

2187/2-79



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

11/vi-79

Б-742

P2 - 12232

И.Л.Боголюбский

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ
И СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СОЛИТОНОВ
СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $J_\mu J^\mu$

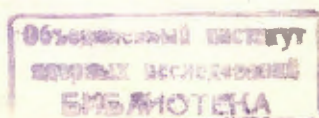
1979

P2 - 12232

И.Л.Боголюбский

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ
И СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СОЛИТОНОВ
СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $J_\mu J^\mu$

Направлено в ТМФ



Боголюбовский И.Л.

P2 - 12232

Сравнительный анализ устойчивости одномерных и сферически-симметричных солитонов скалярного поля с самодействием $J_\mu J^\mu$

Для аналитического исследования динамической устойчивости солитонов использован вариационный метод. Предложены классы пробных функций, сохраняющих заряд уединенных сгустков скалярного поля. Аналитическое рассмотрение свойств скалярных солитонов в модели с самодействием $J_\mu J^\mu$ дополнено результатами численного решения нестационарной задачи на ЭВМ. Показано, что в отличие от одномерного случая, в котором солитоны устойчивы при всех $|\omega| < 1$, сферически-симметричные солитоны неустойчивы при всех $|\omega| < 1$, в том числе в области, где $H_s < mQ_s$. Формулируется задача на собственные значения для нахождения инкрементов неустойчивости на ее линейной стадии.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Bogolubsky I.L.

P2 - 12232

Comparative Investigation of Stability of One-Dimensional and Spherically Symmetric Scalar Solitons under the Selfinteraction $J_\mu J^\mu$

The variational method has been employed to investigate the dynamical stability of solitons of the complex scalar field with the selfinteraction $J_\mu J^\mu$. The classes of probe functions are proposed which conserve the charge of solitary scalar field lumps. The analytical consideration is completed by results of numerical solution by means of computer of nonstationary nonlinear partial differential equation. The spherically symmetric solitons in this model turn out to be unstable for all $|\omega| < 1$ unlike the one-dimensional ones, which are apparently stable for all $|\omega| < 1$. It is important to note that the inequality $H_s < mQ_s$ proves not to be sufficient condition for the dynamical soliton stability even in the case of the positively definite Hamiltonian density. The eigenvalue problem has been formulated to find the instability growth rate in the linear approximation in this model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Существование солитонных частицеподобных решений широкого класса релятивистски-инвариантных нелинейных /РИН/ классических уравнений теории поля с различными видами нелинейностей позволяет надеяться, что на базе этих решений можно будет построить свободную от расходимостей квантово-полевую теорию. Требование перенормируемости теории в таком подходе становится излишним, и поэтому остается значительный произвол в выборе конкретного вида нелинейного самодействия поля. Отбирая модели, в рамках которых солитоны являются динамически устойчивыми /иначе говоря, устойчивыми по Ляпунову/ хотя бы в некоторой области параметров, можно значительно уменьшить этот произвол.

В простейшем случае комплексного скалярного поля с самодействием $\mathcal{L}_{int} = g|\phi|^4$ оказалось, что заряженные трехмерные ($n=3$) сферически-симметричные (ss) солитоны $\phi_s(r, t) = y_s(r, \omega) \exp(-i\omega t)$ неустойчивы при всех $|\omega| < 1$ /1/ в отличие от одномерных ($n=1$), устойчивых при $|\omega| > 1/\sqrt{2}$. Выяснилась общая довольно неприятная закономерность: переход от $n=1$ к $n=3$ приводит, как правило, к существенному сужению области устойчивости как скалярных, так и спинорных /2/ солитонов.

В данной работе мы изучим устойчивость солитонных решений в модели /3/, также описывающей самодействие четвертой степени по полю, довольно естественное с точки зрения физики.

В §1 кратко описана модель /3/ и некоторые свойства ее локализованных решений при $n=1$ и $n=3$. В §2 предложен и использован на примере рассматриваемых уравнений вариационный метод исследования скалярных заряженных солитонов на устойчивость. В §3 изложена методика численного решения исследуемого нелинейного уравнения при $n=1$ и $n=3$ и результаты изучения устойчивости солитонных решений на ЭВМ.

В §4 сформулирована задача на собственные значения, решение которой позволит найти инкременты неустойчивости солитонов в этой модели.

§1. САМОДЕЙСТВИЕ $J_\mu J^\mu$ И СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ СОЛИТОНОВ

Рассмотренная авторами ^{3/} плотность лагранжиана есть

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} g_1 |\phi|^4 + g_2 J_\mu J^\mu, \quad /1/$$

$$J_\mu = \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*. \quad /2/$$

Ограничимся в данной работе вариантом с $g_1 = 0$, чтобы изучить устойчивость солитонов, порожденных предложенным в ^{3/} новым типом самодействия "в чистом виде".

Уравнение для поля ϕ имеет при $n=1$ вид

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \phi - g_2 [4\phi^*(\phi_t^2 - \phi_x^2) - 4\phi(\phi_t^* \phi_t - \phi_x^* \phi_x)] + \\ + 2\phi^* \phi (\phi_{tt} - \phi_{xx}) - 2\phi^2 (\phi_{tt}^* - \phi_{xx}^*) = 0, \end{aligned} \quad /3/$$

а при $n=3$ для его написания достаточно произвести в ^{3/} замену /получающееся уравнение обозначим (3_1) /

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \Lambda_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}. \quad /3'/$$

Локализованные решения уравнений ^{3/} и ^{3_1/} существуют только при $g_2 < 0$. Масштабным преобразованием $\vec{x}' = m\vec{x}$, $t' = mt$, $\tilde{\phi} = \sqrt{-g_2} \phi$ приведем ^{3/} и ^{3_1/} к виду, где $m = 1$, $g_2 = -1$.

Солитонное решение в случае $n=1$ единственно при фиксированной ω :

$$y_s(x,t) = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\omega} \operatorname{sech}(x\sqrt{1-\omega^2}) \exp(-i\omega t), \quad |\omega| < 1, \quad /4/$$

а при $n=3$ данной величине ω соответствует счетное множество решений ^{3_1/}, которое запишем следующим образом:

$$y_{s(k)}(r,t) = \sqrt{\frac{1-\omega^2}{8\omega^2}} A_k(r\sqrt{1-\omega^2}) \exp(-i\omega t), \quad |\omega| < 1, \quad /5/$$

где $A_k(\xi) = (k-1)$ -узловое решение уравнения

$$\Delta_{\xi\xi} A - A + A^3 = 0, \quad \Delta_{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad A(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad /6/$$

Решениям уравнения ^{6/} посвящена обширная литература /см., например, ^{1,4/} /.

Заряд $Q = \int j_0 d^n x$ локализованных решений ^{4/} и ^{5/} равен

$$\begin{aligned} Q = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t^*} \phi^* \right) d^n x = -i \int (1 + 4\phi^* \phi) (\phi \phi_t^* - \phi^* \phi_t) d^n x = \\ = 2\omega \int y^2 (1 + 4y^2) d^n x \quad (m = 1, g_2 = -1), \end{aligned} \quad /7/$$

а их энергия $H = \int \mathcal{H} d^n x$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T^{00} = \phi_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \phi_t^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \mathcal{L} = |\phi_t|^2 + |\nabla \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 + \\ + g_2 [(\phi^* \phi_t - \phi \phi_t^*)^2 + \sum_{i=1}^n (\phi^* \phi_{x_i} - \phi \phi_{x_i}^*)^2]. \end{aligned} \quad /8/$$

Представляя поле ϕ в виде $\phi = a + ib$, легко убеждаемся, что для любых $\phi(x,t)$ при всех n плотность гамильтониана $\mathcal{H} \geq 0$ при $g_2 < 0$, что является весьма привлекательным свойством модели, стимулировавшим детальное изучение ее динамических свойств.

В случае $n=1$ для солитона ^{4/}

$$Q_s(\omega) = \frac{(1-\omega^2)^{1/2} (\omega^2 + 2)}{3\omega^3}, \quad /9/$$

$$H_s(\omega) = \frac{(1-\omega^2)^{1/2}}{\omega^2}, \quad /10/$$

$$\frac{H_s(\omega)}{Q_s(\omega)} = \frac{3\omega}{\omega^2 + 2} = F_1(\omega). \quad /11/$$

При $n = 3$ локализованных решений вида $\phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} A(\omega) \times \times R_\ell(r) Y_m^\ell(\theta, \phi)$ с отличным от нуля ℓ не существует /по-видимому, это свойство является общим для нелинейных скалярных моделей/. Для ss-солитонов ($\ell = 0$), имеющих $(k-1)$ узел, представим результаты ^{/3/} в удобном для дальнейшего виде:

$$Q_s^{(k)}(\omega) = J^{(k)} \pi \left(\frac{1}{\omega \sqrt{1-\omega^2}} + \frac{2\sqrt{1-\omega^2}}{\omega^3} \right), \quad /12/$$

$$H_s^{(k)}(\omega) = J^{(k)} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} + \frac{3\sqrt{1-\omega^2}}{\omega^2} \right), \quad /13/$$

где $J^{(k)} = \int_0^\infty A_k^2(\xi) \xi^2 d\xi$.

Отметим, что отношение

$$\frac{H_s^{(k)}(\omega)}{Q_s^{(k)}(\omega)} = \omega \frac{3 - 2\omega^2}{2 - \omega^2} = F_3(\omega) \quad /14/$$

не зависит от номера k , т.е. числа узлов солитонного решения.

Функции $F_1(\omega)$ и $F_3(\omega)$ изображены на рис. 1. После появления работы ^{/1/} до настоящего времени распространено мнение, что при $H_s < Q_s$ / $H_s < mQ_s$ при $m \neq 1$ имеет место

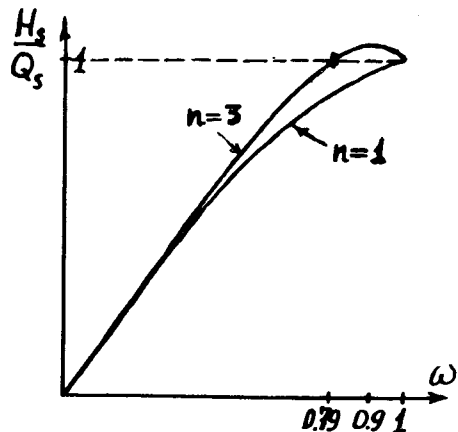


Рис. 1. Зависимость от частоты ω отношения энергии солитона к его заряду H_s/Q_s при $n=1$ и $n=3$.

устойчивость солитонов. Первый противоречащий этому утверждению пример обнаружен в работе ^{/2/} для случая спинорных солитонов, но в рассмотренной в ^{/2/} теории было возможным развитие неустойчивости по сингулярной моде в силу неограниченности плотности гамильтониана снизу при $(\bar{\psi}\psi)^2 \rightarrow \infty$. В данной модели, где $K \geq 0$, можно a priori надеяться, что для тех ω , при которых $H_s < Q_s$, солитоны будут устойчивыми. В случае $n=1$ $H_s/Q_s = 3\omega/2$ при $\omega \rightarrow 0$ и $H_s/Q_s = 1-(1-\omega)/3$ при $\omega \rightarrow 1$; при всех $|\omega| < 1$ выполнено условие $H_s/|Q_s| < 1$. При $n=3$ $H_s/Q_s = 3\omega/2$, когда $(\omega \rightarrow 0)$, далее с увеличением ω величина H_s/Q_s монотонно возрастает, оставаясь меньше единицы до $\omega_1 \approx 0,79$; при $1 > \omega > \omega_1$ имеем $H_s/Q_s > 1$; H_s/Q_s достигает максимума при $\omega_2 \approx 0,90$, т.е. при той же частоте, при которой $H^{(k)}(\omega)$ и $Q^{(k)}(\omega)$ имеют минимум.

Подробному аналитическому и численному изучению устойчивости солитонов в рассматриваемой модели посвящены §§2-4 настоящей работы. При этом достаточно рассмотреть значения $\omega > 0$, т.к. свойства устойчивости солитонов при $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$ одинаковы.

§2. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ СКАЛЯРНЫХ СОЛИТОНОВ

Для решения вопроса о динамической устойчивости рассматриваемых солитонов попытаемся установить, достигается ли на солитонных решениях условный минимум функционала энергии $H = \int K d^n x$ при фиксированной величине заряда Q .

Идея применяемого в данном разделе метода была сформулирована и реализована в работе ^{/2/} для исследования устойчивости спинорных солитонов, являющихся решением уравнения Дирака /т.е. первого порядка по времени/. Так как изучаемое в настоящей работе скалярное поле подчиняется нелинейному уравнению Клейна-Гордона /т.е. второго порядка по времени/, необходимо несколько видоизменить технику, но общая идея метода остается прежней. А именно, рассматриваем пробные функции /ПФ/, мало отклоняющиеся в подходящей метрике от солитонного решения и, кроме того, имеющие заряд такой же, как у рассматриваемого солитона /в данном случае удобной

является метрика $c\rho = \max_x |\phi(x,t) - \phi_s(x,t)| + \max_x |\partial\phi(x,t)/\partial t - \partial\phi_s(x,t)/\partial t|$.

Если, рассматривая некоторое подмножество ПФ, удовлетворяющее таким требованиям, удастся показать, что солитонное решение при данном значении параметра не обеспечивает условного минимума /при сохраняющемся заряде/ функционалу энергии H , значит, этот солитон неустойчив. В настоящей работе будем применять два класса ПФ, родственные использованным в [2].

А. Преобразования солитонной полевой функции, обобщающие масштабное

Совершим переход от солитонного решения

$$\phi_s(x, t) = y_s(x, \omega) e^{-i\omega t} \quad /15/$$

к пробной функции

$$\phi_p(x, t; a) = y_s(ax, \omega) e^{-i\omega' t}, \quad /16/$$

где $a = 1 + \delta a$, $|\delta a| \ll 1$, $\omega' = 1 + \delta\omega$, $|\delta\omega| \ll 1$, $\delta\omega = \delta\omega(\delta a)$, причем потребуем, чтобы $Q[\phi_s(x,t)] = Q[\phi_p(x,t;a)]$. Отсюда с учетом формулы /7/ получаем $\omega' = \omega a^n$, где n - размерность пространства.

Далее находим, используя полевое уравнение и формулы /8/ и /16/:

$$H[\phi_p] = \omega'^2 a^{-n} \int y_s^2(x, \omega) d^n x + \frac{1}{a} \int [8\omega^2 y_s^4(x, \omega) - (1 - \omega^2) y_s^2(x, \omega)] d^n x + \frac{1}{a^n} \int y_s^2(x, \omega) d^n x + \omega'^2 a^{-n} \int 4 y_s^4(x, \omega) d^n x = \quad /17/$$

$$H_p(\omega, a) = [\omega^2(a^n + a^{-1}) + a^{-n} - a^{-1}] I_1(\omega, n) + \omega^2(a^n + a^{-1}) I_2(\omega, n),$$

$$I_1(\omega, n) = \int y_s^2(x, \omega) d^n x, \quad I_2(\omega, n) = 4 \int y_s^4(x, \omega) d^n x. \quad /18/$$

Нетрудно найти:

$$I_1(\omega, 1) = (1 - \omega^2)^{1/2} / 2\omega^2, \quad I_2(\omega, 1) = (1 - \omega^2)^{3/2} / 3\omega^4, \quad /19/$$

$$I_1^{(k)}(\omega, 3) = \pi J^{(k)} (1 - \omega^2)^{-1/2} / 2\omega^2, \quad I_2^{(k)}(\omega, 3) = \pi J^{(k)} (1 - \omega^2)^{1/2} / \omega^4,$$

$$J^{(k)} = \int_0^\infty A_k^2(\xi) \xi^2 d\xi. \quad /20/$$

Класс ПФ /16/ можно существенно расширить, рассматривая

$$\phi_p(x, t; a, k) = a^{k/2} y_s(ax, \omega) e^{-i\omega' t}. \quad /21/$$

В этом более общем случае из условия $Q[\phi_s] = Q[\phi_p]$ находим

$$\omega' = f(\omega, a, k) = \omega a^{n-k} \cdot \frac{\omega^2 + 2(1 - \omega^2)}{\omega^2 + 2(1 - \omega^2)a^k} \quad /22/$$

и с учетом /22/ получаем:

$$H_p = [(\omega'^2 + 1)a^{k-n} - a^{2+k-n} (1 - \omega^2)] I_1(\omega, n) + [\omega'^2 a^{2k-n} + 2\omega^2 a^{2+k-n}] I_2(\omega, n). \quad /23/$$

Легко найти далее, как изменяется величина H_p при малых вариациях δa , т.е. построить функцию $\Delta H_\omega(a) = H_p(\omega, a) - H_s(\omega)$. Определяя $\Delta H_\omega(a)$ при различных k , найдем значения ω , при которых функция $\Delta H_\omega(a)$ хотя бы при одном k не имеет в точке $a=1$ локального минимума, а, следовательно, солитоны неустойчивы.

На рис. 2 точками на плоскости (ω, k) обозначены значения ω , k , при которых, как показали расчеты, для ss-солитонов ($n=3$) функция $\Delta H_\omega(a)$ имеет максимум в точке $a=1$. В результате этим способом удается показать неустойчивость ss-солитонов при $\omega_2 \approx 0,90 < \omega < 1$.

В одномерном ($n=1$) случае класс ПФ /21/ не позволяет обнаружить ни одной точки неустойчивости солитонов.

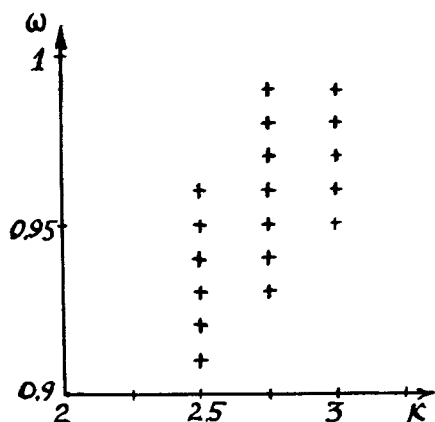


Рис. 2. Анализ методом, описанным в пункте А, при значениях (ω, k) , отмеченных крестиками, показывает неустойчивость ss-солитонов.

Б. Варьирование по параметру солитона - частоте ω

В работе [2] применяемый в этом пункте класс ПФ позволил расширить получаемую аналитически /методом, близким к изложенному в пункте А/ область неустойчивости по частоте ω солитонов при $n=1$. Будем рассматривать близкие к солитону $\phi_s(\vec{x}, t, \omega) = y_s(\vec{x}, \omega) \exp(-i\omega t)$

$$\phi_p(\vec{x}, t; \omega') = y_s(\vec{x}, \omega') \exp(-i\omega' t), \quad \omega'' = \omega' \cdot \frac{Q_s(\omega)}{Q_s(\omega')} \quad /24/$$

при $\omega' = \omega + \delta\omega$, $|\delta\omega| \ll |\omega|$. Легко видеть, что $Q[\phi_p] = Q[\phi_s]$.

Вычислим $H[\phi_p(\vec{x}, t, \omega')]$:

$$H_p = (\omega''^2 + \omega'^2)I_1(\omega', n) + (\omega''^2 + \omega'^2)I_2(\omega', n) \quad /25/$$

/выражения для $I_1(\omega, n)$ и $I_2(\omega, n)$ см. в п.А/. Сравнивая результат с величиной $H_s = H[\phi_s(\vec{x}, t, \omega)]$, построим функцию

$\Delta H_\omega(\Delta\omega) = H_p - H_s$ при $\Delta\omega \ll \omega$. Определим те значения ω , при которых эта функция не достигает локального минимума при $\Delta\omega = 0$, - это будут частоты, соответствующие неустойчивым солитонам.

Описанным способом удается найти узкую область неустойчивости ss-солитонов вблизи $\omega = 0,91$ шириной порядка 0,01. Таким образом, для исследования устойчивости рассматриваемых солитонов при $n=3$ способ Б оказался менее эффективным, нежели способ А.

При $n=1$ "варьированием по частоте" не удалось найти ни одной точки неустойчивости.

Итак, исследование вариационным методом оставляет открытым вопрос об устойчивости солитонов данной модели в широкой области параметра ω .

§3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОНОВ НА ЭВМ

А. Методика численного эксперимента

Для численного решения уравнения (3_r) введем функцию $u = \phi r$, представим u и ϕ в виде $u = A + iB$, $\phi = a + ib$, так что $A = ar$, $B = br$. В итоге /3_r/ перепишется в виде системы

$$\begin{aligned} A_{tt}(1 + 4b^2) - B_{tt} \cdot 4ab &= A_{rr}(1 + 4b^2) - B_{rr} \cdot 4ab - A + 8A(b_t^2 - b_r^2) - \\ &- 8B(a_t b_t - a_r b_r), \\ -A_{tt} \cdot 4ab + B_{tt}(1 + 4a^2) &= B_{rr}(1 + 4a^2) - A_{rr} 4ab - B + 8B(a_t^2 - a_r^2) - \\ &- 8A(a_t b_t - a_r b_r). \end{aligned} \quad /26/$$

Формально решая эту систему относительно A_{tt} и B_{tt} , получим их выражение через A_{rr} , B_{rr} , A , B , a_r , b_r , a_t , b_t , a , b . На дискретной разностной сетке уравнения /26/ аппроксимируем симметричной разностной схемой второго порядка по r и t с пересчетом. На первом подшаге производные a_t и b_t берутся "назад", т.е. с точностью $O(\tau)$, а на втором a_t и b_t уже вычисляются с использованием результатов первого подшага симметричным образом с требуемой точностью $O(\tau^2)$.

Условия устойчивости для линейного уравнения, получающегося из /26/ в пределе $\phi \rightarrow 0$, есть $\tau < h / \tau$ - шаг разностной

сетки по времени, h - по координате/; нелинейные члены, вообще говоря, могут ухудшить условие неустойчивости. Для данного уравнения аналитически изучить устойчивость разностной схемы в нелинейном случае затруднительно, и практически шаг τ подбирается в процессе численных экспериментов в конкретных расчетных вариантах.

Контроль за точностью расчетов проводился: 1/ путем сравнения расчетов одного и того же варианта при различных шагах τ и h /было достигнуто совпадение результатов с точностью $\sim 10^{-4}$ и выше при уменьшении τ и h вдвое/ и 2/ по сохранению интегралов движения /они сохранялись с еще большей точностью, нежели полевая функция/.

Кроме того, в силу важности роли численного исследования устойчивости в этой модели проводились дополнительно расчеты уравнения /3_r/ по другой методике, существенно отличающейся от вышеописанной. При этом уравнение /3_r/ решалось численно в первоначальном, непробранном виде при $\tau_0 < \tau < \tau_{\max}$; в области $0 < \tau < \tau_0$ оператор Δ_{τ} заменялся на $3\partial^2/\partial\tau^2$ в расчетах было выбрано $\tau_0 = 0,3$ /; "сшивка" решений в этих двух областях проводилась естественным образом на каждом шаге по времени. Интегралы движения сохранялись с точностью, несколько меньшей, чем в первом методе, но все же достаточно высокой / $\sim 10^{-4}$ /. Результаты эволюции ss-солитонов во времени на начальном этапе, полученные двумя методами, качественно и количественно совпадают, приводя к одинаковым выводам относительно устойчивости солитонов, сделанным на основании расчетов по двум различным методикам.

В численных расчетах при $n=1$ не приходится преодолевать вычислительные трудности, связанные с существованием члена $\frac{n-1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}$. В остальном численные эксперименты проводились по вышеописанной схеме.

В. Результаты численных расчетов

При $n=3$ исследовалась устойчивость только первого, безузлового солитонного решения /5/, которое задавалось как начальные данные при решении нестационарного уравнения /3_r/. Численные эксперименты подтверждают полученный аналити-

чески в §2 факт неустойчивости солитонов при $\omega > \omega_2 \approx 0,90$ и показывают, что неустойчивость при $\omega > \omega_2$ приводит к быстрому расплыванию солитона /диссипативная мода неустойчивости/. Похожая картина развития неустойчивости сохраняется как при $\omega_1 = 0,79 < \omega < \omega_2 = 0,90$, так и при уменьшении ω от $\omega_1 = 0,79$ до значений порядка $\omega \approx 0,5$.

Удобно описывать развитие неустойчивости, используя величину $z(t) = \phi(\tau, t)|_{\tau=0}$. Качественно поведение функции $z(t)$ представлено на рис. 3 при различных ω . Отметим, что при всех ω начальный этап эволюции солитона - довольно быстрое

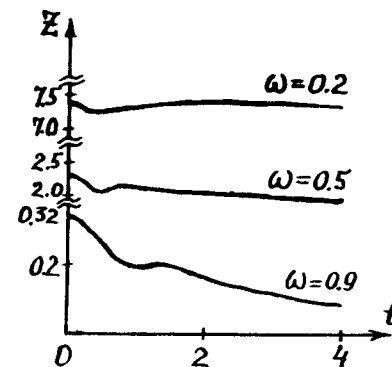


Рис. 3. Вид кривых $z(t)$ на начальной стадии эволюции солитона при различных ω .

/за время $\Delta t \sim 0,5$ / уменьшение $z(t)$ вплоть до локального минимума z_{\min} , затем следует участок роста. Достижимый далее при $\omega > \omega_3 \approx 0,3$ локальный максимум $z_{\max} < z(0)$; в дальнейшем происходит уменьшение $z(t)$. Несколько иная картина наблюдается при $\omega < \omega_3 \approx 0,3$ /см. рис. 3/. Зависимость $\Delta z_{\text{отн.}} = (z(0) - z_{\min})/z(0)$ от частоты ω представлена на рис. 4. На основании приведенных данных можно сделать вывод, что безузловые ss-солитоны в модели /3/ являются неустойчивыми при всех частотах $\omega < 1$.

Следует отметить, однако, что при меньших по модулю частотах, $\omega < \omega_b$ /довольно условно можно принять $\omega_b = 0,4$ /, разрушение солитона происходит довольно медленно и излучаемая на бесконечность за время $\Delta t \sim 10$ энергия весьма мала.

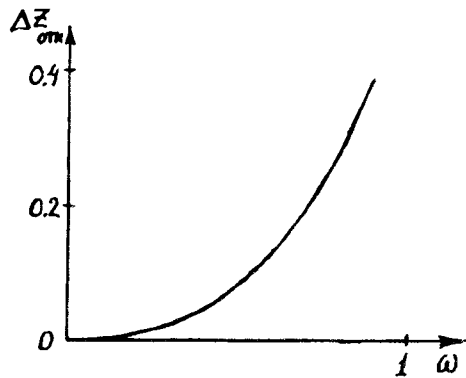


Рис. 4. Зависимость $\Delta z_{отн.}(\omega)$ при $n=3$ /результаты численных расчетов/.

Возможно, что солитоны при $\omega < \omega_3$ лежат вблизи локальных минимумов функционала энергии H при постоянном заряде Q .

Расчеты при $n=1$ показали, что одномерные солитоны /4/ являются динамически устойчивыми.

§4. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАССМАТРИВАЕМЫХ СОЛИТОНОВ

Представляется важным провести детальное исследование начальной стадии неустойчивости, т.е. нахождение ее инкрементов и вида функций, соответствующих возмущениям, растущим на линейной стадии ее развития.

Возмущенное солитонное решение в линейном приближении при произвольном n запишем в виде

$$\vec{\phi}(\vec{x}, t) = y_s(\vec{x}) e^{-i\omega t} + \eta(\vec{x}) e^{-i\omega t - i\Omega t} + \chi^*(\vec{x}) e^{-i\omega t + i\Omega^* t} \quad /27/$$

Вводя $u = \eta - \chi$, $v = \eta + \chi$, получаем нелинейную относительно комплексного $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$ задачу на собственные значения:

$$\left[\Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & A_v \\ A_u & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad /28/$$

где

$$A_v = \frac{\omega(1 + 8y_s^2)}{1 + 4y_s^2}, \quad A_u = \omega(1 + 8y_s^2),$$

$$D_u = \nabla^2 + \frac{8y_s \nabla y_s \nabla + 8\omega^2 y_s^2 - 8(\nabla y_s)^2 - 4(\nabla^2 y_s) y_s - (1 - \omega^2)}{1 + 4y_s^2} \quad /29/$$

$$D_v = \nabla^2 + 24\omega^2 y_s^2 - (1 - \omega^2).$$

Решение задачи /28/, /29/ позволит найти инкремент развития неустойчивости Ω_i как функцию параметра ω .

§5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, проведенный анализ модели, предложенной в работе /3/, показывает, что одномерные солитоны устойчивы при всех $|\omega| < 1$, а трехмерные ss-солитоны - неустойчивы.

Полученный при $n=1$ результат представляет еще один пример отмеченного в /2/ совпадения областей устойчивости скалярных и спинорных солитонов в моделях с одинаковым видом самодействия /в данном случае самодействие типа "ток \times ток" скалярного и спинорного полей/. Действительно, и в рассмотренной модели, и в массивной модели Тирринга одномерные солитоны устойчивы при всех $|\omega| < 1$.

Полученная при $n=3$ неустойчивость безузловых ss-солитонных решений позволяет сделать важный вывод: даже в случае положительно определенной плотности гамильтониана, когда развитие сингулярной моды неустойчивости солитонов вряд ли возможно /в численных экспериментах не наблюдается/, условие $H_s < Q_s$ не является достаточным условием устойчивости заряженных солитонов. Дело в том, что при получении критерия $H_s < Q_s$ сравниваются энергия солитона с энергией волнового пакета плоских волн того же заряда, что и солитоны, в пределе, когда модули их частот стремятся к 1 /в размерных переменных $|\omega| \rightarrow m$ /. Выполнение неравенства $H_s < Q_s$ еще не означает, что излучение волн меньшей частоты в процессе эволюции заданного при $t=0$ солитона является энергетически невыгодным.

По-видимому, в рамках моделей, содержащих различного типа самодействии четвертой степени по полю $\int \mathcal{L}_{int}$, неустойчивость как скалярных, так и спинорных \mathcal{R} солитонов, образованных одним полем, является общей закономерностью; поэтому, по мнению автора, оправданным является рассмотрение более широкого класса лагранжианов самодействия.

Автор благодарит профессоров Е.П.Жидкова и В.Г.Маханькова за интерес, проявленный к работе, Б.С.Гетманова и Н.В.Махалдвани за полезные обсуждения и В.Е.Гришина за участие в численных расчетах для одномерного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M. *Phys. Rev.*, 1951, 83, p.326.
2. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, P2-11923, Дубна, 1978.
3. Ranada A.F., Ranada M.F. *Journ. Math. Phys.*, 1977, 18, p.2427.
4. Гласко В.Б. и др. ЖЭТФ, 1958, 35, с.452; Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, P-1319, Дубна, 1963; ЖВМ и МФ, 1964, №4, с.804; Nehari Z. *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1963, A62, p.117.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1979 года.