объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12221

М.М.Еникова, В.И.Карлуковски

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С SO(4)- И SO(3,1)- СИММЕТРИЕЙ

1979

P2 - 12221

М.М.Еникова, В.И.Карлуковски

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
С SO(4)- И SO(3,1)- СИММЕТРИЕЙ

Направлено в "Journal Phys. A"

Еникова М.М., Карлуковски В.И. Р2 - 12221

Динамические системы с SO(4)- и SO(3,1)-симметрией

Рассматриваются динамические системы с тремя степенями свободы и гамильтонианом, квадратичным по импульсам и инвариантным относительно вращений. Обсуждается класс таких систем, являющихся нелинейными реализациями динамической SO(4)- или SO(3,1)-групп симметрии с "вектором Рунге-Ленца", линейным по импульсам (механический аналог нелинейных киральных реализаций теории поля). Найдены явные решения соответствующих уравнений движения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Enikova M.M., Karloukovski V.I. P2 - 12221

Dynamical Systems with SO(4) and SO(3,1) Symmetry

Dynamical systems with three degrees of freedom and Hamiltonian quadratic in momenta and invariant under space rotations are considered. A class of such systems which can be interpreted as a nonlinear realization of dynamical SO(4) or SO(3,1) symmetry group with a Runge-Lenz vector linear in momenta is found. The corresponding equations of motion are solved explicitly.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к классической механике никогда не прекращается. В последние годы он даже несколько возрос. Можно выдвинуть несколько объяснений такой линии развития. Мы укажем на одно из них, возможно не самое главное, но, по меньшей мере, объясняющее наш интерес к этой конкретной задаче механики, которую мы решаем в настоящей работе. Имеется в виду непрерывно возрастающее значение для физики ряда нелинейных проблем, более конкретно: непрерывно возрастающий интерес к решениям нелинейных полевых теорий. Классическая механика является наиболее разработанным примером нелинейной физической теории. Ее основные принципы и методы четко сформулированы в прошлых столетиях. Как математическая теория классическая механика включает множество динамических систем. С другой стороны, типы физических взаимодействий, которые рассматривались в прошлом, довольно ограничены. К тому же мы знаем теперь несколько больше о тех взаимодействиях, на которые опирался весь ньютонов мир. Мы сталкиваемся с новыми явлениями, стимулирующими поиск и изучение нетрадиционных форм взаимодействия, которые не рассматривались в рамках классической механики. Встречаются физические ситуации, при которых рассматриваются не только силы, зависящие от скоростей, но также и массы, зависящие от положения частиц. В [1], например, мы рассмотрели все динамические системы, обладающие строгой кеплеровой симметрией, т.е. системы с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + U, \qquad /1.1/$$

$$g^{ij}(\vec{x}) = G_1(x^2)\delta^{ij} + G_2(x^2)x^i x^j, \qquad /1.2/$$

которые обладают "скрытой" SO(4)– или SO(3,1)-симметрией и вектором Рунге-Ленца, квадратичным по импульсам.

Настоящая работа посвящена изучению SO(4) и SO(3,1) симметрических динамических систем вида /1.1/, /1.2/ с линейным по импульсам вектором Рунге-Ленца.

Во втором разделе мы приводим некоторые общие соотношения и обозначения, в третьем - находим все динамические системы упомянутого типа и в четвертом - решаем уравнения движения. В пятом разделе мы коротко обсуждаем поведение траекторий и законов движения при преобразованиях симметрии.

Случай динамических систем /инвариантных относительно группы SO(4) /, который мы называем здесь общим случаем /см. ниже раздел 3/, является механическим аналогом нелинейных реализаций киральной SU(2) × SU(2) -симметрии в теории поля/2/. Это позволяет нам использовать результаты, полученные в настоящей работе, для построения обширного семейства точных решений с конечной энергией в классических теориях поля/3/.

2. *ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ*

Мы изучаем здесь классическую динамическую систему с тремя степенями свободы $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x_1, x_2, x_3)$ и лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(\vec{x})\dot{x}^i \dot{x}^j - U(x) \qquad /2.1/$$

или гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(\vec{x}) p_i p_j + U(x). \qquad /2.2/$$

Контрвариантные и ковариантные компоненты метрического тензора связаны соотношением

$$g^{in} g_{nj} = \delta^i_j = g_{jn} g^{ni}. \qquad /2.3/$$

Будем предполагать, что угловой момент

$$J_j = \epsilon_{jk\ell}\, x^k p_\ell \qquad /2.4/$$

сохраняется:

$$\dot{J} = \{ J_j, H \} = 0. \qquad /2.5/$$

Это условие будет выполняться, если

$$g^{ij}(x) = G_1(x^2)\delta^{ij} + G_2(x^2)x^i x^j, \quad U(\vec{x}) = U(x^2), \qquad /2.6/$$

так что

$$H = \frac{1}{2}[G_1(x^2)p^2 + G_2(x^2)(\vec{x}\vec{p})^2] + U(x^2). \qquad /2.7/$$

Обозначая ковариантные компоненты метрического тензора

$$g_{ij}(\vec{x}) = d_1(x^2)\delta_{ij} + d_2(x^2)x_i x_j, \qquad /2.8/$$

получаем из /2.3/

$$G_1(x^2)d_1(x^2) = 1, \quad [G_1(x^2) + x^2 G_2(x^2)][d_1(x^2) + x^2 d_2(x^2)] = 1. \qquad /2.9/$$

Импульсы и скорости связаны посредством

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = g_{j\ell}\dot{x}^\ell, \qquad \dot{x}^j = g^{j\ell} p_\ell. \qquad /2.10/$$

Константы движения выражаются следующим образом через скорости:

$$H = \frac{1}{2}[d_1(x^2)\dot{x}^2 + d_2(x^2)(x\dot{x})^2] + U(x^2), \qquad /2.11/$$

$$J_j = d_1(x^2)\,\epsilon_{jk\ell}\, x^k \dot{x}^\ell, \qquad /2.12/$$

$$J^2 = d_1^2(x^2)[x^2\dot{x}^2 - (\vec{x}\dot{\vec{x}})^2]. \qquad /2.13/$$

Мы будем работать тоже в сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi,$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\phi,$$

$$x_3 = r\cos\theta, \qquad /2.14/$$

в которых /2.11/-/2.13/ принимают вид

$$H = \frac{1}{2}[d_1(r^2) + r^2 d_2(r^2)]\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2 d_1(r^2)[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2] + U(r), \qquad /2.15/$$

$$J_3 = r^2 d_1(r^2)\dot{\phi}\sin\theta, \qquad /2.16/$$

$$J^2 = r^4 d_1(r^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2). \qquad /2.17/$$

Комбинируя /2.15/ и /2.17/, можно написать

$$H = \frac{1}{2}[d_1(r^2) + r^2 d_2(r^2)]\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2r^2 d_1(r^2)} + U(r^2). \qquad /2.18/$$

3. *ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С* SO(4)- *ИЛИ* SO(3,1)- *СИММЕТРИЕЙ*

Опишем динамические системы, обсуждаемые в нашей работе, и сформулируем задачу, которую решим в этом разделе. Необходимо найти все динамические системы с гамильтонианом вида /2.7/, обладающие тремя первыми интегралами K_j, $j=1,2,3$:

$$\dot{K}_j = \{K_j, H\} = 0, \qquad /3.1/$$

кроме трех компонент углового момента /2.4/, таких что

а/ K_j -компоненты вектора и замыкают вместе с J_j алгебру Ли SO(4) или SO(3,1):

$$\{J_j, J_\ell\} = \epsilon_{j\ell n} J_n, \qquad /3.2/$$

$$\{J_j, K_\ell\} = \epsilon_{j\ell n} K_n, \qquad /3.3/$$

$$\{K_j, K_\ell\} = \eta\epsilon_{j\ell n} J_n; \qquad /3.4/$$

б/ K_j линейны по импульсам:

$$K_j = a(x^2)p_j + [b_2(x^2)(\vec{x}\vec{p}) + b_1(x^2)]x_j. \qquad /3.5/$$

Уравнение /3.1/ накладывает некоторые ограничения на гамильтониан H и вектор Рунге-Ленца K. Они могут быть сформулированы как система обыкновенных дифференциальных уравнений для $a(x^2)$, $b_1(x^2)$, $b_2(x^2)$, $G_1(x^2)$, $G_2(x^2)$ и $U(x^2)$ ($f' = df/dx^2$):

$$(a + x^2 b_2)G_1' - b_2 G_1 = 0, \qquad /3.6/$$

$$(a + x^2 b_2)G_2' - (b_2 + 2x^2 b_2')G_2 - 2b_2' G_1 = 0, \qquad /3.7/$$

$$2b_1' G_1 + (2x^2 b_1' + b_1)G_2 = 0, \qquad /3.8/$$

$$(a + x^2 b_2)U' = 0, \qquad /3.9/$$

$$(2a' + b_2)G_1 + (2x^2 a' - a)G_2 = 0, \qquad /3.10/$$

$$G_1 b_1 = 0. \qquad /3.11/$$

Существует еще одно ограничение на H и K, вытекающее из условия /3.34/, которое позволяет выразить $b_2(x^2)$ через $a(x^2)$:

$$b_2(x^2) = \frac{\eta + 2a(x^2)a'(x^2)}{a(x^2) - 2x^2 a'(x^2)}. \qquad /3.12/$$

Сейчас мы найдем решения системы /3.6/-/3.12/. Уравнение /3.11/ означает, что или

$$b_1(x^2) = 0, \qquad /3.13/$$

или

$$G_1(x^2) = 0. \qquad /3.14/$$

Будем называть первую возможность общим случаем, а вторую - вырожденным случаем.

Обсудим вначале вырожденный случай. Система /3.6/-/3.11/ сводится к

$$(a+x^2b_2)G_2' - (b_2 + 2x^2 b_2')G_2 = 0, \qquad /3.15/$$

$$(2x^2 b_1' + b_1)G_2 = 0, \qquad /3.16/$$

$$(a + x^2 b_2)U' = 0, \qquad /3.17/$$

$$(2x^2 a' - a)G_2 = 0. \qquad /3.18/$$

$G_2(x^2) = 0$ означало бы, что гамильтониан не зависит от импульсов, так что принимаем $G_2(x^2) \neq 0$. Тогда решения уравнений /3.16/ и/3.18/ имеют вид

$$a(x^2) = a(1)\sqrt{x^2}, \qquad b_1(x^2) = \frac{b_1(1)}{\sqrt{x^2}}. \qquad /3.19/$$

Уравнение /3.12/ приобретает вид

$$0.\ b_2(x^2) = \eta + 2a(x^2)a'(x^2). \qquad /3.20/$$

Это противоречиво, если не выполнено

$$a(1) = \sqrt{-\eta}. \qquad /3.21/$$

В этом случае /3.20/ не накладывает ограничения на $b_2(x^2)$. Из /3.17/ следует, что

$$U(x^2) = \text{const} \qquad /3.22/$$

или

$$a(x^2) + x^2 b_2(x^2) = 0. \qquad /3.23/$$

В последнем случае получается

$$b_2(x^2) = -\frac{1}{x^2}a(x^2) = -\sqrt{\frac{-\eta}{x^2}}. \qquad /3.24/$$

При этом $U(x^2)$ и $G_2(x^2)$ остаются произвольными, а гамильтониан и вектор Рунге-Ленца окончательно имеют вид

$$H = \frac{1}{2}G_2(x^2)(\vec{x}\vec{p})^2 + U(x^2), \qquad /3.25/$$

$$K_j = \sqrt{-\eta x^2}\,p_j + [-(\vec{x}\vec{p})\sqrt{\frac{-\eta}{x^2}} + \frac{b_1(1)}{\sqrt{x^2}}]x_j. \qquad /3.26/$$

В первом случае, $U = \text{const}$, $b_2(x^2)$ остается произвольным, в то время как

$$G_2(x^2) = g[\sqrt{-\eta} + \sqrt{x^2}\,b_2(x^2)]^2, \quad g = \text{const}, \qquad /3.27/$$

так что

$$H = \frac{1}{2}g[\sqrt{-\eta} + \sqrt{x^2}\,b_2(x^2)]^2(\vec{x}\vec{p})^2, \qquad /3.28/$$

$$K_j = \sqrt{-\eta x^2}\,p_j + [b_2(x^2)(\vec{x}\vec{p}) + \frac{b_1(1)}{\sqrt{x^2}}]x_j. \qquad /3.29/$$

Выражения /3.26/-/3.29/ вещественны только для $\eta = -1$.

Вырожденный случай на самом деле является в своей основе простейшей реализацией $E(3)$-симметрии, порожденной константами движения J_j и

$$n_j = \frac{x_j}{\sqrt{x^2}}. \qquad /3.30/$$

Векторы Рунге-Ленца /3.26/ и /3.29/ - составные величины, которые можно построить из $\vec{J}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{K} = \sqrt{-\eta}\,(\vec{J}\times\vec{n}) + b_1(1)\vec{n}, \qquad /3.31/$$

$$\vec{K} = \sqrt{-\eta}\,(\vec{J}\times\vec{n}) + [\sqrt{\frac{2H}{g}} + b_1(1)]\,\vec{n}. \qquad /3.32/$$

В общем случае уравнения /3.8/, /3.11/ удовлетворяются автоматически. Из уравнения /3.9/ следует снова, что

$$U(x^2) = \text{const} \qquad /3.33/$$

или

$$a(x^2) + x^2 b_2(x^2) = 0. \qquad /3.34/$$

Принимая, что выполняется /3.33/, находим, что

$$G_1(x^2) = \frac{1}{g}[\eta x^2 + a^2(x^2)], \qquad /3.35/$$

$$G_2(x^2) = G_1(x^2)[\eta + 4aa' - 4x^2a'][a - 2x^2a']^{-2}. \qquad /3.36/$$

Функции /3.12/, /3.13/, /3.33/, /3.35/ и /3.36/ удовлетворяют все уравнения /3.6/-/3.11/. Функция $a(x^2)$ и константа интегрирования /константа взаимодействия/ остаются произвольными. Гамильтониан, лагранжиан и вектор Рунге-Ленца принимают вид

$$H = \frac{1}{2g}[(\eta x^2 + a^2)p^2 + \frac{(\eta x^2+a^2)(\eta+4aa'-4x^2a'^2)}{(a-2x^2a')^2}(\vec{x}\vec{p})^2], \qquad /3.37/$$

$$L = \frac{g}{2(\eta x^2 + a)}[\dot{x}^2 - \frac{\eta+4aa'-4x^2a'^2}{\eta x^2 + a^2}(\vec{x}\dot{\vec{x}})^2], \qquad /3.38/$$

$$K_j = ap_j + \frac{\eta + 2aa'}{a - 2x^2a'}(\vec{x}\vec{p})x_j. \qquad /3.39/$$

Легко проверить, что для $\eta = +1$ это является механическим аналогом реализации Швингера-Вайнберга киральной $SU(2)\times SU(2)$-симметрии в теории поля [2,4]. Отметим, что один из элементов Казимира есть ноль:

$$\vec{J}\vec{K} = 0, \qquad /3.40/$$

а. гамильтониан оказывается пропорциональным второму элементу:

$$H = \frac{\eta}{2g}(J^2 + K^2). \qquad /3.41/$$

В подслучае $a \pm x^2 b_2 = 0$ общего случая получаем, внося /3.12/ в /3.34/:

$$\eta x^2 + a^2(x^2) = 0 \qquad /3.42/$$

или

$$a(x^2) = \sqrt{-\eta x^2}, \qquad /3.43/$$

которое вещественно только для $\eta = -1$. Теперь $U(x^2)$ - произвольно, а

$$b_2(x^2) = -\sqrt{\frac{-\eta}{x^2}}. \qquad /3.44/$$

Из /3.6/ следует, что

$$G_1(x^2) = 0, \qquad /3.45/$$

т.е. этот подслучай на самом деле содержится в вырожденном случае. Он соответствует /3.25/ и /3.26/, в которых надо положить $b_1(1) = 0$.

4. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

В вырожденном случае существуют константы движения n_j, фиксирующие направления движения, т.е. частица движется по прямой. Выбирая $\vec{n} = (1,0,0)$, так что $\vec{x} = (x,0,0)$, $\vec{p} = (p,0,0)$, $\vec{K} = (K,0,0)$, видим, что /3.25/ и /3.26/ принимают вид

$$H = \frac{1}{2}x^2 G_2(x^2)p^2 + U(x^2), \qquad /4.1/$$

$$K = b_1(1) = \mathrm{const}, \qquad /4.2/$$

т.е. в вырожденном случае алгебра группы симметрии, после того как проблема сводится к одномерной, исчезает и единственной константой движения является гамильтониан.

В общем случае из уравнения /2.18/ получается

$$\frac{1}{2}[d_1(r^2) + r^2 d_2(r^2)]\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2r^2 d_1(r^2)} = E = \mathrm{const}, \qquad /4.3/$$

и, следовательно, принимая во внимание /3.35/ и /3.36/, имеем

$$g\int \frac{[a(r^2) - 2r^2a'(r)]dr}{(a^2 + \eta r^2)\sqrt{2gE - \eta J^2 - J^2\frac{a^2}{r^2}}} = t - t_0. \qquad /4.4/$$

Решая этот интеграл при помощи субституции

$$\frac{a(r^2)}{r} = 2\left(\frac{2gE}{J^2} - \eta\right)\frac{z}{z^2+1}, \qquad /4.5/$$

получаем /если $s_1^2 \neq s_2^2$ /

$$\left(\frac{1}{s_1} - s_1\right)\operatorname{arctg}\frac{z}{s_1} - \left(\frac{1}{s_2} - s_2\right)\operatorname{arctg}\frac{z}{s_2} = \frac{J(s_2^2 - s_1^2)}{2g}(t - t_0) \qquad /4.6/$$

и

$$(1 - s_1^2)\frac{s_1 z}{z^2 + s_1^2} + (1 + s_1^2)\operatorname{arctg}\frac{z}{s_1} = 2s_1^3\frac{J}{2g}(t - t_0) \qquad /4.7/$$

при $s_2^2 = s_1^2$. **Здесь**

$$s_1 = \frac{2gE}{J^2} - \eta + \sqrt{1 + \left(\frac{2gE}{J^2} - \eta\right)^2}, \quad s_2 = \eta - \frac{2gE}{J^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{2gE}{J^2} - \eta\right)^2}. \qquad /4.8/$$

Уравнения /4.5/ и /4.6/ или /4.7/ определяют r как неявную функцию времени t. Замечательно, что благодаря соотношению

$$s_1 s_2 = 1 \qquad /4.9/$$

уравнения /4.6/, /4.7/ можно разрешить в явном виде, получая

$$\frac{1}{r}a(r) = \sqrt{2gE - J^2}\,\sin\left[\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0)\right] \times$$

$$\times\left[2gE\cos^2\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0) + J^2\sin^2\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0)\right]^{-1/2} \qquad /4.10/$$

для $SO(4)$ -симметрии $(\eta = +1)$ и

$$\frac{1}{r}a(r) = \sqrt{2gE + J^2}\,\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0)\right]\left[2gE\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0) + J^2\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2E}{g}}(t - t_0)\right]^{-1/2}$$

$$/4.11/$$

для $SO(3,1)$ -симметрии $(\eta = -1)$. Отметим, что траектории оказываются замкнутыми для $\eta = +1$. Можно подумать, что это проявление лежащей в основе симметрии. Однако было показано [5–7], что каждая динамическая система с N степенями свободы обладает $SO(N+1)$ в качестве группы симметрии. Поэтому мы скорее сказали бы, что замкнутость траектории - следствие того, что реализация группы симметрии в этом случае довольно проста.

Удобно заменить энергию E частотой ω:

$$2E = \eta g\omega^2 \qquad /4.12/$$

в /4.10/, /4.11/ и в последующих выражениях. Отметим, что частота здесь является динамической переменной, а не просто внешним параметром. Два выражения /4.10/ и /4.11/ можно скомбинировать в одно

$$\frac{1}{r}a(r) = \sqrt{\eta(g^2\omega^2 - J^2)}\,\sin\omega(t - t_0)\left[g^2\omega^2\cos^2\omega(t - t_0) + J^2\sin^2\omega(t - t_0)\right]^{-1/2},$$

$$/4.13/$$

где $\omega^2 = 2\eta E/g$ / $2gE \geq J^2$ для $SO(4)$ и $2gE > -J^2$ для $SO(3,1)$/.

Чтобы найти траектории, можно решить дифференциальные уравнения /2.16/ и /2.17/. Выбирая координатную систему так, что $J_3 = 0$, получаем из /2.16/

$$\dot\phi = 0, \qquad \phi = \phi_0 = \text{const}, \qquad /4.14/$$

а /2.17/ принимает вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{r^2}G_1(r^2) = \frac{J}{g}\left[\eta + \frac{a^2(r)}{r^2}\right], \qquad /4.15/$$

Объединяя /4.15/ и /3.4/, имеем

$$J\int\frac{a(r^2) - 2r^2\dfrac{da}{dr^2}}{r^2\sqrt{2gE - \eta J^2 - J^2\dfrac{a^2}{r^2}}}\,dr = \theta - \theta_0, \qquad /4.16/$$

откуда получаем

$$\frac{a(r)}{r} = \frac{1}{J}\sqrt{\eta(g^2\omega^2 - J^2)}\,\sin(\theta - \theta_0). \qquad /4.17/$$

Можно получить тот же результат иным образом, принимая во внимание, что в силу /3.39/ и /3.41/ тождество

$$K_j x_j = |K|\, r\cos(\theta - \theta_0) \qquad /4.18/$$

принимает вид

$$\frac{\eta r^2 + a^2}{a - 2r^2 a'}(xp) = \sqrt{2gH - J^2}\, r\cos(\theta - \theta_0). \qquad /4.19/$$

Тогда, исключая импульсы из него и из выражений

$$G_1(r^2)p^2 + G_2(r^2)(xp)^2 = 2H$$

$$\text{и} \quad r^2p^2 - (xp)^2 = J^2, \qquad /4.20/$$

получаем снова /2.17/.

Из /4.13/ и /4.17/ следует, что

$$\sin(\theta - \theta_0) = J\sin\omega(t-t_0)[g^2\omega^2\cos^2\omega(t-t_0) + J^2\sin^2\omega(t-t_0)]^{-1/2} \qquad /4.21/$$

или

$$\sin\theta = [g\omega\sin\theta_0\cos\omega(t-t_0) - J\cos\theta_0\sin\omega(t-t_0)]\times$$
$$\times[g^2\omega^2\cos^2\omega(t-t_0) + J^2\sin^2\omega(t-t_0)]^{-1/2} \qquad /4.22/$$

Уравнения /4.13/, /4.14/ и /4.22/ вполне определяют движение частицы на /замкнутой/ траектории /4.17/. Движение и траектория зависят от выбора произвольной функции $a(r)$.

Функциями

$$a(r) = \sqrt{g - r^2}, \qquad /4.23/$$

$$a(r) = \sqrt{g}\left(1 - \frac{r^2}{4g}\right), \qquad /4.24/$$

$$a(r) = r\,\mathrm{cotg}\,\frac{r}{\sqrt{g}} \qquad /4.25/$$

пользуются чаще всего в литературе по киральным $SU(2)\times SU(2)$ полевым моделям. Выбор /4.23/ в виде

$$a(r) = \sqrt{g - \eta r^2} \qquad /4.26/$$

в дальнейшем является более удобным. Тогда имеем

$$r = [g\cos^2\omega(t-t_0) + \frac{J^2}{g\omega^2}\sin^2\omega(t-t_0)]^{1/2},$$

$$r\sin = \sqrt{g}\,[\sin\theta_0\cos\omega(t-t_0) - \frac{J}{g\omega}\cos\theta_0\sin\omega(t-t_0)],$$

$$\phi = \phi_0, \qquad /4.27/$$

или в декартовых координатах

$$x_1 = \sqrt{g}\,[\sin\theta_0\cos\phi_0\cos\omega(t-t_0) - \frac{J}{g\omega}\cos\theta_0\cos\phi_0\sin\omega(t-t_0)],$$

$$x_2 = \sqrt{g}\,[\sin\theta_0\sin\phi_0\cos\omega(t-t_0) - \frac{J}{g\omega}\cos\theta_0\sin\phi_0\sin\omega(t-t_0)],$$

$$x_3 = \sqrt{g}\,[\cos\theta_0\cos\omega(t-t_0) + \frac{J}{g\omega}\sin\theta_0\sin\omega(t-t_0)]. \qquad /4.28/$$

Можно записать /4.28/ в бескоординатном виде:

$$\vec{x} = \sqrt{g}\,[\vec{n}\cos\omega(t-t_0) + \frac{J}{g\omega}\vec{\ell}\sin\omega(t-t_0)], \qquad /4.29/$$

где n и ℓ - два единичных ортогональных вектора

$$\vec{n}^2 = 1 = \vec{\ell}^2, \quad \vec{n}\vec{\ell} = 0, \qquad /4.30/$$

с компонентами

$$n_1 = \sin\theta_0\cos\phi_0, \quad \ell_1 = \sin(\theta_0 - \frac{\pi}{2})\cos\phi_0,$$

$$n_2 = \sin\theta_0\sin\phi_0, \quad \ell_2 = \sin(\theta_0 - \frac{\pi}{2})\sin\phi_0,$$

$$n_3 = \cos\theta_0, \quad \ell_3 = \cos(\theta_0 - \frac{\pi}{2}). \qquad /4.31/$$

5. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Мы показали в предыдущем разделе, что в специальном случае /4.26/ решение /4.29/ является суперпозицией двух простых гармонических колебаний. Зная решение x для одного выбора $a(x^2)$, можно построить решение $\tilde{x}$ для каждого другого выбора $\tilde{a}(\tilde{x}^2)$ посредством

$$\tilde{x}_j = x_j \Phi(x^2). \qquad /5.1/$$

Функция $\Phi(x^2)$ удовлетворяет уравнению /3/:

$$\tilde{a}(x^2\Phi(x^2)) = a(x^2)\Phi(x^2). \qquad /5.2/$$

Таким образом, можно воспроизвести решения /4.13/, /4.14/, /4.22/.

Все решения, которые получены в общем случае, как и их специальная форма /4.28/ или /4.29/, зависят только от пяти констант интегрирования: ω, J, t_0, θ_0 и ϕ_0 /а не шести, поскольку мы выбрали $J_3 = 0$ /. В этом разделе мы расширим семейство решений, увеличивая число независимых интеграционных констант до максимального, т.е. до шести.

Прежде чем сделать это, рассмотрим трансформационные свойства x_j при трансформации из группы симметрии. Инфинитезимальные трансформации конфигурационного пространства даются выражением

$$\tilde{x}_j = x_j + \alpha_\ell \{J_\ell, x_j\} + \beta_\ell \{K_\ell, x_j\}, \qquad /5.3/$$

где

$$\{J_\ell, x_j\} = \epsilon_{\ell jn} x_n, \qquad /5.4/$$

$$\{K_\ell, x_j\} = -a(x^2)\delta_{\ell j} - \frac{\eta + 2a(x^2)a'(x^2)}{a(x^2) - 2x^2 a'(x^2)} x_\ell x_j. \qquad /5.5/$$

Каждый элемент X алгебры Ли группы симметрии порождает однопараметрическую подгруппу трансформаций, которые действуют на произвольную динамическую переменную F согласно формуле

$$F \longrightarrow \tilde{F} = e^{\alpha X} * F = F + \frac{\alpha}{1!}\{X, F\} + \frac{\alpha^2}{2!}\{X, \{X, F\}\} + \ldots \qquad /5.6/$$

Трансформации, порожденные J, являются трансформациями вращения:

$$\tilde{x} = e^{\alpha_\ell J_\ell} * x = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x, \qquad /5.7/$$

Здесь $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - матрица пространственных поворотов на углы α_ℓ вокруг трех осей. Применяя эту линейную трансформацию к решениям /4.29/, получаем

$$\tilde{\vec{x}} = R\vec{x} = \sqrt{g}\,[\tilde{\vec{n}}\cos\omega(t-t_0) + \frac{J}{g\omega}\tilde{\vec{\ell}}\sin\omega(t-t_0)], \qquad /5.8/$$

$$\tilde{\vec{n}} = R\vec{n}, \qquad \tilde{\vec{\ell}} = R\vec{\ell}, \qquad /5.9/$$

т.е. желанное шестипараметрическое семейство решений. Действительно, как следствие того факта, что вращения сохраняют соотношение ортогональности и нормировки, /4.3O/ переходит в

$$\tilde{\vec{n}}^2 - 1 = \tilde{\vec{\ell}}^2, \quad \tilde{\vec{n}}\tilde{\vec{\ell}} = 0, \qquad /5.1O/$$

и эти два вектора $\tilde{\vec{n}}$, $\tilde{\vec{\ell}}$, ограниченные соотношениями /5.1O/, добавляют в /5.8/ $6-3=3$ независимых параметра к J, ω и t_0, т.е. общее число независимых параметров становится равным шести.

Можно написать /5.8/ или /4.29/ в виде

$$\vec{x} = \sqrt{g}(\vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t), \qquad /5.11/$$

где

$$\vec{A} = \tilde{\vec{n}}\cos\omega t_0 - \frac{J}{g\omega}\tilde{\vec{\ell}}\sin\omega t_0, \qquad \vec{B} = \tilde{\vec{n}}\sin\omega t_0 + \frac{J}{g\omega}\tilde{\vec{\ell}}\cos\omega t_0 \qquad /5.12/$$

удовлетворяют единственному соотношению

$$\vec{A}^2 + \vec{B}^2 - (\vec{A}\times\vec{B})^2 = 1. \qquad /5.13/$$

Уравнения движения в ньютоновской форме

$$\ddot x^j + \Gamma^j_{mn}\dot x^m \dot x^n = 0, \qquad /5.14/$$

где символы Кристоффеля

$$\Gamma^j_{mn} = \frac{1}{2}\, g^{js}\left(\frac{\partial g_{sn}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s}\right), \qquad /5.15/$$

выражающиеся через $a(x^2)$ следующим образом:

$$\Gamma^j_{mn} = -\frac{\eta+2aa'}{\eta x^2+a^2}(x_m\delta^j_n + x_n\delta^j_m) - \frac{2a'}{a-2x^2a'}\, x^j\delta_{mn} - \frac{4a''}{a-2x^2a'}\, x^j x_m x_n\,, \qquad /5.16/$$

имеют геометрический смысл уравнения геодезических в пространстве постоянной кривизны. Для параметризации /4.26/ символы Кристоффеля упрощаются:

$$\Gamma^j_{mn} = \frac{1}{g}\left[\eta x^j \delta_{mn} + \frac{x^j x_m x_n}{g-\eta x^2}\right], \qquad /5.17/$$

и уравнения движения /5.14/ принимают вид

$$g(g-\eta x^2)\ddot x_j + [\eta(g-\eta x^2)\dot x^2 + (x\dot x)^2]\, x_j = 0. \qquad /5.18/$$

Мы уже знаем, что их решения имеют вид /5.11/, в котором $\vec A$ и $\vec B$ - произвольные векторы, удовлетворяющие /5.13/. Можно проверить непосредственно, что это действительно решение уравнения /5.18/. Чтобы сделать это, отметим, что из /5.11/ всегда следует

$$\ddot{\vec x} = -\omega^2 \vec x \qquad /5.19/$$

и обратно, так что на множестве функций /5.11/ уравнение /5.18/ эквивалентно

$$\eta\, g(\dot x^2 + \omega^2 x^2) - [x^2\dot x^2 - (\vec x\dot{\vec x})^2] = \omega^2 g^2 . \qquad /5.20/$$

Подставляя в это уравнение /5.11/, получаем

$$\eta(\vec A^2 + \vec B^2) - (\vec A\times\vec B)^2 = 1, \qquad /5.21/$$

которое совпадает с /5.13/ в случае $\eta = +1$. В случае $\eta = -1$ как $\vec B$, так и ω должны быть чисто мнимыми.

В заключении этого раздела изучим действие трансформаций, порождаемых $\vec K$, на решения /5.11/, /5.13/ для $\eta = +1$. Из соотношений

$$[\vec\beta\vec K, \sqrt{g-x^2}\,] = \vec\beta\vec x,$$

$$[\vec\beta\vec K, \vec\beta\vec x\,] = -\beta^2\sqrt{g-x^2}, \qquad /5.22/$$

следующих из /5.5/, получается, что /см. определение /5.6//

$$\tilde x_j = e^{\vec\beta\vec K} * x_j = x_j + \left[\frac{\cos\beta-1}{\beta^2}(\vec\beta\vec x) - \frac{\sin\beta}{\beta}\sqrt{g-x^2}\right]\beta_j . \qquad /5.23/$$

Здесь $\vec\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ - параметры трансформации и $\beta = |\vec\beta|$. Подставляя в правую часть /5.23/ решение /5.11/, /5.13/, получаем

$$\tilde{\vec x} = \sqrt{g}\,(\tilde{\vec A}\cos\omega t + \tilde{\vec B}\sin\omega t), \qquad /5.24/$$

где

$$\tilde A_j = A_j + \left[(\vec\beta\vec A)\frac{\cos\beta-1}{\beta^2} - \sqrt{1-\vec A^2}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\right]\beta_j = Q_j(\vec A;\vec\beta),$$

$$\tilde B_j = B_j + \left[(\vec\beta\vec B)\frac{\cos\beta-1}{\beta^2} \pm \sqrt{1-B^2}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\right]\beta_j = Q_j(\vec B;\mp\vec\beta). \qquad /5.25/$$

Функции Q_j определяют нелинейное действие трансформаций, порождаемых $\vec K$, в трехмерном реальном пространстве R^3 векторов $\vec A$, $\vec B$ или в шестимерном пространстве R^6 векторов $(\vec A, \vec B)$. Они удовлетворяют функциональному уравнению

$$Q[Q(\vec A;\vec\beta);\vec\gamma] = Q[\vec A;\vec\kappa(\vec\beta,\vec\gamma)], \qquad /5.26/$$

эквивалентному

$$e^{\vec\gamma\vec K} * (e^{\vec\beta\vec K} * x) = e^{\vec\kappa(\vec\beta,\vec\gamma)K} * x . \qquad /5.27/$$

Нетрудно определить композиционную функцию

$$\vec{a} = \vec{\kappa}(\vec{\beta},\vec{\gamma}) \qquad /5.28/$$

прямо из /5.26/. В результате получаем

$$\pm\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - (\hat{\vec{\beta}}\hat{\vec{\gamma}})\sin\beta\,\sin\gamma\,, \qquad /5.29/$$

$$\hat{\vec{\alpha}}\,\sin\alpha = \hat{\vec{\beta}}\,\sin\beta + \hat{\vec{\gamma}}\,[\sin\gamma\cos\beta + (\hat{\vec{\beta}}\hat{\vec{\gamma}})\sin\beta(\cos\gamma - 1)]\,, \qquad /5.30/$$

где $\hat{\alpha}_j \equiv \alpha_j/\alpha$.

Трансформация

$$(\vec{A},\vec{B}) \xrightarrow{Q} (\tilde{\vec{A}},\tilde{\vec{B}})\,, \qquad /5.31/$$

определенная посредством /5.25/, сохраняет связь /5.13/, наложенную на константы интегрирования

$$\tilde{\vec{A}}^2 + \tilde{\vec{B}}^2 - (\tilde{\vec{A}}\times\tilde{\vec{B}})^2 = 1\,, \qquad /5.32/$$

т.е. решение /5.11/ переходит в решение /5.24/ под действием трансформации /5.23/.

Итак, существует шесть независимых констант движения в рассматриваемой проблеме. Одна из них частота ω /энергия E /. Многообразие остальных пяти - поверхность четвертой степени

$$S: (\vec{A}\vec{B})^2 - \vec{A}^2\vec{B}^2 + \eta\vec{A}^2 + \eta\vec{B}^2 - 1 = 0 \qquad /5.33/$$

в R^6. Частота ω не изменяется при трансформациях группы симметрии $SO(4)$ или $SO(3,1)$, а поверхность /5.33/ отображается на себя.

Можно яснее представить себе картину движения восстановления четвертого измерения векторов $\vec{x}$, $\vec{A}$ и $\vec{B}$. А именно, определим четырехмерные векторы $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ следующим образом:

$$q_j = x_j/\sqrt{g}\,,\quad a_j = A_j\,,\quad b_j = B_j\,,\quad j = 1,2,3$$

$$a^2 = a_0^2 + \eta\vec{a}^2 = 1\,,\quad b^2 = b_0^2 + \eta\vec{b}^2 = 1\,. \qquad /5.34/$$

Тогда поверхность S может быть представлена как многообразие, погруженное в R^8, заданное посредством

$$a^2 = 1\,,\quad b^2 = 1\,,\quad ab = 0. \qquad /5.35/$$

Три координаты q_j изменяются по закону

$$q_j = a_j\cos\omega t + b_j\sin\omega t\,. \qquad /5.36/$$

Вводя дополнительную координату

$$q_0 = a_0\cos\omega t + b_0\sin\omega t\,, \qquad /5.37/$$

получаем движение на единичной сфере /соответственно для $\eta = -1$ – гиперболоиде/:

$$q^2 = q_0^2 + \eta q^2 = 1\,. \qquad /5.38/$$

Последнее равенство следует из /5.35/. Это позволяет нам воспринимать движение /5.10/ как трехмерную проекцию четырехмерного движения /5.36/, /5.37/ на сфере /5.38/.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karloukovski V. JINR, E2-11291, Dubna, 1978.*
2. *Велчев Ч.Й., Еникова М.И., Карлуковски В.И. ОИЯИ, Р2-12020, Дубна, 1978.*
3. *Weinberg S. Phys.Rev., 1968, 166, p.1568.*
4. *Schwinger J. Phys. Lett., 1967, 24B, p.473; Phys. Rev., 1968, 167, p.1432.*
5. *Bacry H., Ruegg H., Souriau J.-M. Comm. Math. Phys., 1967, 3, p.323.*
6. *Fradkin D.M. Progr. Theor. Phys., 1967, 37, p.798.*
7. *Mukunda N. Phys. Rev., 1967, 155, p.1383; J.Math. Phys., 1967, 8, p.2048.*

Рукопись поступила в издательский отдел 1 марта 1979 года.