояний подпространству

$$\mathcal{F}_{as} = U_{as}(\infty)\,\mathcal{F}(\mathcal{E}_0) \otimes \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_\epsilon \otimes \mathcal{F}_m ,$$

которое характеризуется тем, что инвариантно относительно динамики и содержит "истинный" вакуум $|\Phi_0\rangle$. Отметим, что состояния из $\mathcal{F}_{as}$ иллюстрируют известную теорему о несуществовании одночастичных заряженных состояний /19/, поскольку в силу /42/ любой фермион в $\mathcal{F}_{as}$ оказывается одетым в "когерентную шубу" безмассовых частиц нулевой энергии.

В заключение автор хотел бы выразить свою глубокую признательность Д.В.Ширкову за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Phys. Lett., 1973, 47B, p.365.*
2. *Weinberg S. Phys. Rev.Lett., 1973, 31, p.494; Phys. Rev., 1973, D8, p.4482.*
3. *Gross D.J., Wilczek F. Phys. Rev., 1973, D8, p.3633.*
4. *Gell-Mann M. Phys. Lett., 1964, 8, p.214.*
5. *Кулиш П.П., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1970, 4, с.153.*
6. *Бажанов В.В., Пронько Г.П., Строганов Ю.Г. Препринт ИФВЭ, ОТФ 76-113, Серпухов, 1976.*
7. *Кулиш П.П. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Зап. научн. сем. ЛОМИ. "Наука", М., 1978, т. 77, с.106.*
8. *Кулиш П.П., Попов В.Н. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Зап. научн. сем. ЛОМИ. "Наука", М., 1978, т.77, с.124.*
9. *Kinoshita T., Ukawa A. Phys. Rev., 1977, D15, p.1596; 1977, D16, p.331.*
10. *Zwanziger D. Phys. Rev., 1975, D11, p.3481; 1975, D11, p.3504.*
11. *Zwanziger D. Phys. Rev., 1976, D14, p.2570.*
12. *Gastmans R., Meuldermans R. Nucl. Phys., 1973, B63, p.277.*
13. *Marciano W., Sirlin A. Nucl.Phys., 1975, B88, p.86.*
14. *Marques G.C., Papanicolaou N. Phys. Rev., 1975, D12, p.1052.*
15. *Papanicolaou N. Phys. Rep., 1976, 24C, p.229.*
16. *Guichardet A., Wulfsohn A. J.Funct. Anal., 1968, 2, p.371.*
17. *Шварц А.С. Математические основы квантовой теории поля. Атомиздат, М., 1975.*
18. *Papanicolaou N., Zwanziger D. Nucl.Phys., 1975, B101, p.189.*
19. *Schroer B. Fortschr. d. Phys., 1963, 11, p.1.*

Рукопись поступила в издательский отдел 23 февраля 1979 года.