сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12256

О.В.Меунаргия, В.А.Мещеряков

НОВЫЙ ВИД ФАЗОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ФОРМФАКТОРА ПИОНА

1979

Р2 - 12256

О.В.Меунаргия, В.А.Мещеряков

НОВЫЙ ВИД ФАЗОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ФОРМФАКТОРА ПИОНА

Меунаргия О.В., Мещеряков В.А. P2 - 12256

Новый вид фазового представления для электромагнитного формфактора пиона

Анализ электромагнитного формфактора пиона обычно проводится в рамках модульного или фазового представлений. Оба представления содержат значительный произвол, который формулируется в терминах числа и положений нулей формфактора. Ниже получен новый вид фазового представления. Помимо фазы формфактора, представление явно содержит значения в N точках при $Q^2 < 0$. Оно получено решением граничной задачи линейного сопряжения. Весь произвол сводится к одной константе. Исключение константы приводит к нелинейному сингулярному интегральному уравнению относительно фазы формфактора. Результаты работы будут полезны при анализе экспериментальных данных.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Meunargia O.V., Meshcheryakov V.A. P2 - 12256

A New Phase Representation for the Pion Electromagnetic Form Factor

The pion electromagnetic from factor is usually analyzed within the modulus or phase representation. Both representations possess a considerable arbitrariness resulting from the number and position of zeroes of the form factor. Here we find a new phase representation. In addition to the form factor phase, the representation contains explicitly the values at N-points for $Q^2 < 0$. The representation is derived by solving the boundary-value problem of the linear conjugation. The whole arbitrariness is reduced to one constant. The elimination of the constant gives rise to the nonlinear singular integral equation for the form factor phase. The results can be applied to analyze the experimental data.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Электромагнитный формфактор пиона в рамках дисперсионного подхода изучается, как правило, с помощью модульного или фазового представлений [1]. Общей чертой этих представлений является то, что они содержат значительный произвол, который определяет число и положение нулей формфактора пиона в комплексной плоскости z переданного импульса t. Современные экспериментальные данные не дают возможности для их однозначного нахождения [2]. Поэтому представляет интерес поиск таких представлений для формфактора пиона, в которых неоднозначность в определении его была бы представлена в более явном виде.

Ниже мы получим представление формфактора пиона, предполагая, что известны его фаза и ряд значений при действительных значениях t вне разреза. Такая постановка учитывает существующую экспериментальную ситуацию и позволяет свести произвол в определении формфактора к одной константе.

Будем предполагать, что электромагнитный формфактор пиона $F(t)$ обладает следующими аналитическими свойствами [1]:

1. $F(z)$ - кусочно-голоморфна на комплексной плоскости z с разрезом $L=[t_0,\infty)$,
2. $F^*(z) = F(z^*)$,
3. $\mathrm{Im}\, F^+(t) = e^{-i\delta(t)} \sin\delta(t) F^+(t)$, $t \in L$,

$\delta(t)$ - действительная функция, которая удовлетворяет условию Гёлдера на L с показателем $0<\nu<1$, $\delta(t) \in H\nu(L)$,

а на концах разреза принимает значения:

$\delta(t_0) = 0$, $\delta(\infty) = const < \infty$.

4. $\left|\frac{F(z)}{z^n}\right| \to 0$ при $z \to \infty$.

В нашей постановке функция $\delta(t)$ – фаза формфактора на разрезе, а поэтому свойство 3 справедливо всюду на L. Условие унитарности позволяет выразить $\delta(t)$ через фазу пион-пионного рассеяния на конечном интервале $[t_0, t_1]$.

Свойства 2 и 3 приводят к граничной задаче линейного сопряжения:

$$F^+(t) = e^{2i\delta(t)} F^-(t), \quad t \in L. \qquad \text{(I)}$$

Эта классическая задача хорошо изучена и изложена, например, в книге Мусхелишвили Н.И./3/.

Обозначим через $\chi(z)$ каноническое решение задачи (I), ограниченное на L, включая бесконечно удаленную точку. Оно имеет вид:

$$\chi(z) = z^{\lambda} e^{\gamma(z)}, \qquad (1)$$

где

$$\gamma(z) = \frac{z}{\pi}\int_L \frac{\delta(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau - z)}, \quad \lambda = \left[\frac{\delta(\infty)}{\pi}\right].$$

Общее решение задачи (I), удовлетворяющее условию 4, представляется с помощью канонического решения $\chi(z)$ следующим образом:

$$F(z) = Q_n(z)\,\chi(z), \qquad (2)$$

где $Q_n(z)$ – полином порядка n по z.

Решение содержит $n+1$ произвольных параметров, которые могут быть определены по экспериментальным данным. Поставим задачу о нахождении такого представления функции $F(z)$, которое содержало бы эту информацию явно. Для этого предположим, что в точке $z=0$ известно значение функции и ее производных до $\mathcal{N}-1$-го порядка,

$$F(0) = F_0, \quad F'(0) = F_1, \ldots, \quad F^{(\mathcal{N}-1)}(0) = F_{\mathcal{N}-1}. \qquad (3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{N} \geq n$.

Для функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям I,2,3,4, справедливо следующее дисперсионное соотношение:

$$F(z) = P_{\mathcal{N}-1}(z) + \frac{z^{\mathcal{N}}}{\pi}\int_L \frac{\operatorname{Im} F^+(t)\,dt}{t^{\mathcal{N}}(t - z)}, \qquad (4)$$

где полином $P_{\mathcal{N}-1}(z)$ в точке $z=0$ принимает значения:

$$P_{\mathcal{N}-1}(0) = F_0, \ \ldots, \ P_{\mathcal{N}-1}^{(\mathcal{N}-1)}(0) = F_{\mathcal{N}-1}. \qquad (5)$$

Применяя формулы Сохоцкого–Племеля к соотношению (4) и имея в виду условие 3, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-2i\delta(t)}\right)F^+(t) - \frac{t^{\mathcal{N}}}{\pi i}\int_L \frac{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2i\delta(\tau)}\right)F^+(\tau)}{\tau^{\mathcal{N}}(\tau - t)}\,d\tau = P_{\mathcal{N}-1}(t). \qquad (6)$$

Перепишем его в виде:

$$A(t)\frac{F^+(t)}{t^{\mathcal{N}}} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(\tau)}{\tau - t}\,\frac{F^+(\tau)}{\tau^{\mathcal{N}}}\,d\tau = \frac{P_{\mathcal{N}-1}(t)}{t^{\mathcal{N}}}, \qquad (7)$$

где

$$A(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2i\delta(t)}\right), \quad B(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2i\delta(t)}\right). \qquad (8)$$

$$A(t),\ B(t),\ \frac{P_{\mathcal{N}-1}(t)}{t^{\mathcal{N}-1}} \in H_\nu(L).$$

Уравнение (7) является сингулярным интегральным уравнением относительно $\frac{F^+(t)}{t^{\mathcal{N}}}$, союзным к характеристическому сингулярному интегральному уравнению/3/. Его решение находится из выражения:

$$\frac{F^+(t)}{t^{\mathcal{N}}} = \frac{2\Psi^+(t)}{A(t)+B(t)} + \frac{P_{\mathcal{N}-1}(t)}{t^{\mathcal{N}}[A(t)+B(t)]} = 2\Psi^+(t) + \frac{P_{\mathcal{N}-1}(t)}{t^{\mathcal{N}}}, \qquad (9)$$

$\Psi^+(t)$ — граничное значение сверху кусочно-голоморфной функции $\Psi(z)$. Функция $\Psi(z)$ является общим решением неоднородной граничной задачи:

$$\Psi^+(t) = \frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}\,\Psi^-(t) + \frac{P_{\mathcal{N}-1}(t)}{t^{\mathcal{N}}[A(t)-B(t)]}, \quad t \in L, \qquad \text{(I0)}$$

ограниченным на всем L. Она имеет вид:

$$\Psi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int_L \frac{B(\tau)P_{\mathcal N-1}(\tau)\,d\tau}{[A(\tau)-B(\tau)]\,\chi^+(\tau)(\tau-t)\tau^{\mathcal N}}+C\chi(z). \qquad (II)$$

$C=const$, а $\chi(z)$ определяется по формуле (1).

Так как $\dfrac{B(t)}{A(t)-B(t)}=ie^{i\delta(t)}\sin\delta(t)$,

то из формулы (9) имеем:

$$F(z)=\frac{z^{\mathcal N}\chi(z)}{\pi}\int_L \frac{e^{i\delta(t)}\sin\delta(t)P_{\mathcal N-1}(t)}{t^{\mathcal N}\chi^+(t)(t-z)}dt+C\chi(z)z^{\mathcal N}+P_{\mathcal N-1}(z). \qquad (I2)$$

Таким образом, для искомой функции $F(z)$ получено представление (I2) , содержащее однозначно определенный полином $P_{\mathcal N-1}(z)$ и один произвольный параметр C . Заметим, что если известна $\lambda+\mathcal N$ -ая производная функции $F(z)$ в точке $z=0$, то C определяется по формуле

$$C=F^{(\lambda+\mathcal N)}(0)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{e^{i\delta(\tau)}\sin\delta(\tau)P_{\mathcal N-1}(\tau)}{\tau^{\mathcal N+1}\chi^+(\tau)}d\tau. \qquad (I3)$$

В случае, когда известны значения функции $F(z)$ в $\mathcal N$ разных точках,

$$F(t_1)=F_1,\ \ldots,\ F(t_{\mathcal N})=F_{\mathcal N},$$

дисперсионное соотношение для $F(z)$ принимает вид:

$$F(z)=\frac{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(z-t_k)}{\pi}\int_L \frac{\operatorname{Im}F^+(t)\,dt}{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(t-t_k)(t-z)}. \qquad (I4)$$

Полином $P_{\mathcal N-1}(z)$ однозначно определен значениями функции в точках $t_1,\ldots,t_{\mathcal N}$:

$$P_{\mathcal N-1}(t_k)=F_k,\quad k=1,2,\ldots\mathcal N. \qquad (I5)$$

В таком случае для функции $F(z)$ можно получить представление

$$F(z)=\frac{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(z-t_k)\chi(z)}{\pi}\int_L \frac{e^{i\delta(t)}\sin\delta(t)P_{\mathcal N-1}(t)\,dt}{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(t-t_k)\chi^+(t)(t-z)}+C\prod_{k=1}^{\mathcal N}(z-t_k)\chi(z)+P_{\mathcal N-1}(z), \qquad (I6)$$

где $\chi(z)$ – каноническая функция, определенная формулой (1).

Покажем, что фаза функции $F(z)$, определенной представлением (I2) или (I6), совпадает с $\delta(t)$. Тем самым будет явно продемонстрировано выполнение теоремы о взаимодействии в конечном состоянии /4/ при значениях $t\in[t_0,t_1]$.

Для этого перейдем к граничным значениям сверху в формуле (I2) и после небольших преобразований получим:

$$F^+(t)=\left[P_{\mathcal N-1}(t)\cos\delta(t)+\frac{|\chi^+(t)|}{\pi}t^{\mathcal N}\int_L \frac{P_{\mathcal N-1}(\tau)\sin\delta(\tau)}{\tau^{\mathcal N}|\chi^+(\tau)|(\tau-t)}d\tau+Ct^{\mathcal N}|\chi^+(t)|\right]e^{i\delta(t)}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\arg F^+(t)=\delta(t), \qquad (I7)$$

$$|F^+(t)|=P_{\mathcal N-1}(t)\cos\delta(t)+\frac{|\chi^+(t)|}{\pi}t^{\mathcal N}\int_L \frac{P_{\mathcal N-1}(\tau)\sin\delta(\tau)}{\tau^{\mathcal N}|\chi^+(\tau)|(\tau-t)}d\tau+C|\chi^+(t)|t^{\mathcal N}, \qquad (I8)$$

$$|\chi^+(t)|=t^{\lambda}e^{\frac{t}{\pi}\int_L \frac{\delta(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}}. \qquad (I9)$$

Подобным образом можно установить соотношение

$$F^-(t)=|F^+(t)|\,e^{-i\delta(t)}. \qquad (20)$$

Применяя эти рассуждения точно так же к функции, представленной формулой (I6), получим аналоги равенств (I8) и (20):

$$\arg F^+(t)=\delta(t),\quad \arg F^-(t)=-\delta(t), \qquad (2I)$$

$$|F^+(t)|=P_{\mathcal N-1}(t)\cos\delta(t)+\frac{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(t-t_k)}{\pi}|\chi^+(t)|\int_L \frac{P_{\mathcal N-1}(\tau)\sin\delta(\tau)d\tau}{\prod_{k=1}^{\mathcal N}(\tau-t_k)(\tau-t)|\chi^+(\tau)|}+C\prod_{k=1}^{\mathcal N}(t-t_k)|\chi^+(t)|. \qquad (22)$$

Сравним формулы (I2) или (I6) с общепринятым фазовым представлением

$$\rho(t)\,e^{\frac{t}{\pi}\int_L \frac{\delta(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}},$$

где $P(t)$ – полином по t. Коэффициенты полинома $P(t)$ определяются по экспериментальным данным лишь после выбора фазы $\delta(t)$. Полученные выше представления (I2) и (I6) явно содержат всю экспериментальную информацию. Единственный неизвестный параметр может быть определен из формулы (I3). После его исключения формулы (I8) и (22) превращаются в нелинейные сингулярные уравнения относительно фазы, если модуль считать экспериментально известной величиной.

Литература

I. Gordin M. Phys.Report, 1974, 11C, p.29-98.
2. Cronstrom C. Phys.Lett., 1974, v.49B, p.283;
Dubnicka S. and Meshcheryakov V.A. Nucl.Phys., 1974, B83,p.311.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. ГИФМЛ, Москва, 1962.
4. Pham T.N. and Tran N.Truong. Phys.Rev., 1976, 14, p.185.

Работа поступила в издательский отдел
20 февраля 1979 года.