сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12226

В.Е.Гришин, Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани,
В.Г.Маханьков

УСТОЙЧИВЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВИДА φ^4_2 + "ТОК НА ТОК". I.

1979

P2 - 12226

В.Е.Гришин, Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани,
В.Г.Маханьков

УСТОЙЧИВЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВИДА φ^4_2 + "ТОК НА ТОК". I.

Гришин В.Е. и др. P2 - 12226

Устойчивые солитонные решения уравнения комплексного скалярного поля с нелинейностью вида ϕ_2^4 + "ток на ток". I.

Получены односолитонные решения релятивистской модели комплексного поля с самодействием

$$g_1\phi_2^4 + g_2 J_\mu J^\mu ,$$

где

$$J_\mu = \frac{i}{2}(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*), \ \mu = 0,1.$$

Исследован вопрос поперечной и продольной устойчивости полученных решений в линейном приближении теории возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Grishin V.E. et al. P2 - 12226

Stable Soliton Solutions of the Equation of a Complex Scalar Field with Nonlinearity of ϕ_2^4 + "Current x Current" Type. I.

Single-soliton solutions of the relativistic model of a complex field with self-action

$$g_1\phi_2^4 + g_2 J_\mu J^\mu ,$$

where

$$J_\mu = \frac{i}{2}(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*), \ \mu = 0,1$$

have been obtained. The problem of transverse and longitudinal stability of the solutions in the linear approximation of perturbation theory is investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В последнее время наблюдается повышенный интерес к частицеподобным /ЧП/ решениям нелинейных уравнений, возникающих в физике плазмы, твердого тела, нелинейной оптике [1,2]. С ЧП-решениями связана также надежда построить последовательную теорию сильновзаимодействующих элементарных частиц [3].

В двумерном пространстве-времени существует немало моделей, обладающих ЧП-решениями. Более того, некоторые из них являются вполне интегрируемыми [1-4] и обладают многосолитонными точными решениями.

В отличие от двумерного случая в многомерном пространстве-времени если и удается найти ЧП-решения, они, как правило, являются неустойчивыми [5]. Устойчивыми ЧП-решениями могут обладать модели с внутренними симметриями /заряженные поля [6], поля с изотопической структурой [7] /, устойчивость которых обеспечивается существованием интеграла движения /заряд/ или нетривиальной топологической структурой /сохранение топологического числа, наличие вырожденного вакуума/.

В данной работе будет обсуждаться другая возможность, когда нелинейность зависит от производных полей. На квантовом уровне с этими моделями связаны стандартные трудности /неренормируемость/, поэтому здесь мы ограничимся классическим рассмотрением в двумерном пространстве-времени.

Рассмотрим модель с плотностью лагранжиана

$$\mathfrak{L} = |\phi_\mu|^2 - m^2|\phi|^2 + g_1|\phi|^4 + g_2 J_\mu J^\mu , \qquad /1/$$

где

$$J_\mu = \frac{i}{2}(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*), \ \mu = 0,1.$$

В случае $g_2 = 0$ лагранжиан /1/ сводится либо к нелинейной модели Хиггса ($m^2 < 0$, $g_1 < 0$), либо к случаю нелинейного уравнения Клейна-Гордона ($m^2 > 0$, $g_1 > 0$), солитонные решения которого неустойчивы [2].

Будем искать ЧП-решения модели /1/ в классе функций вида

$$\bar{\phi}(x, t) = \phi(x) e^{i\omega t} \quad ,$$

для которых лагранжиан /1/ принимает простой вид

$$\mathfrak{L} = -(\phi')^2 - (m^2 - \omega^2)\phi^2 + (g_1 + \omega^2 g_2)\phi^4 .$$

Соответствующее уравнение движения

$$\phi'' - (m^2 - \omega^2)\phi + 2(g_1 + \omega^2 g_2)\phi^3 = 0$$

обладает решением с граничными условиями $\phi = 0$

при $x \to \pm\infty$:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{m^2 - \omega^2}{g_1 + \omega^2 g_2}} \; \frac{1}{\mathrm{ch}(\sqrt{m^2 - \omega^2}\, x)} . \qquad /2/$$

С учетом лоренц-инвариантности модели /1/ найденное решение /2/ можно записать в общем виде

$$\phi = \sqrt{\frac{m^2 - \omega^2}{g_1 + \omega^2 g_2}} \; \frac{e^{i\omega\gamma(t - vx)}}{\mathrm{ch}\{\sqrt{m^2 - \omega^2}\, \gamma(x - vt)\}} , \qquad /3/$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$, а v - скорость солитона в единицах скорости света.

В данной работе изучается поперечная и продольная устойчивости солитонного решения /3/ в линейном приближении теории возмущений. Метод исследования подробно описан в обзоре [2] одного из соавторов и применялся ранее в работах [8].

В работе [9] проведен подробный анализ устойчивости солитонов /3/ в численных экспериментах на ЭВМ. Полученные в этом численном исследовании результаты согласуются с выводами настоящей работы.

Рассмотрим пробную функцию

$$\phi = A \frac{e^{i\Phi}}{\mathrm{ch}\, Bx} , \qquad /4/$$

которая, по предположению, удовлетворяет уравнению движения, соответствующему лагранжиану

$$\mathfrak{L} = |\phi_t|^2 - |\phi_x|^2 - |\phi_y|^2 - m^2|\phi|^2 + g_1|\phi|^4 + g_2 J_\mu J^\mu , \qquad /5/$$

$$\mu = 0, 1, 2.$$

Эффективный лагранжиан, который описывает поведение солитонных решений /4/ в y-направлении, получается интегрированием /5/ по x-координате:

$$\tilde{\mathfrak{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathfrak{L} \propto \frac{A_t^2}{B} + \frac{11}{18}\frac{A^2 B_t^2}{B^3} + \frac{A^2 \Phi_t^2}{B} - \frac{1}{3} A^2 B -$$

$$- \frac{A_y^2}{B} - \frac{11}{18}\frac{A^2 B_y^2}{B^3} - \frac{A^2 \Phi_y^2}{B} - \frac{m^2 A^2}{B} +$$

$$+ \frac{2}{3} g_1 \frac{A^4}{B} - \frac{2}{3} g_2 \frac{\Phi_t^2 A^4}{B} - \frac{2}{3} g_2 \frac{\Phi_y^2 A^4}{B} -$$

$$- \frac{A A_t B_t}{B^2} + \frac{A A_y B_y}{B^2} . \qquad /6/$$

Из эффективного лагранжиана /6/ следуют уравнения движения:

$$\Phi_t^2 - \frac{1}{3} B^2 - m^2 + \frac{4}{3} g_1 A^2 + \frac{4}{3} g_2 \Phi_t^2 A^2 -$$

$$- \frac{A_{tt}}{A} + \frac{A_{yy}}{A} + \frac{1}{2}\frac{B_{tt}}{B} - \frac{1}{2}\frac{B_{yy}}{B} = 0, \qquad /7.1/$$

$$-\Phi_t^2 - \frac{1}{3}B^2 + m^2 - \frac{2}{3}g_1 A^2 - \frac{2}{3}g_2\Phi_t^2 A^2 -$$

$$-\frac{11}{9}\frac{B_{tt}}{B} + \frac{A_{tt}}{A} + \frac{11}{9}\frac{B_{yy}}{B} - \frac{A_{yy}}{A} = 0, \qquad /7.2/$$

$$2\frac{A_t\Phi_t}{A} - \frac{B_t\Phi_t}{B} + \Phi_{tt} - \Phi_{yy} + \frac{2}{3}g_2\Phi_{tt}A^2 +$$

$$+\frac{8}{3}g_2\Phi_t A_t A - \frac{2}{3}g_2\frac{\Phi_t B_t A^2}{B} - \frac{2}{3}g_2\Phi_{yy}A^2 = 0. \qquad /7.3/$$

Заметим, что при получении формул /7/ сразу же были отброшены члены, не дающие вклада в линейном приближении.

Подставим в уравнения /7/ следующие выражения для A, B и Φ:

$$A = \sqrt{\frac{m^2-\omega^2}{g_1+\omega^2 g_2}} + \delta A\exp(-i\Omega t + iky), \qquad /8/$$

$$B = \sqrt{m^2-\omega^2} + \delta B\exp(-i\Omega t + iky), \qquad /9/$$

$$\Phi = \omega t + \delta\Phi\exp(-i\Omega t + iky) \qquad /10/$$

и ограничимся линейным приближением по возмущениям δA, δB и $\delta\Phi$. Тогда имеем

$$\frac{\delta A}{A}\left(\frac{8}{3}g_1A^2 + \frac{8}{3}g_2\omega^2A^2 + \Omega^2 - k^2\right) + \frac{\delta B}{B}\left[-\frac{2}{3}B^2 - \frac{1}{2}(\Omega^2 - k^2)\right] +$$

$$+\delta\Phi\left[2i\omega\Omega\left(1+\frac{4}{3}g_2A^2\right)\right] = 0, \qquad /10.1/$$

$$\frac{\delta A}{A}\left(-\frac{4}{3}g_1A^2 - \frac{4}{3}g_2\omega^2A^2 - \Omega^2 + k^2\right) + \frac{\delta B}{B}\left(-\frac{2}{3}B^2 + \frac{11}{9}(\Omega^2 - k^2)\right) +$$

$$+\delta\Phi\left[-2i\omega\Omega\left(1+\frac{2}{3}g_2A^2\right)\right] = 0, \qquad /10.2/$$

$$\frac{\delta A}{A}\left[2i\omega\Omega\left(1+\frac{4}{3}g_2A^2\right)\right] + \frac{\delta B}{B}\left[-i\omega\Omega\left(1+\frac{2}{3}g_2A^2\right)\right] + \delta\Phi\left[\left(1+\frac{2}{3}g_2A^2\right)(k^2-\Omega^2)\right] = 0.$$

$$/10.3/$$

Вычислив $\delta\Phi$ из уравнения /10.2/ и подставив в /10.1/ и /10.3/, из условия существования ненулевых решений получаем дисперсионное уравнение

$$a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0, \qquad /11/$$

где $z = \Omega^2 - k^2$. Явный вид коэффициентов a_0, a_1, a_2 и a_3 приведен в приложении 1. Отметим, что член a_0 пропорционален k^2.

Рассмотрим предельные случаи.

1. Случай "слабой связи": $g_1A^2, \omega^2 g_2 A^2 \ll 1$.

В приближении длинноволнового возмущения $(k^2 \ll m^2)$ уравнение /11/ принимает вид

$$z^3 - 4m^2z^2 - 4k^2m^2z = 0,$$

откуда сразу следует $z_1 = 0$ или $\Omega_1 = \pm k$, а для остальных корней имеем

$$\Omega_2 = 2m + \frac{k^3}{2m},$$

$$\Omega_3 = 0.$$

Последняя ветвь требует дополнительного исследования*, предыдущие указывают на устойчивость.

При $k^2 \gg m^2$ имеем

$$\Omega^2 = k^2 \pm 2mk + 2m^2 \pm \frac{m^3}{k},$$

и в этом случае опять имеется устойчивость солитонного решения.

2. Случай "сильной связи": g_1A^2, $\omega^2 g_2 A^2 \gg 1$.

В этом пределе уравнение /11/ принимает вид

---

*Ясно, что из-за трансляционной инвариантности существует нулевая мода колебаний, которая, однако, не может приводить к неустойчивости ЧП-решения /2/.

$$\frac{19}{6a}z^3-\left(\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q\right)z^2+\left[(12B^2\omega^2-4\omega^4)-2(\omega^2+B^2)q-\frac{122}{9}\omega^2k^2\right]z+$$

$$+k^2\left[16B^2\omega^2-4\omega^4-2\omega^2q\right)=0, \qquad /12/$$

где $q = g_1 g_2$, $B^2 = m^2-\omega^2$, $a = \frac{2}{3}g_2A^2$. Так как $a \gg 1$, член старшей нелинейности можно рассматривать как возмущение. В случае $k^2 \ll m^2$ возмущением можно считать и свободный член. Невозмущенное уравнение

$$\left(\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q\right)z^2-(12B^2\omega^2-4\omega^4-2m^2\omega^2 q)z=0$$

имеет корни

$$z_1=0,$$

$$z_2=\frac{12B^2\omega^2-4\omega^4-2m^2q}{\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q},$$

для соответствующих корней уравнения /12/ в линейном приближении имеем /см. приложение 2/

$$z=\bar z+\frac{\frac{19}{6a}\bar z^3-\frac{122}{9}\omega^2k^2\bar z+2\omega^2k^2(8B^2-2\omega^2-q)}{2\left(\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q\right)\bar z-(12B^2\omega^2-4\omega^4-2m^2q)}.$$

В случае малых k^2 устойчивость зависит от знака корня $\bar z \neq 0$ и для корня $\bar z=0$ от знака коэффициента перед k^2.

Из условия $z_2>0$ следует

$$\frac{3}{8}m^2-\frac{m}{2\sqrt{2}}\sqrt{q+\frac{9}{8}m^2}<\omega^2<\frac{3}{8}m^2+\frac{m}{2\sqrt{2}}\sqrt{q+\frac{9}{8}m^2},$$

откуда для $q \ll m^2$ $(g_2m^2 \gg g_1)$ имеем устойчивость при $0<\omega^2<\frac{3}{4}m^2$, и для $q \gg m^2$ $(g_2m^2 \ll g_1)$ при всех допустимых ω^2 $(0<\omega^2<m^2)$ имеется устойчивость. В случае $\bar z=0$

$$z=\frac{\omega^2(8m^2-q-10\omega^2)}{8\omega^4-6m^2\omega^2+m^2q}k^2.$$

Когда $q \ll 1$, устойчивости соответствует $\frac{3m^2}{8}<\omega^2<\frac{4m^2}{5}$.

При $q \gg 1$ решения по данной ветви колебаний устойчивы при всех допустимых ω.

Оставшийся корень будет сингулярным по малому параметру, поэтому для его нахождения надо пренебречь двумя младшими членами в формуле /12/. Тогда имеем

$$z=\frac{\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q}{\frac{57}{18}}a=\frac{174\omega^2+35q}{57}a$$

или

$$\Omega^2=k^2+\frac{174\omega^2+35q}{57}a,$$

и устойчивость данной ветви колебаний очевидна.

При $k^2 \gg m^2$ и $a \gg 1$ свободный член в /12/ уже нельзя считать возмущением. В этом случае невозмущенное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q\right)z^2+\left(12B^2\omega^2-4\omega^4-2m^2q-\frac{122}{9}\omega^2k^2\right)z+$$

$$+2k^2(8B^2\omega^2-2\omega^4-\omega^2q)=0.$$

Для соответствующих корней возмущенного уравнения /12/ имеем

$$z=\bar z-\frac{\frac{19}{6a}\bar z^3}{2\left(\frac{29}{3}\omega^2+\frac{35}{18}q\right)\bar z+12B^2\omega^2-4\omega^4-2m^2q}. \qquad /13/$$

Легко видеть, что корни квадратного уравнения, когда свободный член является большим, задаются формулой

$$z = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} ,$$

что означает

$$\tilde{z} = \pm \sqrt{\frac{16B^2\omega^2 - 4\omega^2 - 2\omega^2 q}{\frac{29}{3}\omega^2 + \frac{35}{18} q}}\, k .$$

Это соответствует устойчивости при больших k. Из формулы /13/ при достаточно большом a имеем

$$\Omega^2 = [1 - \frac{57}{36a} \frac{(8B^2\omega^2 - 4\omega^2 + 2\omega^2 q)^{3/2}}{(\frac{29}{3}\omega^2 - \frac{35}{18} q)^{5/2}}] k^2 + O(k) .$$

Следовательно,при достаточно большом a имеется устойчивость.

В заключение отметим, что в данной работе на основе линейной теории возмущений установлена устойчивость решений /3/ модели /1/ по отношению к малым колебаниям как в продольном, так и в особенности поперечном направлениях в достаточно широкой области по g_1, g_2 и ω. Более подробное изучение устойчивости решений /3/ в продольном направлении с привлечением метода численного эксперимента на ЭВМ проведено в работе /9/, где также сформулированы общие необходимые условия устойчивости ЧП-решений. Поведение решений /3/ в реакциях столкновения изучено методом численного эксперимента.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Определение коэффициентов уравнения /11/

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

$$a_3 = f - \frac{11}{9} d_2 ,$$

$$a_2 = e + fd + \frac{11}{9} c_2 - d_1 d_2 ,$$

$$a_1 = de + cf - c_2 d_1 - c_1 d_2 ,$$

$$a_0 = ce - c_1 c_2 ,$$

$$c = -4\omega^2 k^2 (1 + 2a),$$

$$d = -2\omega^2 (2 + 3a) - 2b,$$

$$e = -\frac{2}{3} B^2 \frac{2 + 3a}{1 + a} ,$$

$$f = -\frac{1}{2} + \frac{11}{9} \frac{1 + 2a}{1 + a} ,$$

$$c_1 = 2\omega^2 k^2 (1 + a),$$

$$d_1 = 2\omega^2 (1 + a) + \frac{2}{3} B^2 ,$$

$$c_2 = \frac{2b - 2a}{1 + b} ,$$

$$d_2 = -\frac{a}{1 + a} ,$$

$$a = \frac{2}{3} g_1 A^2 \omega^2 ,$$

$$b = \frac{2}{3} g_2 A^2 .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пусть задано уравнение

$$f_1(z) + \delta f_2(z) = 0, \qquad /2.1/$$

где f_1 и δf_2 - произвольные аналитические функции, причем δf_2 является возмущением:

$$||\delta f_2|| \ll ||f_1||.$$

Тогда, если известно некоторое количество корней $\bar{z}$ функции f_1, соответствующие корни уравнения /2.1/ в линейном приближении по возмущению имеют вид

$$z = \bar{z} - \frac{\delta f_2(\bar{z})}{f_1'(\bar{z})}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W. Proc. IEEE, 1973, 61, p. 1443.*
2. *Makhankov V.G. Phys.Reports, 1978, 35, p. 1.*
3. *Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Reports, 1978, 42, p. 1.*
4. *Захаров В.Е., В кн: Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. "Наука", М., 1975, с. 226.*
5. *Hobart R.H. Proc. Phys.Soc., 1963, 82, p. 201;*
   Derrick G.H. J.Math.Phys., 1964, 5, p. 1252;
   Makhankov V.G. Phys.Lett., 1977, 61A, p. 431.
6. *Friedberg, Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p. 2739.*
7. *,t Hooft G. Nucl.Phys., 1974, B79, p. 276;*
   Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, с. 430.
8. *Katyshev Yu.V., Makhaldiani N.V., Makhankov V.G. Phys. Lett., 1978, 66A, p. 456.*
   Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-11249, Дубна, 1978.
9. *Гришин В.Е. и др. ОИЯИ, Р2-12252, Дубна, 1979.*

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1979 года.