объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2 - 12175

А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕРИИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

1979

P2 - 12175

А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕРИИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Направлено в ТМФ

Червяков А.М.   Р2 - 12175

Бесконечные серии законов сохранения и групповая структура уравнения Лиувилля

Для двумерного релятивистски-инвариантного уравнения Лиувилля методом обратной задачи рассеяния построены бесконечные серии законов сохранения. Показано, что эти законы являются следствием симметрии рассматриваемого уравнения относительно бесконечного числа однопараметрических групп преобразований, более общих, чем группы Ли. С помощью инфинитезимальных операторов таких групп найдено преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Chervjakov A.M.   P2 - 12175

Infinite Series of Conservation Laws and Group Structure of Luouville Equation

Infinite series of conservation laws for the two-dimensional relativistic Liouville equation are constructed by the inverse scattering method. It is shown that these laws exist due to the symmetry of the considered equation under an infinite number of one-parameter groups which are of a more general type than that dealt with by Lie. The Backlund transformation for the Liouville equation has been obtained by using the infinitesimal operators of these groups.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Целый ряд уравнений, описывающих нелинейные классические поля в двумерном пространстве-времени, обладает бесконечными сериями законов сохранения [1]. В моделях, для которых построена квантовая теория, такие законы запрещают множественное рождение частиц и приводят к факторизации многочастичной матрицы рассеяния [2].

Для нахождения бесконечных серий законов сохранения обычно используется метод обратной задачи рассеяния [3] или же преобразование Бэклунда. Тем не менее важная роль в понимании этих законов отводится изучению свойств симметрии нелинейных уравнений [4,5].

В настоящей работе с помощью метода обратной задачи рассеяния построены бесконечные серии законов сохранения для релятивистски-инвариантного уравнения Лиувилля

$$2\partial_+\partial_-\phi(\mathbf{x}) = R\exp\phi(\mathbf{x}). \qquad /1/$$

где введены переменные светового конуса $x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} = x_{\mp}$, а R - константа, имеющая размерность ℓ^2. Это уравнение имеет солитонные решения, которые в квантовой теории приводят к богатому спектру массивных частиц и резонансов [6].

Свойства симметрии уравнения /1/ исследуются в рамках лагранжева метода, когда уравнение /1/ полностью определяется своей функцией Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \partial_+\phi\,\partial_-\phi + Re^{\phi}. \qquad /2/$$

Каждая сохраняющаяся величина /заряд/ в этой системе генерирует нелинейное инфинитезимальное преобразование поля $\phi(x)$, которое оставляет действие дивергентно-инвариантным. Показано, что такие преобразования образуют бесконечное число однопараметрических групп, более общих, чем группы Ли. Этот результат совпадает с выводами работы [4], в которой методами группового анализа [7] исследовалась симметрия уравнения синус-Гордона. С помощью инфинитезимальных групповых операторов построено преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля.

Таким образом, токи, полученные методом обратной задачи рассеяния, являются нетеровскими токами и соответствуют симметрии уравнения /1/ относительно бесконечного числа однопараметрических групп преобразований.

2. *ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ*

Построение локальных сохраняющихся токов уравнения /1/ в формализме обратной задачи рассеяния основано на представлении этого уравнения в виде

$$\partial_+ L = [L, M], \qquad /3/$$

где операторы L и M выбираются следующим образом

$$L = i\tau_3 \frac{d}{dx^-} - \frac{1}{2}\tau_1 \partial_-\phi, \quad M = -\frac{R}{8k}(i\tau_3 - \tau_1)\exp\phi,$$

а τ_i, $i=0,1,2,3$ - матрицы Паули:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из /3/ следует, что зависимость собственных функций оператора L

$$L\psi = k\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad /4/$$

от эволюционной переменной x^+ имеет вид

$$\partial_+ \psi + M\psi = 0. \qquad /5/$$

Уравнение /4/ связывает функцию $\phi(x)$ с решением спектральной задачи, а уравнение /5/ дает зависимость данных рассеяния от переменной x^+. Восстановление потенциала $\phi(x)$ по набору

данных рассеяния достигается решением обратной задачи для оператора L [3].

Вводя функцию $\omega(x) = \psi_2(x)/\psi_1(x)$, найдем рекуррентные соотношения для бесконечного числа сохраняющихся локальных токов. Подстановка $\omega(x)$ в /4/ и /5/ приводит к уравнениям типа Риккати

$$\partial_-\omega = \frac{i}{2}(\partial_-\phi + 4k\omega + \partial_-\phi\,\omega^2),$$

$$\partial_+\omega = -\frac{R}{8k}(1 + 2i\omega - \omega^2)\exp\phi,$$

которые легко переписать следующим образом:

$$(2ik)(2i\omega\partial_-\phi) = (\partial_-\phi)^2 + \partial_-\phi\,\partial_-\left[\frac{(2i\omega\partial_-\phi)}{\partial_-\phi}\right] - \frac{1}{4}(2i\omega\partial_-\phi)^2, \qquad /6/$$

$$\partial_+(2i\omega\partial_-\phi) = R\left[e^{\phi}\left(\frac{1}{2ik} + \frac{1}{2}\,\frac{(2i\omega\partial_-\phi)}{2ik\partial_-\phi}\right)\right]. \qquad /7/$$

Как обычно, решение уравнения /6/ относительно $2i\omega\partial_-\phi$ можно представить в виде формального ряда по степеням k^{-1} [3]:

$$2i\omega\partial_-\phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{(2ik)^n}, \qquad /8/$$

где коэффициенты $f_n(x)$ вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$f_{n+1} = (\partial_-\phi)^2\delta_{n,0} + \partial_-\phi(f_n/\partial_-\phi) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} f_{n-k}f_k, \; f_0 = 0. \qquad /9/$$

Подстановка разложения /8/ в уравнение /7/ дает бесконечную серию законов сохранения

$$\partial_\mu J_n^{\mu(\nu)} = \partial_+ J_n^{+(\nu)} + \partial_- J_n^{-(\nu)} = 0, \quad \mu,\nu = \{+,-\}, \; n = 1,2,\ldots, \qquad /10/$$

где токи $J_n^{\pm(\nu)}$ имеют вид

$$J_n^{+(\nu)} = f_n, \quad J_n^{-(\nu)} = -Re^{\phi}(\delta_{n,1} + f_{n-1}/2\partial_-\phi), \quad n = 1,2,\ldots.$$

В качестве примера приведем несколько первых токов из бесконечной серии /10/*

---

* Для упрощения записи здесь опущен лоренцевский индекс ν и использованы обозначения $\phi_- = \partial_-\phi$, $\phi^{(3)} = \partial_-^3\phi$.

$$J^+_1 = \phi^2_-, \quad J^-_1 = -R e^{\phi},$$

$$J^+_2 = \frac{1}{2}\partial_-(\phi^2_-), \quad J^-_2 = -\frac{1}{2} R \phi_- e^{\phi},$$

$$J^+_3 = \frac{1}{2}(\phi_- \phi^{(3)} - \frac{1}{4}\phi^4_-), \quad J^-_3 = -\frac{1}{4} R \phi_{--} e^{\phi}, \qquad /11/$$

$$J^+_4 = \partial_-(\phi_- \phi^{(3)} - \frac{1}{2}\phi^2_{--} - \frac{5}{16}\phi^4_-), \quad J^-_4 = -\frac{1}{2} R(\phi^{(3)} - \frac{1}{4}\phi^3_-) e^{\phi},$$

$$J^+_5 = \frac{3}{2}(\phi_- \phi^{(5)} - \frac{7}{4}\phi^3_- \phi^{(3)} - \frac{11}{4}\phi^2_- \phi^2_{--} + \frac{1}{8}\phi^6_-),$$

$$J^-_5 = -\frac{3}{4} R(\phi^{(4)} - \frac{5}{4}\phi^2_- \phi_{--}) e^{\phi}.$$

Переходя в уравнениях /9/, /1O/ от переменных $x^{\pm}$ к $x^{\mp}$: $x^{\pm} \to x^{\mp}$ и учитывая инвариантность уравнения /1/ относительно таких преобразований, получаем еще одну серию законов сохранения

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu(\nu)}_n = \partial_+ \tilde{J}^{+(\nu)}_n + \partial_- \tilde{J}^{-(\nu)}_n = 0, \quad \mu,\nu = \{+,-\}, \; n = 1,2, \ldots , \qquad /12/$$

где

$$\tilde{J}^{+(\nu)}_n = -R e^{\phi}(\delta_{n,1} + \tilde{f}_{n-1} / 2\partial_+\phi), \quad \tilde{J}^{-(\nu)}_n = \tilde{f}_n .$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только законов сохранения /1O/, поскольку основные выражения /см. /17/, /23/ и /29//, полученные в этом случае, при замене $x^{\pm} \to x^{\mp}$ справедливы и для законов /12/.

Из формулы /9/ следует, что токи $J^{+(\nu)}_n$ с четным номером n, n = 2,4, ... , имеют вид производных по $\partial^+ = \partial_-$ от выражений $\Phi_n(\phi_-, \phi_{--}, \ldots)$. Поэтому, налагая граничные условия [6]

$$\phi(x) \to -\infty, \quad \phi_-(x) \to \mp m, \; m > 0, \qquad x \to \pm\infty, \qquad /13/$$

бесконечную последовательность зарядов можно записать следующим образом

$$Q^{(\mu)}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^- J^{+(\mu)}_n, \quad \mu = \{+,-\}, \quad n = 1,3, \ldots . \qquad /14/$$

Сохраняющиеся в силу уравнений непрерывности /1O/ заряды /14/ являются генераторами инфинитезимальных преобразований функции $\phi(x)$

$$\delta^{(\mu)}_n \phi(x) = \{\phi(x), Q^{(\mu)}_n\}^*, \quad n = 1,3, \ldots . \qquad /15/$$

Здесь $\{f, g\}^*$ - скобка Дирака [8], которая заменяет обычную скобку Пуассона при построении гамильтонова формализма на светоподобной плоскости $x^+ = \mathrm{const}$ [9].

Скобки Дирака для канонически-сопряженных переменных $\phi(x)$ и $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial\phi_+$ имеют вид

$$\{\phi(x), \pi(y)\}^*_{x^+ = y^+} = \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-),$$

$$\{\phi(x), \phi(y)\}^*_{x^+ = y^+} = -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-), \quad \{\pi(x), \pi(y)\}^*_{x^+ = y^+} = \frac{1}{2}\delta'(x^- - y^-). \qquad /16/$$

Подставляя токи /11/ в выражение /15/ и используя /16/, находим инфинитезимальные преобразования, нелинейные по $\phi(x)$:

$$\delta^+_2 \phi(x) = \delta^+_4 \phi(x) = \ldots = 0, \quad \delta^+_1 \phi(x) = \phi_- ,$$

$$\delta^+_3 \phi(x) = \frac{1}{2}(\phi^{(3)} - \frac{1}{2}\phi^3_-),$$

$$\delta^+_5 \phi(x) = \frac{3}{2}(\phi^{(5)} - \frac{5}{2}\phi^2_- \phi^{(3)} - \frac{5}{2}\phi_- \phi^2_{--} + \frac{3}{8}\phi^5_-), \ldots . \qquad /17/$$

Преобразования, генерируемые зарядами из бесконечной серии /12/, даются выражениями /17/, где, как обычно, следует перейти от $x^{\pm}$ к $x^{\mp}$.

3. *СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ*

Для установления связи законов сохранения /1O/ с симметрией уравнения Лиувилля /1/ достаточно показать, что действие $S = \int dx \mathcal{L}$ с лагранжианом /2/ строго инвариантно относительно преобразований /17/ или же инвариантно с точностью до дивергенции. В общем случае такая инвариантность из существования законов сохранения не следует [10], поэтому здесь требуется специальное рассмотрение.

Условие дивергентной инвариантности действия S относительно преобразований /17/ имеет вид

$$\delta_n S = \int dx[\delta_n \mathcal{L} + \partial_\alpha(\mathcal{L}\delta_n x\ )] = \int dx \partial_\alpha B_n^\alpha, \quad n = 1,3, \ldots, \qquad /18/$$

где $\delta_n \mathcal{L}$ - вариация формы лагранжиана

$$\delta_n \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta_n \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)}\partial_\alpha \delta_n \phi.$$

Приравнивая в /18/ коэффициенты при независимых параметрах преобразований, получаем, в силу произвольности области интегрирования, следующее условие на лагранжиан /2/:

$$L\delta_n^{(\mu)}\phi + \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\ \phi)}\delta_n^{(\mu)}\phi\right) = \partial_\alpha A_n^{\alpha(\mu)}, \quad n = 1,3, \ldots . \qquad /19/$$

Здесь $A_n^{\alpha(\mu)} = B_n^{\alpha(\mu)} - \mathcal{L}\,\delta_n^{(\mu)} x^\alpha$, а L - лагранжева производная

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)}\right).$$

Если преобразования /17/ удовлетворяют условию /19/, то действие S инвариантно относительно таких преобразований с точностью до дивергенции. Согласно теореме Нетер /11/, в этом случае имеют место законы сохранения, которые можно легко найти из /19/, учитывая уравнение движения $L = 0$:

$$\partial_\alpha \theta_n^{\alpha(\mu)} = 0, \quad n = 1,3, \ldots, \qquad /20/$$

где

$$\theta_n^{\alpha(\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)}\delta_n^{(\mu)}\phi - A_n^{\alpha(\mu)}, \quad n = 1,3, \ldots . \qquad /21/$$

Используя явный вид преобразований /17/, получаем, что условие /19/ выполняется, если $A_n^{\alpha(\mu)}$ выбрать следующим образом:

$$A_1^+ = 0, \quad A_1^- = \mathcal{L},$$

$$A_3^+ = \frac{1}{2}[\partial_-\phi\partial_-^3\phi + (\partial_-^2\phi)^2 - \frac{1}{4}(\partial_-\phi)^4],$$

$$A_3^- = \frac{1}{2}[\partial_+\phi\partial_-^3\phi - 2\partial_+\partial_-\phi\partial_-^2\phi - \frac{1}{2}\partial_+\phi(\partial_-\phi)^3 + R\partial_-^2\phi e^\phi - \frac{1}{2}R(\partial_-\phi)^2 e^\phi],$$

$$A_5^+ = \frac{3}{2}[\partial_-\phi\partial_-^5\phi + 2\partial_-^2\phi\partial_-^4\phi + (\partial_-^3\phi)^2 - \frac{5}{6}(\partial_-\phi)^3\partial_-^3\phi + \frac{1}{4}(\partial_-\phi)^6], \qquad /22/$$

$$A_5^- = \frac{3}{2}[\partial_+\phi\partial_-^5\phi - 2\partial_+\partial_-\phi\partial_-^4\phi - 2\partial_-^2\phi\partial_+\partial_-^3\phi - \frac{5}{2}\partial_+\phi\partial_-^3\phi(\partial_-\phi)^2 -$$
$$- \frac{5}{2}\partial_+\phi\partial_-\phi(\partial_-^2\phi)^2 + \frac{3}{8}\partial_+\phi(\partial_-\phi)^5 - \frac{5}{3}(\partial_-\phi)^3\partial_+\partial_-\phi] +$$
$$+ \frac{3}{2}Re^\phi[\partial_-^4\phi - \partial_-\phi\partial_-^3\phi + \frac{1}{2}(\partial_-^2\phi)^2 + \frac{3}{8}(\partial_-\phi)^4 - \frac{3}{2}(\partial_-\phi)^2\partial_-^2\phi], \ldots .$$

Подстановка /17/ и /22/ в /21/ дает бесконечное число сохраняющихся токов

$$\theta_1^+ = \phi_{--}^2, \quad \theta_1^- = -Re^\phi,$$

$$\theta_3^+ = \frac{1}{2}[\phi_-\phi^{(3)} - \frac{1}{4}\phi_-^4 - \partial_-(\phi_-\phi_{--})],$$

$$\theta_3^- = -\frac{1}{4}R\phi_{--}e^\phi + \frac{1}{4}R\partial_-(\phi_- e^\phi),$$

$$\theta_5^+ = \frac{3}{2}[\phi_-\phi^{(5)} - \frac{7}{4}\phi_-^3\phi^{(3)} - \frac{11}{4}\phi_-^2\phi_{--}^2 + \frac{1}{8}\phi_-^6 - \partial_-(\phi_-\phi^{(4)} +$$
$$+ \phi_{--}\phi^{(3)} - \frac{1}{12}\phi_-^3\phi_{--})],$$

$$\theta_5^- = -\frac{3}{4}Re^\phi(\phi^{(4)} - \frac{5}{4}\phi_-^2\phi_{--}) + \frac{3}{4}R\partial_-(e^\phi(\phi_-\phi_{--} + \phi^{(3)} + \frac{11}{12}\phi_-^3)), \qquad /23/$$

..., которые отличаются от токов /11/ лишь выражениями, имеющими вид полных производных по $\partial_+ = \partial_-$ и приводят, с учетом граничных условий /13/, к тем же самым зарядам /14/.

Таким образом, законы сохранения /10/, полученные методом обратной задачи рассеяния, являются нетеровскими законами и соответствуют инвариантности действия S, а следовательно, и уравнения Лиувилля /1/, относительно бесконечного числа дивергентных преобразований /17/.

Перейдем к рассмотрению групповой структуры преобразований /17/. Используя скобки Дирака /16/, для зарядов /14/ получаем следующую алгебру:

$$\{Q_n^{(\mu)}, Q_m^{(\nu)}\}^* = 0, \quad n,m = 1,3, \ldots, \qquad /24/$$

то есть рассматриваемые преобразования образуют бесконечное число однопараметрических групп. Соответствующие инфиинтезимальные операторы $X_n^{(\mu)}$, как обычно [7,12], определяются соотношениями

$$\delta_n^{(\mu)}\phi(x) = X_n^{(\mu)}\cdot\phi(x), \quad n = 1,3, \dots ,$$

и являются дифференциальными операторами первого порядка по $\phi(x)$

$$X_n^{(\mu)} = \eta_n^{(\mu)}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad n = 1,3, \dots . \qquad /25/$$

Здесь координаты $\eta_n^{(\mu)} = \delta_n^{(\mu)}\phi(x) = \{\phi(x), Q_n^{(\mu)}\}^*$, определяемые выражениями /17/, нелинейно зависят от производных $\eta_n^{(\mu)} = \eta_n^{(\mu)}(\phi_{-}, \phi_{--}, \dots)$, причем степени производных растут с увеличением номера n. Этим свойством преобразования /17/ отличаются от преобразований, образующих непрерывные группы Ли, где координаты являются функциями только x и ϕ [7,12]. Обобщение непрерывных групп Ли на случай зависимости координат от производных любого порядка и их применение к изучению дифференциальных уравнений рассматривались в работе [13].

Явный вид операторов /25/ позволяет построить конечное преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля, которое не удовлетворяет групповым требованиям. Такое преобразование непрерывно зависит от параметра a и переходит в тождественное при $a = 0$:

$$\phi(x) \to \tilde{\phi}(x) = \Phi(x, a), \quad \Phi(x,0) = \phi(x).$$

Пусть $\Phi(x, a)$ - аналитическая вместе со своими производными функция в окрестности точки $a = 0$. Тогда разложение $\Phi(x, a)$ в ряд Тейлора по a дает

$$\tilde{\phi}(x) = (1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}D_n)\phi(x). \qquad /26/$$

Здесь операторы D_n можно выразить через инфинитезимальные групповые операторы X_n следующим образом [4]:

$$D_n = n!\cdot\sum\frac{X_1^{q_1}}{(p_1!)^{q_1}(q_1!)}\cdots\frac{X_s^{q_s}}{(p_s!)^{q_s}(q_s!)}. \qquad /27/$$

Сумма в /27/ берется по всем наборам целых чисел p_i, q_i, $i = 1,\dots,s$, таким, что

$$\sum_{i=1}^{s}p_i q_i = n, \ 1 \le p_1 < p_2 < \dots < p_s \le n, \ 1 \le q_i, \ i = 1, \dots, s.$$

Подстановка /25/ в /27/ приводит к операторам D_n вида

$$D_1 = \partial_-, \quad D_2 = \partial_-^2, \quad D_3 = \frac{3}{2}(\partial_-^3 - \frac{1}{6}\phi_-^2\partial_-),$$

$$D_4 = 3(\partial_-^4 - \phi_-^2\partial_-^2), \quad D_5 = \frac{15}{2}(\partial_-^5 - \frac{3}{2}\phi_-^2\partial_-^3 - \frac{5}{2}\phi_{--}^2\partial_- + \frac{3}{40}\phi_-^4\partial_-), \dots, \qquad /28/$$

а разложение /26/ дает преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля /1/. Дифференцируя ряд /26/ сначала по ∂_+, а затем по ∂_- и учитывая уравнение /1/, это преобразование можно записать в компактной форме

$$\tilde{\phi}_+ = \phi_+ + \frac{1}{2}R a\exp\frac{1}{2}(\tilde{\phi} + \phi),$$

$$\tilde{\phi}_- = -\phi_- + \frac{4}{a}\mathrm{sh}\frac{1}{2}(\tilde{\phi} - \phi). \qquad /29/$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что преобразование /29/ оставляет инвариантным уравнение Лиувилля /1/.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Симметрия уравнения Лиувилля /1/ относительно однопараметрических групп преобразований /17/ приводит к бесконечным сериям законов сохранения /10/ и является условием полной интегрируемости этого уравнения. Действительно, в силу того, что заряды /14/ образуют абелеву алгебру /24/, всегда можно найти каноническое преобразование от исходных переменных $\phi(x)$ и $\pi(x)$ к новым канонически-сопряженным переменным $\tilde{\phi}(x)$ и $\tilde{\pi}(x)$, в которых преобразования /17/ принимают линейный вид [5,12]. Таким каноническим преобразованием служит метод обратной задачи рассеяния, а переменные $\tilde{\phi}(x)$ и $\tilde{\pi}(x)$ являются переменными типа "действие-угол" для рассматриваемой гамильтоновой системы. Однако следует отметить, что явно такие переменные для уравнения Лиувилля /1/ не найдены.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Б.М.Барбашова, В.К.Мельникова, Е.А.Иванова, А.Б.Пестова и особенно В.В.Нестеренко за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott A.C., Chu F.Y., McLaughlin D.W. In: Proc. of the IEEE,1973,61,p.1443. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. "Мир", М., 1977.
2. Кулиш П.П. ТМФ, 1976, 26, с.198; Кулиш П.П., Нисимов Е.Р. Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, с.247.
3. Фаддеев Л.Д. Современные проблемы математики, 1974, 3, с.93.
4. Kumei S. Journ.Math.Phys., 1975, 16, p.2461.
5. Конопельченко Б.Г. ЯФ, 1977, 26, с.658; 1978, 28, с.527.
6. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. JINR, E2-11669,Dubna, 1978.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. "Наука", М., 1978.
8. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике. "Мир", М., 1968; Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C. Constrained Hamiltonian Systems, Princeton Preprint, 1975.
9. Dirac P.A.M. Rev.Mod.Phys., 1949, 21, p.392.
10. Ибрагимов Н.Х. ТМФ, 1969, 1, с.350.
11. Нетер Э. В сб.: Вариационные принципы механики. Физматгиз, М., 1959; Bessel-Hagen E. Math.Ann., 1921, 84, p.258; Hill E.L. Rev.Mod.Phys., 1951, 23, p.353.
12. Lie S. Differentialgreichungen, Chelsea, New York, 1967; Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. ИЛ, М., 1947.
13. Andreson R.L., Kumei S., Wulfman C.E. Phys.Rev.Lett., 1972, 15, p.988.

Рукопись поступила в издательский отдел 12 января 1979 года.