сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна





Р2 - 12152

Н.Б.Скачков

# ТРЕХМЕРНАЯ ФОРМА КОВАРИАНТНОГО ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ФЕРМИОНОВ

1979

P2 - 12152

Н.Б.Скачков

# ТРЕХМЕРНАЯ ФОРМА КОВАРИАНТНОГО ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ФЕРМИОНОВ

Скачков Н.Б. P2 - 12152

Трехмерная форма ковариантного эффективного гамильтониана взаимодействия двух фермионов

Работа посвящена вопросам описания динамики системы двух релятивистских частиц. Целью работы является развитие трехмерного ковариантного формализма, внешне максимально близкого к аппарату нерелятивистской квантовой механики. Для построения релятивистского гамильтониана взаимодействия двух фермионов используются фейнмановские матричные элементы однобозонного обмена, которые путем применения геометрии Лобачевского преобразованы от четырехмерной к ковариантной трехмерной форме. В отличие от преобразования Фолди–Вотхойзена рассмотренное преобразование не связано с разложением релятивистских выражений по степеням $v^2/c^2$. С помощью разложения по унитарным представлениям группы Лоренца определен вид эффективного гамильтониана в релятивистском конфигурационном представлении. Найденный вид гамильтониана взаимодействия двух фермионов будет необходим для ковариантного описания в рамках квазипотенциального подхода NN- и $N\bar{N}$-взаимодействий, а также электромагнитных формфакторов дейтрона и мезонов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Skachkov N.B. P2 - 12152

Three Dimensional Form of Covariant Effective Hamiltonian of Two Fermion Interaction

Dynamics of a system of two relativistic particles is studied. The purpose is to develop the three-dimensional covariant formalism which in form is similar to that of the nonrelativistic quantum mechanics. The relativistic Hamiltonian of two fermion interaction is constructed on the basis of Feynman matrix elements of the one-boson exchange which are transformed through the use of the Lobachevsky geometry, from the four- to three-dimensional covariant form. In contrast to the Foldy-Wouthuysen representation, the considered representation has nothing to do with the expansion in powers of $v^2/c^2$. By using the expansion over unitary representation of the Lorentz group we define the effective Hamiltonian in the relativistic configurational representation. The Hamiltonian of two-fermion interaction obtained will be used for the covariant description of $N\bar{N}$-interactions, and deuteron and meson electromagnetic form factors.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979



## §1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящую работу можно рассматривать как развитие работ /1,2/ по трехмерной параметризации релятивистских "потенциалов" однобозонного обмена, представляющих собою матричные элементы релятивистской амплитуды рассеяния двух фермионов. Такие потенциалы однофотонного /одномезонного или одноглюонного/ обмена, взятые в низшем приближении по степеням $v^2/c^2$, широко используются для описания взаимодействия в таких двухчастичных системах, как позитроний /3/ и чармоний /4/, а также NN- /5/ и $N\bar{N}$ /6/ -взаимодействий.

В работе /1/ было показано, что фейнмановские матричные элементы однобозонного обмена между двумя фермионами представляют собою не что иное, как трехмерное геометрическое обобщение импульсного представления широко известных в ядерной физике релятивистских потенциалов однобозонного обмена (OBEP)*. Это обобщение эквивалентно замене эвклидовой величины полупередачи импульса $\vec{\kappa} = \vec{q}/2 = (\vec{p}-\vec{k})/2$ /см. /1/ / на ее аналог в трехмерном импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на верхней поле массового гиперболоида

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2. \qquad /1.1/$$

Полученные релятивистские трехмерные выражения по форме близки к нерелятивистским. При этом трехмерные спиновые структуры релятивистских OBEP имеют тот же вид, что и нерелятивистские структуры, построенные с помощью $\vec{\sigma}$-матриц.

* OBEP – One bozon exchage potentials.

Таким образом, предложенное в [1] преобразование выполняет ту же роль, что и преобразование Фолди-Вотхойзена /переход к трехмерному описанию спина/, но в отличие от последнего не связано с разложением членов взаимодействия в ряд по степеням $v^2/c^2$.

Необходимо отметить, что в [1] преобразование матричных элементов релятивистской амплитуды рассеяния к трехмерной форме было осуществлено лишь для одной специальной системы координат - системы центра инерции двух фермионов. Цель настоящей работы - обобщить полученный в [1] результат на произвольную систему координат, т.е. найти трехмерную ковариантную форму эффективного гамильтониана для системы двух фермионов. Такой аппарат будет необходим для формулировки ковариантного трехмерного квазипотенциального уравнения для системы двух фермионов, аналогичного тому, которое было получено в [7] для двух скалярных частиц.

План нашего изложения таков. В §2 будут приведены необходимые для дальнейшего определения некоторых величин из пространства Лобачевского. В §3 рассмотрены случаи обмена псевдоскалярным мезоном* и векторным бозоном. В §4 будет найден вид эффективного гамильтониана взаимодействия двух фермионов в релятивистском конфигурационном представлении в произвольной системе координат /в отличие от [2], где рассмотрен лишь случай с.ц.и./.

## §2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Известно, что все формулы релятивистской кинематики, в том числе и релятивистский закон сложения скоростей, могут быть получены путем замены эвклидовой геометрии трехмерного пространства скоростей на геометрию Лобачевского [8,9]. Так, в специальной теории относительности скорость двух частиц, движущихся со скоростями $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_k$,

---

*Случай обмена скалярным мезоном разобран в [7].



$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \frac{\vec{v}_p - \vec{v}_k - \left[1-\left(1-\frac{\vec{v}_k^{\,2}}{c^2}\right)^{-1/2}\right]\frac{\vec{v}_k}{\vec{v}_k^{\,2}}\left(\vec{v}_p\vec{v}_k - \vec{v}_k^{\,2}\right)}{\left(1-\frac{\vec{v}_k^{\,2}}{c^2}\right)\cdot\left(1-\vec{v}_p\vec{v}_k\right)}, \qquad /2.1/$$

с геометрической точки зрения представляет собой разность двух векторов $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_k$ в пространстве Лобачевского [8-12].

В релятивистской теории, где энергия частицы $p_0$ выражается через импульс $\vec{p}$ по формуле /1.1/, трехскорость определяется соотношением $\vec{v}_p = \vec{p}/p_0$.

На поверхности /1.1/ можно вводить различные системы координат. Мы выберем в качестве координат в пространстве Лобачевского декартовы координаты вектора $\vec{p}$ на гиперплоскости $p_0 = 0$, на которую отображается гиперболоид при проектировании из точки $(\infty, \vec{0})$. Таким образом, моделью импульсного пространства Лобачевского теперь будет служить все трехмерное $\vec{p}$-пространство с метрикой*

$$ds^2 = d\vec{p}^{\,2} - \frac{(\vec{p}\,d\vec{p})^2}{m^2 + \vec{p}^{\,2}} \equiv g_{ik}(p)\,dp^i\,dp^k$$

и элементом объема

$$d\Omega_p \equiv \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{1+\vec{p}^{\,2}/m^2}} = \frac{d^3\vec{p}}{m^{-1}p_0}.$$

В нерелятивистском пределе $(c\to\infty)$ кривизна гиперболоида стремится к нулю и пространство Лобачевского переходит в обычное плоское трехмерное эвклидово пространство импульсов. При этом $d\Omega_p \to d^3\vec{p}$, $ds^2 \to d\vec{p}^{\,2}$. Группой движений пространства Лобачевского, реализованного на гиперболоиде /1.1/, является группа Лоренца. Чисто лоренцевские преобразования $L_{\lambda_k}$ /"бусты"/ **, такие, что $L_{\lambda_k}(m, 0) = (k_0^\circ, \vec{k})$,

---

*В дальнейшем, где это не требуется, для наглядности мы будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

** Элементы матрицы $L^{-1}_{\lambda_k}$ зависят лишь от компонент 4-вектора скорости частицы $\lambda^\mu_k = k^\mu/m$.

$$\overrightarrow{L^{-1}_{\lambda_k} p} \equiv \vec{p}(-)\vec{k} = \vec{\Delta}_{p,k} = \vec{p} - \frac{\vec{k}}{m}\left(p_0 - \frac{\vec{p}\vec{k}}{m+k_0}\right), \qquad /2.2/$$

$$(L^{-1}_{\lambda_k} p)^{\circ} \equiv (p(-)k)^{\circ} = \Delta^{\circ}_{p,k} = \frac{p_0 k_0 - \vec{p}\vec{k}}{m} = \sqrt{m^2 + (\vec{p}(-)\vec{k})^2}, \qquad /2.3/$$

в нерелятивистском пределе переходят в преобразования трансляции в плоском эвклидовом пространстве $\vec{p}\,(-)\,\vec{k} \to \vec{p} - \vec{k}$. В сферических координатах

$$p_0 = m\,\mathrm{ch}\,\chi_p, \quad \vec{p} = m\vec{n}_p\,\mathrm{sh}\,\chi_p, \quad \vec{n}_p = \vec{p}/|\vec{p}|;$$
$$k_0 = m\,\mathrm{ch}\,\chi_k, \quad \vec{k} = m\vec{n}_k\,\mathrm{sh}\,\chi_k, \quad \vec{n}_k = \vec{k}/|\vec{k}| \qquad /2.4/$$

равенство /2.3/ принимает вид теоремы о косинусе сложного угла в тригонометрии Лобачевского [8-12]:

$$\mathrm{ch}\,\chi_{pk} = \sqrt{1 + \frac{(\vec{p}\,(-)\vec{k})^2}{m^2}} = \mathrm{ch}\,\chi_p \mathrm{ch}\,\chi_k - \mathrm{sh}\,\chi_p \mathrm{sh}\,\chi_k \vec{n}_p \vec{n}_k. \qquad /2.5/$$

Вектор $\vec{\Delta}_{p,k} = \vec{p}(-)\vec{k}$ может рассматриваться как релятивистское геометрическое обобщение вектора передачи импульса $\vec{p} - \vec{k}$ и является разностью двух векторов в импульсном пространстве Лобачевского. Действительно, используя определение 3-скорости релятивистской частицы $\vec{v}_k = \vec{k}/k_0$, $\vec{v}_p = \vec{p}/p_0$ из /2.2/, легко показать, что

$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \frac{\vec{\Delta}_{p,k}}{\Delta^{\circ}_{p,k}} = \frac{\vec{p}(-)\vec{k}}{(p\,(-)\,k)^{\circ}},$$

где знак (-) означает операцию вычитания векторов в пространстве Лобачевского [13]. С помощью /2.2/ и /2.3/ легко проверить, что квадрат 4-вектора передачи импульса выражается через вектор $\vec{\Delta} = \vec{p}(-)\vec{k}$ следующим образом [13]:

$$t = (p-k)^2 = 2m^2 - 2pk = 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + (\vec{p}(-)\vec{k})^2}. \qquad /2.6/$$



В пространстве скоростей, которое является пространством Лобачевского [8-12], важную роль играет понятие полускорости частицы, предложенное в [14]. В [1] были определены аналогичные по смыслу величины: полуимпульс частицы

$$\pi_p = (\pi^{\circ}_p, \vec{\pi}_p) = m(\mathrm{ch}(\chi_p/2), \ \vec{n}_p\,\mathrm{sh}(\chi_p/2)), \quad \vec{n}_p = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \qquad /2.7/$$

и полупередача $\vec{\kappa}$, которая вводится следующим образом:

$$\kappa_0 = m\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_\Delta}{2}\right) = m\sqrt{\frac{\Delta_0 + m}{2m}}; \qquad \Delta_0 = m\,\mathrm{ch}\,\chi_\Delta;$$
$$\vec{\kappa} = \vec{n}_\Delta\, m\,\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_\Delta}{2}\right) = \vec{\Delta}\sqrt{\frac{m}{2(\Delta_0+m)}}; \quad \vec{\Delta} = \vec{n}_\Delta m\,\mathrm{sh}\,\chi_\Delta. \qquad /2.8/$$

Соотношение /2.6/ в терминах вектора полупередачи импульса $\vec{\kappa}$ принимает "абсолютный" вид

$$t = (k-p)^2 = -4\vec{\kappa}^2, \qquad /2.9/$$

так как в нерелятивистском пределе /когда $\vec{\pi}_p \to \vec{\pi}_{p\,э} = \vec{p}/2$, а $\vec{\kappa} \to \vec{\kappa}_э = (\vec{k}-\vec{p})/2$ / оно переходит в нерелятивистское соотношение

$$t = (k-p)^2 = -4\vec{\kappa}^2 \to -(\vec{k}-\vec{p})^2 = -4\vec{\kappa}^2_э, \qquad /2.10/$$

не меняя своей формы /см. обсуждение в [1] /. Напомним теперь некоторые положения кинематики системы двух релятивистских частиц *. ВФ системы двух фермионов в целом зависят от восьми переменных: полной массы системы M и ее полного импульса $\vec{\mathcal{P}}$ [15]:

$$M^2 = \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu; \quad \mathcal{P}_\mu = (p_1 + p_2)_\mu; \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2; \qquad /2.11/$$

полного собственного момента J системы и его проекции, также орбитального момента $\ell$ и суммарного спина s, которые обычно задаются в с.ц.и. Переход от с.ц.и. к произвольной системе ко-

---

* Мы будем рассматривать случаи фермионов с равными массами: $m_1 = m_2 = m$.

ординат осуществляется путем перехода к ковариантно определенному 3-вектору импульса частицы в с.ц.и. [15] /см. также [16,17] /

$$\overset{\circ}{\vec p}_1 = \overrightarrow{(L^{-1}_{\lambda_{\mathcal P}}\, p_1)} = \vec p_1 - \frac{\vec{\mathcal P}}{M}\left(p^{\circ}_1 - \frac{(\vec{\mathcal P}\vec p_1)}{\mathcal P_0 + M}\right). \qquad /2.12/$$

Трехвектор $\overset{\circ}{\vec p}_1$ совпадает с пространственной компонентой 4-вектора

$$(\Delta_{p_1,\, m\lambda_{\mathcal P}})^{\mu} = (L^{-1}_{\lambda_{\mathcal P}}\, p_1)^{\mu},$$

принадлежащего гиперболоиду /1.1/. В соответствии с обозначением /2.2/ 3-вектор $\vec\Delta_{p_1,\, m\lambda_{\mathcal P}}$ можно представить в виде неэвклидовой разности двух векторов $\vec p$ и $m\vec\lambda_{\mathcal P}$

$$\overset{\circ}{\vec p} = \vec\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}} \equiv \vec p_1 (-) m\vec\lambda_{\mathcal P}, \qquad /2.13/$$

принадлежащих одному гиперболоиду/1.1/ [18]. Квадрат 3-вектора передачи импульса из пространства Лобачевского $\vec\Delta^2_{p_1,k_1} = (\vec p_1 (-) \vec k_1)^2$ является лоренцевским инвариантом. Действительно, с использованием /2.3/ можно записать

$$\vec\Delta^2_{p_1,k_1} \equiv [\vec p_1 (-) \vec k_1]^2 = \frac{(p^{\mu}_1 \cdot k_{1\mu})^2}{m^2} - m^2 =$$

$$/2.14/$$

$$= \left[\frac{(\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}})^{\mu} \cdot (\Delta_{k_1, m\lambda_{\mathcal P}})_{\mu}}{m}\right]^2 - m^2 = [\vec\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}} (-) \vec\Delta_{k_1, m\lambda_{\mathcal P}}] \equiv \overset{\circ}{\vec\Delta}{}^2_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1},$$

где через $\overset{\circ}{\vec\Delta}_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1}$ мы будем обозначать разность /в пространстве Лобачевского/ двух ковариантно определенных импульсов $\overset{\circ}{\vec p}_1$- и $\overset{\circ}{\vec k}_1$ -частиц в с.ц.и. Отметим, что согласно определению /2.12/-/2.13/ $\vec\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}} = -\vec\Delta_{p_2, m\lambda_{\mathcal P}}$ ,так что

$$\overset{\circ}{\vec\Delta}_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1} = -\overset{\circ}{\vec\Delta}_{\overset{\circ}{p}_2, \overset{\circ}{k}_2} \equiv -\{\vec\Delta_{p_2, m\lambda_{\mathcal P}} (-) \vec\Delta_{k_2, m\lambda_{\mathcal P}}\} = \overset{\circ}{\vec\Delta}_{\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{k}}. \qquad /2.15/$$

В терминах соответствующей полупередачи импульса будем иметь



$$\overset{\circ}{\vec\kappa}_1 = \vec\kappa_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1} \equiv \{\vec\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}} (-) \vec\Delta_{k_1, m\lambda_{\mathcal P}}\} \cdot \sqrt{\frac{m}{2[m + (\vec\Delta_{p_1, m\lambda_{\mathcal P}} ; \Delta_{k_1, m\lambda_{\mathcal P}})^{\circ}]}} \equiv$$

$$\equiv \overset{\circ}{\vec\Delta}_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1} \cdot \sqrt{\frac{m}{2[m + (\overset{\circ}{\Delta}_{\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{k}_1})^{\circ}]}} = -\overset{\circ}{\vec\kappa}_2 = \overset{\circ}{\vec\kappa}.$$

В этих обозначениях выражение для инвариантного пропагатора принимает "абсолютный" вид:

$$[\mu^2 - (p_1 - k_1)^2]^{-1} = [\mu^2 + 4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2]^{-1},$$

т.е. отличается от заданного в импульсном представлении /в с.ц.и. системы двух частиц $\vec k_1 = -\vec k_2 = \vec k$ ; $\vec p_1 = -\vec p_2 = \vec p$ / потенциала Юкавы лишь неэвклидовой природой величины $\overset{\circ}{\vec\kappa}$.

## §3. ТРЕХМЕРНАЯ КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА ФЕЙНМАНОВСКИХ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

В настоящем разделе матричные элементы релятивистской амплитуды однобозонного обмена между двумя фермионами будут преобразованы от стандартной четырехмерной формы к ковариантной трехмерной.

Матричный элемент релятивистской амплитуды рассеяния, отвечающий обмену псевдоскалярным мезоном между двумя фермионами с импульсами $\vec p_1$, $\vec p_2$ и поляризациями $\sigma_1$, $\sigma_2$ до рассеяния и $\vec k_1$, $\vec k_2$; $\sigma_1'$, $\sigma_2'$ соответственно после рассеяния, имеет вид:

$$\langle \vec p_1 \sigma_1, \vec p_2 \sigma_2 | T^{(2)}_{PS} | \vec k_1 \sigma_1', \vec k_2 \sigma_2' \rangle =$$

$$= g^2 \frac{\bar u^{\sigma_1}(\vec p_1)\gamma_5 u^{\sigma_1'}(\vec k_1) \cdot \bar u^{\sigma_2}(\vec p_2)\gamma_5 u^{\sigma_2'}(\vec k_2)}{\mu^2 - (p_1 - k_1)^2}. \qquad /3.1/$$

Входящий в /3.1/ биспинор $u(p_1)$ можно выразить через биспинор в системе покоя по формуле

$$u^{\sigma}(\vec{p}_1) = S(p_1)u^{\sigma}(0) = S(\mathcal{P})\,S^{-1}(\mathcal{P})S(p_1)u^{\sigma}(0). \qquad /3.2/$$

**Матрицы $S(\mathcal{P})$ и $S(p_1)$ отвечают чистым преобразованиям Лоренца и зависят от соответствующих полускоростей**

$$S(\mathcal{P}) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0 + M}{2M}}\left(1 + \frac{\vec{a}\vec{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}_0 + M}\right), \quad \vec{a} = \gamma_0\vec{\gamma}. \qquad /3.3/$$

**Чисто лоренцевские преобразования $\Lambda(\mathcal{P})$ не образуют группы. Их произведение не есть, вообще говоря, чисто лоренцевское преобразование на результирующий вектор, а содержит еще вигнеровское вращение $V(\Lambda_{\mathcal{P}}, k)$, определенное равенством**

$$S^{-1}(p)\cdot S(k) = S(\Lambda_p^{-1}\cdot k)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \otimes \mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_p, k)\}.$$

**В соответствии с этим формулу /3.2/ можно представить в виде**

$$u^{\sigma}(\vec{p}_1) = S(\mathcal{P})\cdot S(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{P}}})\cdot \mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\mathcal{P}}, p_1)\}u^{\sigma}(0) \qquad /3.4/$$

**и соответственно**

$$\bar{u}^{\sigma_1}(\vec{p}_1)\gamma_5 u^{\sigma_1'}(\vec{k}_1) = \bar{u}^{\sigma_1}(0)\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, p_1)\}\times$$
$$\times S^{-1}(\Delta_{p_1,m\lambda\mathcal{P}})\cdot S^{-1}(\mathcal{P})\gamma_5 S(\mathcal{P})\cdot S(\Delta_{k_1,m\lambda\mathcal{P}})\,\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, k_1)\}u^{\sigma_1'}(0). \qquad /3.5/$$

**Вигнеровские вращения $\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, p)\}$ в /3.5/ осуществляют "пересадку" спиновых индексов $\sigma_1$ и $\sigma_1'$ [19] с импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{k}_1$ на суммарный импульс $\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ /см. обсуждение в [1] /. В силу зависимости матрицы $S(\vec{\mathcal{P}})$ от $\vec{a}$ она переставима с $\gamma_5$-матрицей, в результате чего мы имеем**

$$\bar{u}^{\sigma_1}(\vec{p}_1)\gamma_5 u^{+\sigma_1'}(\vec{k}_1) = \bar{u}^{\sigma_1}(0)\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, p_1)\}\times$$
$$\times\gamma_5\cdot S(\mathring{\Delta}_{\mathring{p}_1,\mathring{k}_1})\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\Delta_{k_1,m\lambda\mathcal{P}}}, \Delta_{p_1,m\lambda\mathcal{P}})\}\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, k_1)\}u^{\sigma_1'}(0), \qquad /3.6/$$

**где дополнительная функция**

$$\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_{k_1,m\lambda\mathcal{P}}, \Delta_{p_1,m\lambda\mathcal{P}})\}$$



**переходит в фигурирующую в параметризации амплитуды в с.ц.и.** [1] **функцию $\mathfrak{D}^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_k, p)\}$. Далее, следуя результатам работы** [1]**, выражение для амплитуды /3.1/ перепишем в виде**

$$<\vec{p}_1\sigma_1;\vec{p}_2\sigma_2|T^{(2)}_{PS}|\vec{k}_1\sigma_1';\ \vec{k}_2\sigma_2'> =$$
$$= \Sigma\,\mathfrak{D}^{1/2+}_{\sigma_1\sigma_{1\mathcal{P}}}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, p_1)\}\cdot\mathfrak{D}^{1/2+}_{\sigma_2\sigma_{2\mathcal{P}}}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, p_2)\}\times$$
$$\times <\vec{p}_1\sigma_{1\mathcal{P}};\vec{p}_2\sigma_{2\mathcal{P}}|T^{(2)}_{PS}|\vec{k}_1\sigma_1'';\vec{k}_2\sigma_2''>\times$$
$$\times\mathfrak{D}^{-1/2}_{\sigma_1''\sigma_{1\mathcal{P}}'}\{V^{-1/2}(\Lambda_{\Delta_{k_1,\lambda\mathcal{P}}}, \Delta_{p_1,\lambda_0})\}\cdot\mathfrak{D}^{1/2}_{\sigma_2''\sigma_{2\mathcal{P}}'}\{V^{-1}(\Lambda_{\Delta_{k_2,\lambda\mathcal{P}}}, \Delta_{p_2,\lambda\mathcal{P}})\}\times$$
$$\times\mathfrak{D}^{-1/2}_{\sigma_{1\mathcal{P}}'\sigma_1'}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, k_1)\}\cdot\mathfrak{D}^{-1/2}_{\sigma_{2\mathcal{P}}'\sigma_2'}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal{P}}, k_2)\}, \qquad /3.7/$$

**где оставшийся после выделения вигнеровских вращений матричный элемент***

$$<\vec{p}_1,\sigma_{1\mathcal{P}};\vec{p}_2\sigma_{2\mathcal{P}}|T^{(2)}_{PS}|\vec{k}_1\sigma_1'';\vec{k}_2\sigma_2''> =$$
$$= -4g^2\frac{(\vec{\sigma}_1\mathring{\vec{\kappa}})_{\sigma_{1\mathcal{P}}\sigma_1''}\cdot(\vec{\sigma}_2\mathring{\vec{\kappa}})_{\sigma_{2\mathcal{P}},\sigma_2''}}{\mu^2 + 4\mathring{\vec{\kappa}}^2}, \qquad /3.8/$$

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\kappa})_{\sigma_1\sigma_2} = \xi^{*\sigma_1}(\vec{\sigma}_1\vec{\kappa})\xi_{\sigma_2}$$

**имеет "абсолютный" вид /см.** [14] **/ и зависит лишь от одного вектора полупередачи импульса $\mathring{\vec{\kappa}}$. Это обстоятельство будет существенно для построения в следующем параграфе из /3.8/ локального в релятивистском конфигурационном представлении квазипотенциала в произвольной системе координат.**

**Обратимся теперь к случаю обмена векторным бозоном с массой $\mu$. Соответствующий матричный элемент имеет вид**

---

*$\bar{u}^{\sigma}(0) = \sqrt{m}(\xi^*_{\sigma}, \xi^*_{\sigma})$, **где** $\xi_{\sigma}$ **- двухкомпонентные паулиевские спиноры /см.** [1] **/.**

$$<\vec p_1\sigma_1;\vec p_2\sigma_2\,|\,T_V^{(2)}\,|\,\vec k_1\sigma_1';\vec k_2\sigma_2'> =$$

$$= g^2\,\frac{\bar u^{\sigma_1}(\vec p_1)\gamma_\mu u^{\sigma_1'}(\vec k_1)\cdot\bar u^{\sigma_2'}(\vec p_2)\gamma^\mu u^{\sigma_2'}(\vec k_2)}{\mu^2-(p_1-k_1)^2}. \qquad /3.9/$$

После последовательных преобразований /3.2/ и /3.4/, применения равенства

$$S^{-1}(\mathcal P)\,\gamma_\mu S(\mathcal P) = (\Lambda_{\lambda\mathcal P})_\mu^{\ \nu}\cdot\gamma_\nu \qquad /3.10/$$

и полученной в [1] формулы / $W^\mu(\Delta)$ - вектор релятивистского спина Паули-Любанского-Широкова [15, 19], I - единичная 4x4 матрица/

$$S^{-1}(\Delta_{k,m\lambda\mathcal P})\cdot\gamma_\mu\cdot S(\Delta_{k,m\lambda_0}) = \frac{\gamma_0}{m}\{I\cdot\Delta^\mu_{k,m\lambda\mathcal P}+2\gamma_5W^\mu(\Delta_{k,m\lambda\mathcal P})\}$$

$$/3.11/$$

получаем аналогичное /3.6/ соотношение

$$\bar u^{\sigma_1}(\vec p_1)\gamma_\mu u^{\sigma_1'}(\vec k_1) = (\Lambda_{\lambda\mathcal P})_\mu^{\ \nu}\cdot\mathfrak D^{1/2}_{\sigma_1\sigma_{1\mathcal P}}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal P},p)\}\times$$

$$\times\,\xi^{+\sigma_{1\mathcal P}}\{2(\Delta_{p_1,m\lambda\mathcal P})_\nu\,\overset{\circ}{\kappa}{}^\circ+4W_\nu(\Delta_{p_1,m\lambda\mathcal P})(\vec\sigma_1\overset{\circ}{\vec\kappa})\}\xi_{\sigma_1''}\times \qquad /3.12/$$

$$\times\,\mathfrak D^{1/2}_{\sigma_1''\sigma_{1\mathcal P}'}\{V^{-1}(\Lambda_{\Delta_{k_1,\lambda\mathcal P}},\Delta_{p_1,m\lambda\mathcal P})\}\cdot\mathfrak D^{1/2}_{\sigma_{1\mathcal P}'\sigma_1'}\{V^{-1}(\Lambda_{\lambda\mathcal P},k_1)\}.$$

Далее, следуя [1], в результате подстановки /3.12/ в /3.9/ получаем для /3.9/ то же самое выражение /3.7/, где оставшийся после выделения вигнеровских вращений матричный элемент $T_V^{(2)}$ имеет вид

$$T_V^{(2)}(\overset{\circ}{\vec\kappa},\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}) = -g_V^2\frac{4m^2}{\mu^2+4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2} - g_V^2\frac{4(\vec\sigma_1\overset{\circ}{\vec\kappa})(\vec\sigma_2\overset{\circ}{\vec\kappa})-4(\vec\sigma_1\vec\sigma_2)\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2}{\mu^2+4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2} -$$

$$-\,g_V^2\frac{8\overset{\circ}{\kappa}_0\Delta^\circ_{p,m\lambda\mathcal P}}{m^2}\;\frac{i(\vec\sigma_1+\vec\sigma_2)[\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}\times\overset{\circ}{\vec\kappa}]}{\mu^2+4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2} -$$



$$-\,g_V^2\frac{8}{m^2}\;\frac{(\Delta^\circ_{p,m\lambda\mathcal P})^2\cdot(\overset{\circ}{\kappa}_0)^2+2\Delta^\circ_{p,m\lambda}\cdot(\overset{\circ}{\kappa}_0)\cdot(\overset{\circ}{\vec p}\,\vec\kappa)-m^4}{\mu^2+4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2} -$$

$$-\,g_V^2\frac{8}{m^2}\;\frac{(\vec\sigma_1\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P})(\vec\sigma_1\overset{\circ}{\vec\kappa})(\vec\sigma_2\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P})(\vec\sigma_2\overset{\circ}{\vec\kappa})}{\mu^2+4\overset{\circ}{\vec\kappa}{}^2}. \qquad /3.13/$$

При выводе /3.13/ мы воспользовались соотношениями

$$\Lambda_\mu^{\ \alpha}(\mathcal P)(\overset{\circ}{p}_1)_\alpha\cdot\Lambda^\mu_{\ \beta}(\mathcal P)(\overset{\circ}{p}_2)^\beta = (\overset{\circ}{p}_1)_\mu\cdot(\overset{\circ}{p}_2)^\mu = m(\overset{\circ}{p}_2(-)\overset{\circ}{p}_1)^\circ; \qquad /3.14/$$

$$\Lambda^\alpha_\mu(\mathcal P)(\overset{\circ}{p}_1)_\alpha\cdot\Lambda^\mu_\beta(\mathcal P)W_2^\beta(\overset{\circ}{p}_2) = (\overset{\circ}{p}_1)_\mu\cdot W_2^\mu(\overset{\circ}{p}_2) =$$

$$= (\overset{\circ}{p})_0(\vec\sigma_2\overset{\circ}{\vec p}) \equiv (\Delta_{p,m\lambda\mathcal P})^\circ\cdot(\vec\sigma_2\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}); \qquad /3.15/$$

$$\Lambda^\alpha_\mu(\mathcal P)(\overset{\circ}{p}_2)_\alpha\cdot\Lambda^\mu_\beta(\mathcal P)W_1^\beta(\overset{\circ}{p}_1) = (\overset{\circ}{p}_2)_\mu\cdot W_1^\mu(\overset{\circ}{p}_1) = (\Lambda^{-1}_{\overset{\circ}{p}_1}\overset{\circ}{p}_2)_\mu\cdot W_1^\mu(0) =$$

$$= -(\overset{\circ}{\vec p})_0(\vec\sigma_1\overset{\circ}{\vec p}) \equiv -(\Delta_{p,m\lambda\mathcal P})^\circ\cdot(\vec\sigma_1\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}); \qquad /3.16/$$

$$\Lambda^\mu_\alpha(\mathcal P)W_1^\alpha(\overset{\circ}{p}_1)\cdot\Lambda^\beta_\mu(\mathcal P)W_{2\beta}(\overset{\circ}{p}_2) = W_1^\mu(\overset{\circ}{p}_1)\cdot W_{2\mu}(\overset{\circ}{p}_2) =$$

$$= -(\overrightarrow{\Lambda^{-1}(p_2)W_1(p_1)})\cdot\frac{m\vec\sigma_2}{2} = -\frac{m^2}{4}(\vec\sigma_1\vec\sigma_2)-\frac12(\vec\sigma_1\overset{\circ}{\vec p})(\vec\sigma_2\overset{\circ}{\vec p}) \qquad /3.17/$$

и тем фактом, что для векторов $\vec\Delta_{p_1,m\lambda\mathcal P}\equiv\overset{\circ}{\vec p}_1$ и $\vec\Delta_{p_2,m\lambda\mathcal P}\equiv\overset{\circ}{\vec p}_2$ /являющихся ковариантно определенными векторами импульсов первой и второй частицы в с.ц.и. /2.13// выполняется соотношение

$$\vec\Delta_{p_1,m\lambda} = -\vec\Delta_{p_2,m\lambda} = \overset{\circ}{\vec p}\equiv\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}.$$

Выражение /3.13/ отличается от аналогичного, полученного в с.ц.и. в [1], лишь заменой вектора импульса частицы в с.ц.и. $\vec p$ на его ковариантное обобщение - вектор $\overset{\circ}{\vec p}=\vec\Delta_{p,m\lambda\mathcal P}$ /2.13/.

## §4. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В работе [13] было предложено переход к конфигурационному представлению осуществлять с помощью функций, образующих полную систему в пространстве Лобачевского, т.е. на поверхности массового гиперболоида /1.1/. Такие функции были получены на основе работы [20] в [21] и имеют /в обозначениях [13]/ вид

$$\xi(\vec{\Delta}_{p,k}, \vec{r}) = \left[\frac{(\Delta_{p,k})_\mu n^\mu}{m}\right]^{-1-irm}, \quad n_\mu = (1, \vec{n}), \quad \vec{n}^2 = 1, \quad \vec{r} = r\vec{n}. \qquad /4.1/$$

Функции /4.1/ реализуют основную серию унитарных неприводимых представлений группы Лоренца как группы движений пространства Лобачевского и отвечают следующим собственным значениям оператора Казимира группы Лоренца $\hat{C}_Л = \frac{1}{4} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$

$$/M_{\mu\nu} = p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \text{ - генераторы } SO/3.1//:$$

$$\hat{C}_Л \xi(\vec{\Delta}_{p,k}, \vec{r}) = \left(\frac{1}{m^2} + r^2\right) \xi(\vec{\Delta}_{p,k}, \vec{r}). \qquad /4.2/$$

В нерелятивистском пределе $\vec{\Delta}_{p,k} = \vec{p}(-)\vec{k} \to \vec{q} = \vec{p} - \vec{k}; \xi(\vec{\Delta}, \vec{r}) \to e^{i\vec{q}\vec{r}}$.

Групповой параметр $r$ в [13] было предложено рассматривать как релятивистское обобщение модуля относительной координаты. При этом, если мы будем согласно [7] совершать преобразование выражений /3.8/ и /3.13/ к определенному таким образом "релятивистскому конфигурационному представлению" с функциями $\xi(\vec{\Delta}_{\Delta_{p_1, m\lambda\mathcal{P}}, \Delta_{k, m\lambda\mathcal{P}}}, \vec{r})$, то "релятивистская координата" $r$ будет сопряжена вектору передачи в пространстве Лобачевского /2.14/, /2.15/ $\vec{\Delta}_{\Delta_{p,m\lambda\mathcal{P}}, \Delta_{k,m\lambda\mathcal{P}}} \equiv \vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}$, модуль которого есть релятивистский инвариант $|\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}| = inv.$ Модуль же "релятивистской относительной координаты" $r$ тоже есть инвариант, поскольку он согласно /4.2/ нумерует собственные значения инвариантного оператора Казимира группы Лоренца. Как показано в [7], при лоренцевских преобразованиях $L$ "релятивистская относительная координата" $\vec{r}$ претерпевает лишь вращение /вигнеровский поворот/



$$(\vec{r}')_j \equiv [\overrightarrow{(L r)'}]_j = R_{ji}\{V^{-1}(L^{-1}, \mathcal{P})\}(r)_i. \qquad /4.3/$$

После преобразования

$$V^{(2)}_{PS,V}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^{(3)}\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}}{(\mathring{\Delta}_{\mathring{p},\mathring{k}})_0} \cdot \xi(\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}, \vec{r}) \cdot V_{PS,V}(\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}; \vec{\mathring{p}}), \qquad /4.4/$$

где $V^{(2)}(\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}; \mathring{p})$ определяется, так же как и амплитуда /3.8/, /3.13/:

$$\langle \vec{p}_1, \sigma_{1\mathcal{P}}; \vec{p}_2 \sigma_{2\mathcal{P}} | T^{(2)}_{PS,V} | \vec{k}_1 \sigma'_1; \vec{k}_2 \sigma'_2 \rangle =$$

$$= \overset{+}{\xi}{}^{\sigma_{1\mathcal{P}}} \overset{+}{\xi}{}^{\sigma_{2\mathcal{P}}} V^{(2)}(\vec{\mathring{\Delta}}_{\mathring{p},\mathring{k}}; \vec{\mathring{p}}) \xi^{\sigma'_1} \xi^{\sigma'_2},$$

мы находим для выражений /3.8/ и /3.13/ представления

$$V^{(2)}_{PS}(\vec{r}) = \frac{4m^2 g^2_{PS}}{4m^2 - \mu^2} (\vec{\sigma}_1 \vec{\nabla}_{разн.})(\vec{\sigma}_2 \vec{\nabla}_{разн.}) \left(1 - \frac{1}{2ch(rma)}\right) V^{рел.}_{юк}(\vec{r}), \qquad /4.5/$$

$$V^{(2)}_V(\vec{r}) = -4g^2_V m^2 V^{рел.}_{юк}(\vec{r}) -$$

$$-4g^2_V \frac{2m^2}{4m^2 - \mu^2} \{(\vec{\sigma}_1 \vec{\nabla}_{разн.})(\vec{\sigma}_2 \vec{\nabla}_{разн.}) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\nabla}_{разн.})^2\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{2ch(rma)}\right) V^{рел.}_{юк}(\vec{r}) + g^2_V \frac{p_0}{m} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)[\vec{\Delta}_{p,m\lambda} \times \vec{\nabla}_{разн.}] \cdot V^{рел.}_{юк}(r) -$$

$$- \frac{8g^2_V}{m} \frac{\{(\vec{\Delta}^\circ_{p,m\lambda\mathcal{P}})(\hat{H}_0 + m) + 2(\vec{\Delta}^\circ_{p,m\lambda}(\vec{\Delta}_{p,m\lambda\mathcal{P}}; \vec{\nabla}_{разн.}) - 2m^3\}}{} \cdot V^{рел.}_{юк}(r) +$$

$$+\frac{8g_V^2}{m^2}\,\frac{2m^2}{4m^2-\mu^2}[(\vec{\sigma}_1\vec{\Delta}_{p,m\lambda\wp})(\vec{\sigma}_1\vec{\nabla}_{\text{разн.}})\cdot(\vec{\sigma}_2\vec{\Delta}_{p,m\lambda\wp})(\vec{\sigma}_2\vec{\nabla}_{\text{разн.}})]\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{\operatorname{ch}(rma)}\right]V^{\text{рел.}}_{\text{юк}}(r), \qquad /4.6/$$

где оператор $\vec{\nabla}_{\text{разн.}}$ связан с оператором импульса $\hat{\vec{P}}$ /явный вид приведен в [22] /

$$\hat{\vec{P}}\xi(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}\,\xi(\vec{p},\vec{r}) \qquad /4.7/$$

формулой $\vec{\nabla}_{\text{разн.}} = i\hat{\vec{P}}$ и является конечно-разностным аналогом оператора $\vec{\nabla} = -i\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$:

$$\vec{\nabla}e^{i\vec{p}\vec{r}} = \vec{p}\,e^{i\vec{p}\vec{r}} .$$

Оператор $\hat{H}_0$ ,

$$\hat{H}_0 = 2m\operatorname{ch}\left(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{2i}{r}\operatorname{sh}\left(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{mr^2}e^{\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}} , \qquad /4.8/$$

играет роль свободного гамильтониана в квазипотенциальном уравнении и определяется с помощью "релятивистских плоских волн $\xi(\vec{\Delta},\vec{r})$" /4.1/ соотношением

$$\hat{H}_0\,\xi(\vec{\Delta},\vec{r}) = 2\Delta_0\,\xi(\vec{\Delta},\vec{r}). \qquad /4.9/$$

Через $V^{\text{рел.}}_{\text{юк}}(r)$ обозначен найденный в [13] релятивистский аналог потенциала Юкавы

$$V^{\text{рел.}}_{\text{юк}}(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r}\cdot\dfrac{\operatorname{ch} rma}{\operatorname{sh} rm\pi} & \text{при} \quad \mu^2 < 4m^2,\ a = \arccos\dfrac{\mu^2-2m^2}{2m^2}, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi r}\cdot\dfrac{\cos rmb}{\operatorname{sh} rm\pi} & \text{при} \quad \mu^2 > 4m^2,\ b = \operatorname{Arch}\dfrac{\mu^2-2m^2}{2m^2}, \end{cases} \qquad /4.10/$$

который в нашем случае является релятивистски-инвариантной величиной.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдено ковариантное обобщение на случай произвольной системы координат полученных ранее [1,2] в с.ц.и. выражений для гамильтониана взаимодействия двух фермионов в приближении однобозонного обмена. Вид такого релятивистского "потенциала" однобозонного обмена (OBEP) установлен без обращения к разложению по степеням $v^2/c^2$ или пренебрежения эффектами запаздывания. Полученные в импульсном представлении выражения имеют вид трехмерного обобщения на геометрию Лобачевского нерелятивистских эвклидовых выражений. Структура ковариантных OBEP не изменяется по сравнению с найденными в [1] для с.ц.и. выражениями, что достигается благодаря переходу к ковариантно определенному вектору импульса частицы в с.ц.и. /2.12/, введенному впервые в [15]. Развитый здесь формализм будет необходим для ковариантного описания формфакторов дейтрона и мезонов, представляющих собой систему, составленную из двух фермионов.

Автор благодарен В.Г.Кадышевскому, А.В.Сидорову и И.Л.Соловцову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Скачков Н.Б. ОИЯИ, Е2-7159, Дубна, 1973; ОИЯИ, Е2-7333, Дубна, 1973; ТМФ, 1975, 22, с.213.*
2. *Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып. 1, с.5.*
3. *Соколов А.А. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, М., 1957; Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиз, М., 1960; Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.Н., Питаевский А.П. Релятивистская квантовая теория, ч.I, Физматгиз, М., 1968.*
4. *De Rujula A. et al. Phys. Rev., 1975, D12, p.147; Barbieri R. et al., CERN-2036, TH, 1975; Schnitzer H.I. Phys. Rev., 1976, D13, p.74; Kang I.S., Schnitzer H.I. Phys. Rev., 1975, D12, p.841, 2791.*
5. *Бабиков В.В. ЯФ, 1965, 2, с.326; Nucl.Phys., 1966, 76, p.665.*
6. *Шапиро И.С. Взаимодействие антинуклонов с нуклонами и ядрами. Конспекты лекций в МИФИ. Изд. МИФИ, М., 1972.*
7. *Skachkov N.B., Solovtsov I.L. JINR, E2-11678, Dubna, 1978.*

8. Клейн Ф. О геометрических основаниях лоренцевой группы. В кн.: Новые идеи в математике, вып. 5, СПБ, 1909, с.144.
9. Котельников А.П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В сб.: In memorium N.I.Lobatchevskij, т. 2, Изд. КГУ, Казань, 1927, с.37-64.
10. Черников Н.А. ОИЯИ, Р-723, Дубна, 1961.
11. Фок В.А. Теория пространства, времени, тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
12. Смородинский Я.А. ЖЭТФ, 1962, 43, с.2217; АЭ, 1963, 14, с.110; Лекция в сб.: "Вопросы физики элементарных частиц", т.3. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1963.
13. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, 55A, p.233; ЭЧАЯ, 1972, т.2, с.635.
14. Черников Н.А. Научные доклады высшей школы, 1958, 2, 158; НДВШ, 1959, 5, с.151; ЖЭТФ, 1957, 33, с.541; Школа теоретической физики при ОИЯИ, т.3, Дубна, 1964, с.151; ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып. 3, с.733.
15. Широков Ю.М. ЖЭТФ, 1951, 21, с.748; 1937, 33, с.1198. 1958, 35, с.1005.
16. MacFarlane J.S. Rev.Mod. Phys., 1962, 34, p.41.
17. Faustov R.N. Ann.Phys., 1973, 78, p.176.
18. Виноградов В.М. ТМФ, 1972, 7, с.338.
19. Чешков А.А., Широков Ю.М. ЖЭТФ, 1963, 44, с.1982.
20. Гельфанд И.М., Наймарк М.А. Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 110, с.411.
21. Шапиро И.С. ДАН СССР, 1956, 106, с.647.
22. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Фриман М. ЯФ, 1969, 9, с.646.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1978 года.