объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12225

В.Н.Первушин

ПРАВИЛА КВАНТОВАНИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОБЛЕМА КОНФАЙНМЕНТА

1979

P2 - 12225

В.Н.Первушин

ПРАВИЛА КВАНТОВАНИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОБЛЕМА КОНФАЙНМЕНТА

Направлено в "Nuclear Physics"

Первушин В.Н. P2 - 12225

Правила квантования неабелевых калибровочных полей
и проблема конфайнмента

Показано, что существует возможность самосогласованного описания конфайнмента в квантовой хромодинамике. Эта возможность связана с введением новой динамической переменной, описывающей топологические вакуумные колебания калибровочного поля. Точное квантование топологической степени свободы приводит к квантованию заряда и к сингулярным фоновым полям с нулевым эффективным действием, способным "удерживать" квантовые возбуждения цветных полей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Pervushin V.N. P2 - 12225

Quantum Topology of Gauge Fields

A quantization scheme is proposed for non-Abelian gauge fileds which separates the transverse degrees of freedom and winding number describing the topological properties of Yang-Mills fields. Quantization of the winding number leads to quantization of charge and physically nontrivial background fields with zero effective action. In this scheme colour excitation confinement is a consequence of dynamical realization of topologically nontrivial gauge group.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее реальным кандидатом на теорию адронов является калибровочная теория цветных полей, кварков и глюонов. Основная трудность такой теории - проблема ненаблюдаемости цветных полей в свободном состоянии. В этой работе* мы хотим обратить внимание на возможность решения проблемы ненаблюдаемости с помощью изменения правил квантования неабелевых калибровочных полей.

Вопрос о квантовании неабелевых полей окончательно не решен. В частности, общепринятое квантование полей Янга-Миллса с помощью дополнительных калибровочных условий [2] приводит к неоднозначному выделению поперечных степеней свободы [3].

В настоящей работе для выделения поперечных степеней свободы калибровочных полей применен "динамический метод", который не использует дополнительных калибровочных условий в качестве исходных предположений. Динамический метод неоднократно применялся многими авторами и заключается в определении полевых переменных с нулевым каноническим импульсом в лагранжиане через остальные степени свободы посредством классических уравнений Эйлера. В результате лагранжиан зависит от чисто поперечных калибровочных полей, определениями которых служат нелинейные функции калибровочных полей, инвариантные относительно калибровочных преобразований.

---

* Настоящая работа - расширенный вариант работы [1].

В электродинамике этот метод, по-видимому, впервые был применен в обзоре Полубаринова[4] для вывода уравнений квантовой электродинамики в калибровке излучений /кулоновской/, однако само условие калибровки при таком выводе нигде не использовалось. /Результаты работы[4] кратко изложены в разделе 2/.

Основная задача нашей статьи - сформулировать правила квантования, устанавливающие связь между нетривиальной топологией неабелевых полей и динамическим методом выделения поперечных степеней свободы. С этой целью в разделе 3 проводится квантование топологически нетривиальной модели Швингера путем прямого решения уравнения Шредингера и показывается, что результаты такого квантования можно воспроизвести динамическим методом с помощью введения новой ротационной степени свободы калибровочного поля, описывающей нулевые топологические колебания вакуума.

В разделах 4,5 сформулированные правила квантования применяются к теории Янга-Миллса. Показано, что точное квантование топологических колебаний вакуума приводит к квантованию заряда и к физически выгодным сингулярным фоновым полям /с нулевым эффективным действием/, способным удерживать квантовые возбуждения цветных полей, кварков и глюонов.

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА /КЭД/

Динамический метод выделения поперечных степеней свободы в КЭД был применен в работе[4] для иллюстрации КЭД в калибровке излучений. Изложим здесь кратко результаты этой работы, сделав лишь одно несущественное изменение, а именно: будем оперировать терминами лагранжианов, а не уравнений движения.

Рассмотрим плотность лагранжиана КЭД.

$$\mathcal{L}_{cl.}(A;j) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + j_\mu A_\mu - \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,; \quad j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\,; \quad \partial\!\!\!/ = \partial_0\gamma_0 - \partial_i\gamma_i\,. \qquad /1/$$

Канонический импульс поля A_0 равен нулю

$$\pi_0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\,\partial_0 A_0} = 0.$$

Будем считать A_0 нединамической переменной и выразим в лагранжиане /1/ A_0 через динамические переменные с помощью уравнений Эйлера

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_0} = -\partial_i^2 A_0 + \partial_0\partial_i A_i + j_0 = 0. \qquad /2/$$

Подставляя решение этого уравнения

$$A_0 = \frac{1}{\partial_k^2}(\partial_0\partial_i A_i + j_0) \qquad /3/$$

в /1/, получим лагранжиан

$$\mathcal{L}_{qu.} = \mathcal{L}_{cl.}(A_0(A_i, j); A_i; j) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}E_i^{(r)2} - \frac{1}{4}F_{ij}^2 - \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - j_i A_i + \frac{1}{2}j_0\frac{1}{\partial_i^2}j_0 + j_0\left(\frac{1}{\partial_i^2}\partial_0\partial_k A_k\right)$$

$$E_i^{(r)} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\partial_k^2}\right)\partial_0 A_j\,. \qquad /4/$$

Сделаем в /4/ калибровочное преобразование

$$\psi^{(r)} = \exp\left\{-ie\frac{1}{\partial_i^2}\partial_k A_k\right\}\psi\,. \qquad /5/$$

В результате имеем плотность лагранжиана $\mathcal{L}_{qu.}$, выраженную в терминах чисто поперечных полей

$$\mathcal{L}_{qu.} = \frac{1}{2}(E_i^{(r)})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i A^{(r)})^2 - \bar{\psi}^{(r)}\partial\!\!\!/\psi^{(r)} + j_0^{(r)}\frac{1}{\partial_i^2}j_0^{(r)} - j_i^{(r)}A_i^{(r)}\,, \qquad /6/$$

где

$$A_i^{(r)} = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial_i\partial_k}{\partial_j^2}\right)A_k\,. \qquad /7/$$

Выражения /4/, /5/-/7/ являются инвариантными относительно калибровочных преобразований, зависящих от времени. Калибровочное условие $\partial_i A_i^{(r)} = 0$ в классе функций КЭД есть следствие определения /7/ и нигде не использовалось.

3. *КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ТОПОЛОГИЯ МОДЕЛИ ШВИНГЕРА*

Для того чтобы понять, как правильно применить динамический метод выделения поперечных степеней свободы в теории Янга-Миллса, рассмотрим точно решаемую модель калибровочного поля с нетривиальной топологической структурой конфигурационного пространства - модель Швингера

$$L = \int dx_1 \mathcal{L} \qquad /8/$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F_{01}^2 \; ; \qquad F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 . \qquad /9/$$

Совершим вначале точное квантование модели в калибровке $A_0 = 0$, которая выбирается исключительно из соображений наглядности и простоты топологической интерпретации используемых величин.

В этой калибровке оператор гамильтониана имеет вид:

$$\hat{H} = \int_{-R/2}^{R/2} dx \frac{1}{2} \hat{E}_1^2 \; ; \quad [\hat{E}_1(x), \hat{A}_1(y)] = i\delta(x-y) \qquad /10/$$

/будем квантовать поле в конечном пространстве-времени, R и T /. Основной величиной теории является волновая функция Ψ, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$\hat{H}\Psi_\epsilon(A) = \epsilon\,\Psi_\epsilon(A) \qquad /11/$$

с дополнительным условием:

$$\partial_1 \hat{E}_1 \Psi_\epsilon(A) = 0, \qquad /12/$$

где ϵ -собственное значение энергии. Условие /12/ есть следствие инвариантности классического гамильтониана относитель-

но несингулярных калибровочных преобразований, исчезающих на "бесконечности" /т.е. в точках $\pm R/2$ /

$$A_1'(x,t) = A_1(x,t) + \frac{1}{e}\partial_1 \Lambda(x). \qquad /13/$$

Оператор $\partial_1 \hat{E}$ в /12/ является генератором бесконечно малых преобразований /13/ / e - "константа связи", играющая роль обезразмеривающего фактора/. Известно, что динамика системы определяется полной группой всех возможных несингулярных преобразований, относительно которых гамильтониан инвариантен. Группа всех несингулярных преобразований /10/

$$A_1'^{(\nu)}(x,t) = e^{i\Lambda^{(\nu)}(x)} \left(A_1 + \frac{i}{e}\partial_1\right) e^{-i\Lambda^{(\nu)}(x)} \qquad /13/'$$

задается с помощью функций $e^{i\Lambda(x)}$ со значениями на "окружности" $U(1)$ и условием "несингулярности" $e^{i\Lambda(\pm R/2)} = 1$.
Все такие преобразования разбиваются на несвязные компоненты $\exp\{i\Lambda^{\nu}(x)\}$, характеризуемые индексом ν, который указывает, сколько раз прямая $R(1)$ /т.е. интервал $(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2})$ со "склеенными" концами/обернулась вокруг "окружности" $U(1)$ при отображении $R(I)$ в $U(1)$. Накладывая условие /12/, мы требуем инвариантности только относительно "малой" группы калибровочных преобразований с индексом $\nu = 0$.

Представим все калибровочные преобразования в виде произведения "малой" калибровочной группы на бесконечную циклическую группу Z /группу целых чисел относительно операции их сложения, которая, фактически, является фундаментальной группой конфигурационного пространства калибровочного поля/. Тогда дополнительным условием на вектор состояния является требование ковариантности Ψ относительно преобразований группы Z

$$\Psi_\epsilon(A'^{(\nu)}) = e^{i\nu\theta}\,\Psi_\epsilon(A) \qquad /14/$$

Напомним, что классическое калибровочное поле в модели Швингера характеризуется индексом Понтрягина:

$$\nu = -\frac{e}{2\pi}\int F_{01}\,dx\,dt \equiv N[A]\Big|_{t=+T/2} - N[A]\Big|_{t=-T/2} = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{N}\,dt \qquad /15/$$

$$N[A] = -\frac{e}{2\pi}\int_{-R/2}^{R/2} A_1\,dx\,. \qquad /16/$$

Здесь $N[A_1]$ -функционал от A_1, инвариантный относительно "малых" калибровочных преобразований и меняющийся на целое число при топологически нетривиальных калибровочных преобразованиях /13/' /5/

$$N[A'^{(\nu)}] = N[A] + \nu\,.$$

Уравнения /11/, /12/, /14/ - основные уравнения квантовой модели Швингера - имеют нетривиальное решение:

$$\Psi_\epsilon(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-i(2\pi k+\theta)N[A]\} \qquad /17/$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2(2\pi k+\theta)^2 R\,. \qquad /18/$$

Здесь k -целое число /номер зоны Бриллюэна/, θ -квазиимпульс.

Функция Грина строится стандартным образом по формуле

$$G(t',A'|t'',A'') = \sum_\epsilon e^{i\epsilon(t'-t'')}\Psi_\epsilon(A'')\Psi^*_\epsilon(A')\Big|_{t'-t''=T} = \qquad /19/$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{i\frac{e^2}{(2\pi)^2}(\theta+2k\pi)^2RT - i(\theta+2\pi k)[N(A')-N(A'')]\} \qquad /20/$$

и совпадает с функцией Грина свободного ротатора /6/. Выражение /20/ можно представить в виде фейнмановского интеграла по путям

$$G(t',A'|t'',A'') = \frac{1}{\sqrt{2\pi iTR\,e^2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\exp\{\frac{i}{2}(N'-N''+n)^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2\frac{1}{RT}\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\int_{N''}^{N'+n} dN(t)\exp\{i\int_{t''}^{t'} L_{Rotator}(N)\,dt\}, \qquad /20/'$$

где

$$L_{Rotator} = \frac{1}{2}\dot N^2\left(\frac{2\pi}{e}\right)^2\frac{1}{R}\,. \qquad /21/$$

Существует простой путь получения результатов /19/-/21/ в рамках динамического метода, без использования калибровочных условий.

Будем исходить из лагранжиана /9/ и будем считать, что A_0 не является динамической переменной, так как ее канонический импульс равен нулю.

Выразим A_0 через динамическую переменную с помощью классических уравнений Эйлера

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_1^2 A_0 - \partial_0\partial_1 A_1 = 0\,. \qquad /22/$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A_0 = \chi(x) + \frac{1}{\partial_1^2}\partial_0 A_1\,; \qquad F_{01} = -\partial_1\chi(x). \qquad /23/$$

Здесь $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_1^2\chi = 0\,. \qquad /24/$$

Подставляя /23/ в /9/, получим

$$L = \int_{-R/2}^{R/2} dx\,\frac{1}{2}F_{01}^2 = \int_{-R/2}^{R/2} dx\,\frac{1}{2}(\partial_1\chi)^2 = \frac{1}{2}\chi(x)\partial_1\chi(x)\Big|_{x=-R/2}^{x=R/2}\,. \qquad /25/$$

Физически-нетривиальное решение /24/ сингулярно и зависит от одного параметра. Обозначим его через $\dot c = \partial_0 c$

$$\chi(x) = \dot c\,x\,. \qquad /26/$$

Если подставить /23/, /26/ в определение индекса Понтрягина /15/, получим уравнение, связывающее "импульс" топологического индекса $\dot N$, $(\nu = \int dt\,\dot N)$ и степень свободы $\dot c$ /назовем эту степень свободы ротационной/:

$$\dot N = \int_{-R/2}^{R/2} dx\,\dot c = \dot c\,\frac{e}{2\pi}R\,. \qquad /27/$$

Окончательно, подставляя /27/ и /26/ в /25/, для лагранжиана /9/ получим выражение /21/

$$L = L_{\text{Rotator}} = \frac{1}{2}\dot{N}^2\left(\frac{2\pi}{e}\right)^2\frac{1}{R}.$$

Таким образом, динамический метод устранения лишних степеней свободы калибровочного поля воспроизводит на классическом уровне результаты прямого квантования - /19/-/21/ путем введения в решение классического уравнения /22/ сингулярного решения однородного уравнения. Фактор перед этим решением /нулевая мода/ играет роль динамической переменной, канонически сопряженной индексу Понтрягина, с точностью до коэффициента, определяемого уравнением Понтрягина /15/.

Сформулируем на рассмотренных примерах правила квантования калибровочных полей.

Правило 1. /Динамический метод выделения поперечных степеней свободы/.

Для квантования берется лагранжиан, в котором поля с нулевым каноническим импульсом выражаются через остальные переменные с помощью классических уравнений Эйлера.

Правило 2. /Введение ротационной степени свободы/.

Нулевая мода дифференциального оператора классического уравнения Эйлера в Правиле 1 отождествляется с динамической переменной, канонически сопряженной топологическому индексу с точностью до коэффициента, определяемого уравнением Понтрягина.

Правило 3. Ковариантность вектора состояний Ψ относительно преобразований фундаментальной группы конфигурационного пространства классических полей

$$\Psi(N+1) = e^{i\theta}\,\Psi(N).$$

4. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ТЕОРИИ ЯНГА-МИЛЛСА

Рассмотрим теорию Янга-Миллса с калибровочной группой

$$\mathcal{L}_{cl.} = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}) - \bar{\psi}\,\partial\!\!\!/\,\psi + j^a_\mu A^a_\mu, \qquad /28/$$

где

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] \qquad /29/$$

$$\hat{A}_\mu = -ig\frac{\tau^a}{2}A^a_\mu; \quad j^a_\mu = ig\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\psi.$$

Классические калибровочные поля характеризуются индексом Понтрягина [7]

$$\nu[A] = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^3x\,dt\,\mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\tilde{\hat{F}}_{\mu\nu}) = \int_{S(3)} ds_\mu X_\mu, \qquad /30/$$

где $S(3)$ -граница пространства-времени

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'}F_{\mu'\nu'}, \qquad /31/$$

$$X_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left(\hat{A}_\nu\partial_\rho\hat{A}_\sigma + \frac{2}{3}\hat{A}_\nu\hat{A}_\rho\hat{A}_\sigma\right) - \frac{1}{16\pi^2}$$

Для чисто калибровочных на SU(3) полей $\hat{A}_\mu = v\partial_\mu v^{-1}$ индекс ν указывает, сколько раз граница $S(3)$ обернулась вокруг сферы $SU(2)$ при отображении $S(3)$ в $SU(2)$, задаваемом матрицей $v(x,t)$.

Динамическая роль топологического индекса /30/ становится физически ясной в калибровке $A_0 = 0$, где лагранжиан полей Янга-Миллса и индекс Понтрягина имеют вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \qquad /32/$$

$$E^a_i = \partial_0 A^a_i; \quad B^a_i = \epsilon_{ijk}\left(\partial_j A^a_k + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}A^b_j A^c_k\right)$$

$$\nu[A] = \int \dot{N}\,dt; \quad N[A] = \int d^3x\,X_0. \qquad /33/$$

Динамическое описание любой системы - это фактически построение неприводимых представлений полной группы инвариантности лагранжиана системы. Поэтому для определения динамики полей Янга-Миллса мы должны выявить все несингулярные /т.е. не имеющие физических следствий/ калибровочные преобразования, относительно которых лагранжиан /32/ инвариантен. Группа таких преобразований состоит из всех несингулярных матриц $v(x)$ со значениями на группе $SU(2)$

$$A_i^{\prime(\nu)} = v^{(\nu)^{-1}}(A_i + \partial_i) v^{(\nu)} . \qquad /34/$$

Пространство матриц $v^{(\nu)}$ топологически несвязно и разбивается на компоненты, характеризуемые целым индексом ν, который указывает, сколько раз пространство $R(3)$/область определения x / обернулось вокруг трехмерной сферы $SU(2)$ /область определения v / при отображении $R(3) \to SU(2)$, задаваемом $v(x)$ /если индекс ν - нецелый, то отображение сингулярно/.

Группу всех калибровочных преобразований /как и в модели Швингера/ можно представить в виде произведения малой группы калибровочных преобразований с $\nu = 0$ на циклическую группу Z. Таким образом, конфигурационные пространства калибровочных полей модели Швингера и теории Янга-Миллса топологически эквивалентны.

Матрицы $v^{(\nu)}(x)$ описывают также классические вакуумы, для которых $\mathfrak{L} = 0$; $N[A]$ - целое число. В связи с этим принято говорить о периодической структуре классического вакуума неабелевых калибровочных полей [7]. По-видимому, более правильно указывать на периодическую структуру всего конфигурационного пространства полей Янга-Миллса, которое имеет топологию цилиндра [5]. Кроме поперечных степеней свободы, соответствующих координатам вдоль "цилиндра", имеется ротационная степень свободы, описывающая обороты вокруг "цилиндра". Такой ротационной динамической переменной является функционал $N[A]$, меняющийся на целое число при топологически нетривиальных преобразованиях /34/, т.е. $N[A]$ реализует представление циклической группы Z. Таким образом,следствием общего требования описания динамики как построения неприводимых представлений полной группы инвариантности лагранжиана является трактовка N как динамической переменной. Последнее есть основное отличие нашего подхода от инстантонной физики [7], в которой исходным пунктом является требование конечности действия. Это требование, в свою очередь, приводит только к классификации асимптотических вакуумных состояний классических полей и полевых конфигураций, интерполирующих между этими состояниями. Указывая на периодическую структуру всего конфигурационного пространства [5], мы ориентируемся на построение квантового вакуумного состояния как функционала от динамических переменных, заданных на всей области значений, а не только в точках классического вакуума.

В модели Швингера тот факт, что N -динамическая переменная, доказывается точным решением уравнения Шредингера /17/.

Аналогичное точное решение уравнения Шредингера существует в теории Янга-Миллса [8]

$$\hat{H}\Psi = \epsilon\Psi \qquad (\hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2}(E^2 + B^2)) \qquad /11/^a$$

$$\nabla_i \hat{E}\Psi = 0 \qquad (\nabla_i \hat{E}_i = \partial_i \hat{E}_i + [\hat{A}_i, \hat{E}_i]) \qquad /12/^a$$

$$\Psi(N+1) = e^{i\theta}\Psi(N). \qquad /14/^a$$

Это решение представляет собой плоскую волну /17/ по ротационной переменной $N[A]$ /31/, /33/ и является нефизическим, так как имеет мнимый импульс $(2\pi k + \theta) = \pm i 8\pi^2/g^2$. Построение точных физических решений /11/, /12/ ,/14/ - задача, по-видимому, невыполнимая в настоящее время. Однако, как мы показали выше, точное квантование ротационной степени свободы можно провести как бы на классическом уровне с помощью сформулированных выше трех правил квантования. Применим указанные правила к теории Янга-Миллса.

Правило I.

Выразим нединамическую переменную A_0^a через другие степени свободы A_i^a, $\bar{\psi}$, ψ с помощью уравнений Эйлера:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_0^a} = -\nabla_i^{ab}(A_i)[\nabla_i^{bc}(A_i)A_0^c - \partial_0 A_i^b] + j_0^a = 0. \qquad /35/$$

Предположим, что существует функция Грина $1/\nabla^2(A_i)$. Тогда решение /35/ запишем формально в виде

$$A_0^a = \dot{c}\Phi^a + [\frac{1}{\nabla^2}(\nabla_i \partial_0 A_i + j_0)]^a, \qquad /36/$$

где $\dot{c}$ -нулевая мода оператора $\nabla^2(A)$, а Φ^a удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2)^{ab}\Phi^b = 0.$$

Строго говоря, мы должны также наложить условие ортогональности между Φ^a и $[\nabla_i \partial_0 A_i + j_0]^a$ /9/. /Как будет видно из структуры полученного в дальнейшем взаимодействия, это условие будет выполнено автоматически/.

Важно отметить, что для цели выделения поперечных степеней свободы единственное, что нужно знать о величинах уравнений /35/, /34/, - это их трансформационные свойства относительно калибровочных преобразований

$$\hat{A}'(x,t) = v^{-1}(x,t)(\hat{A}_i + \partial_i)v(x,t). \qquad /37/$$

Обозначим $\nabla_k(A') = \nabla'_k$. Из /37/ имеем

$$\nabla'_k \hat{O} = v^{-1}[\nabla_k (v\hat{O}v^{-1})]v$$

$$[\nabla'_i \frac{1}{\nabla'^2} \nabla'_k]\hat{O} = v^{-1}[\nabla_i \frac{1}{\nabla^2}\nabla_k (v\hat{O}v^{-1})]v \qquad /38/$$

$$\partial_0 A'_k = v^{-1}\{\partial_0 A_k + \nabla_k[(\partial_0 v)v^{-1}]\}v,$$

где $\hat{O}$ - произвольная матрица.

Подставляя /36/ в /28/ и делая преобразования, аналогичные /5/, /7/, получим для лагранжиана $\mathcal{L}_{qu}$ следующий вид * :

$$\mathcal{L}_{qu} = \mathcal{L}_{Y.-M.} + \mathcal{L}_Q + \mathcal{L}_{Rot.}, \qquad /39/$$

где

$$\mathcal{L}_{Y.-M.} = \frac{1}{2}(E^{(r)2} - B^{(r)2}) \qquad /40/$$

---

* Для простоты будем пренебрегать в дальнейшем поверхностными членами, зависящими от токов j.

$$\mathcal{L}_Q = -\bar{\psi}^{(r)} \partial\!\!\!/ \psi^{(r)} - j_i^{(r)a} A_i^{(r)a} + \frac{1}{2} j_0^{(r)a} (\frac{1}{\nabla^2(r)} j_0^{(r)})^a \qquad /41/$$

$$\mathcal{L}_{Rot} = \frac{\dot{c}^2}{2}[\nabla_i(r)\Phi^{(r)}]^2 - \dot{c}[\nabla_i(r)\Phi^{(r)}]^a E_i^{(r)a} \qquad /42/$$

/$E_i^{(r)a}$, $B_i^{(r)a}$ - выражения /32/ от чисто поперечных полей $A^{(r)}$ /

$$\hat{A}_k^{(r)} = u(A)(\hat{A}_k + \partial_k)u^{-1}(A) \qquad /43/$$

$$\psi^{(r)} = u^{-1}(A)\psi$$

$$u(A) = T\exp\{\int_{-T/2}^{t} dt' \frac{1}{\nabla^2} \nabla_k \partial_0 \hat{A}_k\} \qquad /44/$$

$$(T\exp\{\int_{t_0}^{t} dt' \partial_0 \Phi\} = e^{\Phi(t)} e^{\Phi(t_0)})$$

$$\nabla(r) \equiv \nabla(A^{(r)}); \quad \nabla_i^{(r)}[\nabla_i(r)\Phi^{(r)}] = 0. \qquad /45/$$

Формулы /43/, /44/, аналогично формулам /4,5/, определяют чисто поперечные поля, инвариантные относительно калибровочных преобразований /37/ и $\psi' = v\psi$. Следствием определений /43/, /32/ являются тождества

$$[\nabla_i(r)E_i^{(r)}]^a \equiv [\nabla_i(r)B_i^{(r)}]^a \equiv 0. \qquad /46/$$

В силу условий поперечности /45/, /46/, взаимодействие в /42/ локализовано только на границе пространства $R(3)$ и в точках сингулярностей поперечных полей.

Правило II.

Согласно правилу 2, определение топологического индекса служит уравнением, связывающим нулевую моду оператора ∇^2 /ротационную степень свободы калибровочного поля/ с индексом Понтрягина

$$\nu[A] = \int_{-T/2}^{T/2} dt\,\dot{N} = \frac{g^2}{2(16\pi^2)} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{(R)} d^3x\, F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^a_{\mu\nu}. \qquad /47/$$

Подставляя в /47/ определение A_0^a /36/, получим *

$$\dot{\tilde N} = \dot c\, \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^3x\, [\, \nabla_i(r)\Phi^{(r)}\,]^a B_i^{(r)a}, \qquad /48/$$

где

$$\tilde N = N + N^{(r)} \qquad /49/$$

$$N^{(r)} = \int d^3x\, X_0\, (A^{(r)}). \qquad /50/$$

Функционал /50/ зависит от поперечных степеней свободы и является инвариантным относительно калибровочных преобразований, поэтому топологические свойства конфигурационного пространства описываются ротационной степенью свободы $\dot c$.

Подставляя /48/ в $\mathcal{L}_{Rot}$ (42), окончательно найдем

$$L_{Rot} = \int d^3x\, \mathcal{L}_{Rot} = \frac{\dot N^2}{2} I - \dot N J \qquad /51/$$

$$I = \frac{\int d^3x\, (\nabla\Phi)^2}{[\int d^3x(\nabla\Phi\cdot B)]^2}\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)^2; \quad J = \frac{8\pi^2}{g^2}\, \frac{\int d^3x\, (\nabla\Phi\cdot E)}{\int d^3x\, (\nabla\Phi\cdot B)} \qquad /52/$$

Таким образом, мы выделили динамическую переменную N , которая реализует представление группы Z / в соответствии с определением полной калибровочной группы преобразований как произведения "малой" калибровочной группы на циклическую группу Z: $G = G_0 \times Z$ /.

Лагранжиан для N, L_{Rot} зависит только от "скорости" $\dot N$, и инвариантен относительно циклических преобразований $N' = N + \nu$, где ν -целое число.

Выражая лагранжиан через канонический импульс $p = \delta L_{Rot}/\delta\dot N$, получим гамильтониан:

$$H_{Rot}(p) = L_{Rot}(p) = \frac{p^2 - J^2}{2I}\,. \qquad /53/$$

* См. примечание на стр. 14.

Правило III.

Рассмотрим квантование ротационной переменной N . Наша цель - вычислить амплитуду перехода между состояниями с определенной энергией, которые являются одновременно состояниями с определенным импульсом:

$$\langle p\,|\,p'\rangle_{t\to-\infty,\ t=+\infty} = \langle p\,|\exp\{\, i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_{Rot}(\hat p)dt\}|\,p'\rangle = \delta_{p,p'}\, e^{i\int dt\, L_{Rot}(p)}. \qquad /54/$$

В силу условия периодичности на векторы состояний

$$\Psi_p(N+1) = \Psi_p(N)e^{i\theta},$$

где

$$\Psi_p(N) = \langle p\,|\,N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipN},$$

имеем дискретный спектр импульсов:

$$p = (2\pi k + \theta),$$

где k -номер зоны Бриллюэна, θ -квазимпульс.

В результате получаем следующее эффективное действие в теории Янга-Миллса

$$S_{эфф} = \int dt\, (L_{Y.-M} + L_Q + L_{Rot}(p)) \equiv S_{Y.-M} + S_Q + S_{Rot} \qquad /55/$$

$$S_{Rot} = \frac{1}{2}\int dt\left[\left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^2 (2\pi k + \theta)^2 \langle B\rangle^2 - \langle E\rangle^2\right]$$

$$\langle O\rangle^2 = [\int d^3x\, O_i^a\, (\nabla_i(r)\Phi^{(r)})^a]^2 / \int d^3x\, [\nabla_i(r)\Phi^{(r)}]^2. \qquad /56/$$

Стоит еще раз обратить внимание на отличие развиваемого здесь метода квантования от топологического подхода к теории Янга-Миллса, описываемого в работах /7/. С этой целью запишем S -матрицу в другом представлении:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta n} \langle N'\,|\, e^{i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H}\,|\,N+n\rangle. \qquad /54/$$

Для того чтобы перейти к энергетическому представлению /54/, необходимо проинтегрировать /54/ независимо по N и

N' по всем физическим значениям, так что аналог классического индекса Понтрягина

$$\nu = N - N' + n$$

"пробегает" всю действительную ось, а не только целые числа.

Таким образом, определение квантового состояния с фиксированным импульсом ротатора несовместимо с требованием дискретности ν, которое следует из конечности классического действия и регулярности калибровочных полей. С другой стороны, пример модели Швингера показывает, что мы можем воспроизвести динамическим методом результаты прямого квантования топологической переменной, если выйдем за рамки класса регулярных функций. При этом мы имеем дело с эффективным действием, т.е. таким, куда входит дополнительное взаимодействие калибровочных полей, локализованное в точках их сингулярностей. Это дополнительное взаимодействие имеет обратный знак и как бы вычитает сингулярный вклад от нетривиальных поперечных полей

$$S_{Y.-M} + S_{Rot} = \frac{1}{2}\int dt\,\{[\int d^3x\, E^2 - \langle E\rangle^2] - [\int d^3x\, B^2 - \langle B\rangle^2 (\frac{g^2}{8\pi^2})^2 (2k\pi + \theta)^2]\}, \qquad /56/'$$

и тем самым требование конечности $S_{эфф}$ допускает сингулярные калибровочные поля. Здесь мы имеем довольно близкую аналогию с задачей рассеяния, где переход на массовую поверхность в функции Грина означает, в терминах функционального интеграла, вычитание из классического действия действие для асимптотических физически нетривиальных состояний.

Выражение /56/′ удовлетворяет формальному требованию лоренц-инвариантности /т.е. принимает форму разности квадратов электрического и магнитного полей/, если выполнено условие:

$$|\frac{g^2}{8\pi^2}(2\pi k + \theta)|^2 = 1, \qquad /57/$$

которое означает квантование заряда в теории Янга-Миллса

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{1}{k + \theta/2\pi}. \qquad /57'/$$

В этой формуле k -целое число, θ -параметр нарушения CP-симметрии. Предполагая универсальную константу для всех взаимодействий

$$\alpha = \frac{1}{137{,}0359\ldots} = \alpha_0 (1 - \alpha_0 \frac{\theta}{2\pi} + \ldots); \quad \alpha_0 = \frac{1}{137},$$

получаем грубую оценку теоретического значения для константы сверхслабого взаимодействия, которое находится в согласии с опытом

$$\sqrt{W_{K_L \to 2\pi} / W_{K_S \to 2\pi}} \sim \alpha_0 \frac{\theta}{2\pi} \sim 10^{-3}.$$

W_K -вероятности распадов нейтральных каонов. Здесь предположено также, что по теории Вайнберга-Салама $\sqrt{W_{K_S}} \sim \alpha$.

5. ПРОБЛЕМА КОНФАЙНМЕНТА

В настоящее время, по-видимому, существует единственный рабочий метод вычисления физических величин в реальных калибровочных теориях, - это метод теории возмущений по малой константе связи. В теории возмущений обычно предполагают, что квантованные поля заданы на классе основных функций, несингулярных и исчезающих на бесконечности [10]. В этом случае $S_{Rot} = 0$ и топологические вакуумные колебания не дают ничего нового по сравнению со стандартной теорией возмущений в калибровке $A_0 = 0$ [11]*. /Дело в том, что полученная нами классическая теория на уравнениях движения эквивалентна исходной теории Янга-Миллса, так как при выделении поперечных полей мы использовали только сами уравнения движения. Уравнения, определяющие поперечные поля через исходные, вырождены, что выражается в поперечности электрического поля. Мы знаем пока один способ квантования вырожденных полей - это уравнения /11/[a], /12/[a], на стр. 13 /см. также эквивалентный этим уравнениям метод, описанный в работе [11]/.

* Мы не рассматриваем специально случай разложения вокруг инстантонов, так как такое разложение [7] для малых констант связи дает экспоненциально малый вклад $\exp\{-\frac{8\pi^2}{g^2}\nu\}$, $\nu = 1,2,3\ldots$, по сравнению с теорией возмущений. / S_{Rot} для инстантонов также равно нулю/.

Из вычисления эффективного лагранжиана полей Янга-Миллса известно, что обычная теория возмущений нестабильна[12], с другой стороны, такая теория возмущений не будет воспроизводить точное решение уравнения Шредингера /11/^{a}, /12/^{a}, /14/^{a}, так как зависимость от N потеряна и /14/^{a} не имеет физического смысла.

Как мы видели, в модели Швингера, для того чтобы воспроизвести результаты квантования ротационной переменной, необходимо при применении правил I, II, III использовать сингулярные решения классических уравнений.

В связи с этим предположим, что поперечное поле представляет собой сумму сингулярного фонового поля b и поля $\tilde{a}_i$, описывающего квантовые возбуждения. Предположим далее, что поле $\tilde{a}$ имеет нулевые граничные условия на сингулярностях, т.е. выполнено условие "невылетания"

$$S_{Rot}(b+a) = S_{Rot}(b). \qquad /58/$$

В результате имеем

$$S_{эфф}(b+a) = S_{Y.-M}(b+\hat{a}) + S_{Rot}(b) + S_Q(\tilde{a}+b,\psi,\bar{\psi}) =$$

$$= (S_{Y.-M}(b) + S_{Rot}(b)) + S'_{Y.-M}(b)\tilde{a} + \frac{1}{2}S''_{Y.-M}\tilde{a}^2 + \ldots \qquad /59/$$

Разложение вокруг фоновых сингулярных полей имеет смысл и действительно составляет конкуренцию с нестабильной обычной теорией возмущений, если выполнены условия "доминантности"

$$S_{Y.-M}(b) + S_{Rot}(b) = 0 \qquad /60/$$

и условия "стабильности"

$$\frac{\delta S_{Y.-M}}{\delta b} = 0; \qquad \frac{\delta^2 S_{Y.-M}}{\delta b^2} < 0, \qquad /61/$$

так что S-матрица в эвклидовом пространстве пропорциональна единице, отсутствуют вакуумные переходы и эффективный потенциал положительно определен.

Уравнения /58/, /60/, /61/ совместно с /57/ довольно жестко фиксируют фоновые поля, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\nabla(b)\Phi = B(b) \qquad /62/$$
$$B(b) = \pm E(b).$$

В калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ эти уравнения совпадают со стационарными уравнениями дуальности и сводятся в сферически симметричном случае к уравнению Лиувилля[13] с единственным сингулярным решением

$$b_\mu^a = (\Phi^a, b_i^a); \quad \partial_\mu b_\mu^a = 0; \quad \partial_0 b_\mu^a = 0$$

$$\Phi^a = \frac{m}{g}\frac{x^a}{r}[\operatorname{ctg} mr - 1/mr], \quad r = |x|$$

$$b_i^a = \frac{m}{g}\epsilon_{ai\ell}\frac{x^\ell}{r}[\operatorname{cosec} mr - 1/mr].$$

Спонтанное нарушение масштабной инвариантности (m) возникает из-за ненулевых граничных условий. Стационарные решения уравнения дуальности /стационарные инстантоны назовем "стантонами"/ приводят для радиальных возбуждений к точно решаемым и положительно определенным потенциалам Пешля-Теллера[13]. Эти потенциалы имеют непроницаемые барьеры, и для собственных функций, диагонализирующих гамильтониан, выполняется условие "невылетания" /58/. При этом можно ограничиться рассмотрением одной потенциальной ямы размерами $\sim\pi/m$. Таким образом, радиальные "цветные" возбуждения заключены в "ловушке" размерами порядка π/m*.

Малые расстояния /"асимптотическая свобода"/ соответствуют пределу $m = 0$. В этом пределе мы имеем обычную теорию возмущений со свободными кварками и глюонами[14].

Таким образом, мы показали, что существует возможность самосогласованного описания конфайнмента цветных возбуждений в квантовой хромодинамике. В пользу единственности теории возмущения вокруг "стантона" свидетельствует нестабильность обычной теории возмущений и точно решаемая модель Швингера.

* Подробному исследованию этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

Задачи следующих работ - исследовать проблему "единственности", провести разложение вокруг "стантона" /15/, построить бесцветный сектор связанных состояний и доказать их "наблюдаемость".

В заключение отметим, что представляет интерес провести аналогичную программу квантования конформно-инвариантной теории гравитации Вейля. Квантование ротационных переменных /число которых, по-видимому, совпадает с числом топологических индексов/ может привести к сингулярным космологическим решениям и возникновению масштаба гравитационных взаимодействий,- константы Ньютона.

Автор испытывает чувство глубокой признательности к Дмитрию Ивановичу Блохинцеву за постоянное внимание к работе, стимулирующие обсуждения и ряд ценных советов. Автор благодарен также Б.М.Барбашову, М.К.Волкову, В.Н.Грибову, А.В.Ефремову, Г.В.Ефимову, А.А.Леоновичу, В.В.Нестеренко, И.В.Полубаринову, М.В.Терентьеву, Д.В.Ширкову за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первушин В.Н. ОИЯИ Р2-12053, Дубна, 1976.*
2. *Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p.30.*
3. *Gribov V.N. Nucl.Phys., 1928, B139, p.1.*
   Singer I.M. Comm.Math.Phys., 1976, 60, p.7.
4. *Полубаринов И.В. ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965.*
5. *Фаддеев Л.Д. Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля /1976/. ОИЯИ Д1-9788, Дубна, 1976, с.267.*
6. *Schulman L. Phys.Rev. 1968, 176, p.1656.*
7. *Belavin A. et al. Phys.Lett., 1975, 59B, p.85.*
   Callan C.G., Jr., et al. Phys.Rev., 1978, D17, p.2717.
8. *Гальперин А.С., Первушин В.Н. ОИЯИ Р2-11830, Дубна, 1978.*
9. *Bogolubov N.N., Tyablikov S.V. Zh.E.J.F. (USSR), 1949, 19, p.256.*
10. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в терию квантованных полей. М., "Наука", 1972.*
11. *Faddeev L.D. et al. LOMI. Preprint E-4-78. Leningrad, 1978.*
12. *Savidy G.K. Phys.Lett., 1977, 71B, p.133.*
13. *Barbashov B.M. et al. JINR, 12-11669, Dubna, 1978.*
14. *Efremov A.V., Radyushkin A.V. JINR, E2-11535, Dubna, 1978.*
15. *Hooft G."t. Phys.Rev., 1976, D14, 3432.*

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1979 года