сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2 - 12136

Л.Г.Заставенко

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН СПИНОРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1979

P2 - 12136

Л.Г.Заставенко

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН СПИНОРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Заставенко Л.Г. Р2 - 12136

Калибровочно-инвариантный гамильтониан спинорной квантовой электродинамики

Рассматривается спинорная электродинамика. Цель работы - доказать градиентную инвариантность функции Лагранжа и гамильтониана, получаемых путем исключения скалярной и продольной компонент вектор-потенциала из исходной функции Лагранжа. Исключение лишних компонент вектор-потенциала производится с помощью классических уравнений движения, вытекающих из исходной функции Лагранжа. В результате доказанной градиентной инвариантности результирующего гамильтониана снимаются связанные с градиентной инвариантностью возражения против высказанного нами утверждения, что неперенормированный заряд в электродинамике может принимать лишь некоторое определенное значение (или дискретный набор значений).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zastavenko L.G. P2 - 12136

Gauge-Invariant Hamiltonian of the Spinor Quantum Electrodynamics

The spinor electrodynamics is considered. The aim is to prove the gauge invariance of the Coulomb Hamiltonian, which is obtained through the exclusion of the longitudinal and scalar components of the vector-potential. The exclusion is produced with the help of classical equations of motion, which follow from the initial Lagrangian. Our proof of the resulting Hamiltonian gauge-invariance removes based on gauge invariance objections against our preceeding work, where we state the condition, which determines the admissible values of the nonrenormalized charge in quantum electrodynamics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. Спинорная электродинамика определяется лагранжианом

$$\mathcal{L}(A,\Psi) = \mathcal{L}_{ph}(A) + \mathcal{L}_e(\Psi) + \mathcal{L}_1(A,\Psi), \qquad /1/$$

$$\mathcal{L}_{ph}(A) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, \qquad /2/$$

$$\mathcal{L}_e(\Psi) = -\bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^* \gamma_4, \qquad /3/$$

$$\mathcal{L}_1(A,\Psi) = e A_\mu J_\mu, \qquad /4/$$

$$J_\mu = i\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi; \qquad /5/$$

здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1,2,3,4, а латинские - 1,2,3; $x_4 = it$, $A_4 = iA_0$, $J_4 = iJ_0$; по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. Из /1/-/5/ следуют уравнения Эйлера

$$\partial_\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + eJ_\mu = 0, \qquad /6/$$

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\Psi = 0, \qquad /7/$$

$$-(\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\Psi}\gamma_\mu + m\bar{\Psi} = 0. \qquad /8/$$

Из /7/, /8/, в частности, вытекает закон сохранения заряда

$$\partial_\mu J_\mu = 0 . \qquad /9/$$

1.1. Лагранжиан /2/ не зависит от $\partial A_0/\partial t$, поэтому квантование рассматриваемой модели по каноническому рецепту ($\pi_\mu = \partial \mathfrak{L} / \partial \dot{A}_\mu, \mu=0,1,2,3$) невозможно. В этом случае полагается исключить из лагранжиана лишнюю функцию (A_0) с помощью уравнений движения /6/.

1.2. Именно по этому пути мы и пойдем /в отличие, например, от книги Венцеля[1] /§17//. На этом пути наиболее ясно проявляется указанное в заглавии работы свойство результирующего гамильтониана - его калибровочная инвариантность.

1.3. Действительно, функция Лагранжа /1/-/5/ не меняется при калибровочном преобразовании

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} , \qquad /10/$$

$$\Psi \to \Psi' = \Psi e^{ie\Lambda} , \qquad /11/$$

$$\mathfrak{L}(A, \Psi) = \mathfrak{L}(A', \Psi'). \qquad /12/$$

1.3.1. Результирующий гамильтониан /35/ зависит не от функций A_μ и Ψ, а от полученных из них по правилам /15/, /27/ и /31/, /31а/ функций A_j^{tr} и η.

При преобразовании /10/, /11/ функции A_j^{tr}, η согласно формулам /27/ и /31/, /31а/ не меняются.

1.4. Таким образом, гамильтониан /35/, действительно, не меняется при калибровочных преобразованиях /10/, /11/.

1.5. Результат настоящей работы - доказательство калибровочной инвариантности данного в[1] гамильтониана спинорной электродинамики - существен потому, что в работе[2] нами

показано, что рассмотрение спинорной электродинамики методом[1] с необходимостью приводит к одному или нескольким значениям неперенормированной константы связи e: рассмотрение спинорной электродинамики методом[1] при произвольно взятом значении неперенормированной константы связи приводит, вообще говоря, к физически бессмысленному результату /бесконечная масса фотона/. Настоящая работа снимает возражения против результата[2], связанные с градиентной инвариантностью.

1.6. Именно, работа[2] основана на рассмотрении квадратично расходящейся части обратного оператора распространения фотона. Именно условием отсутствия этой части определяются допустимые значения неперенормированной константы e. Между тем распространено мнение, что эта часть должна исчезать в силу калибровочной инвариантности. Из вида /35/ калибровочно-инвариантного гамильтониана, однако, следует, что в низшем порядке $\sim e^2$ квадратично-расходящаяся поправка к оператору распространения фотона не исчезает.

1.7. Упомянутый выше результат в спинорной электродинамике связан с тем, что в этой модели запрещен член перенормировки массы фотона. Аналогичный результат имеет место и в других вариантах электродинамики и в модели Янга-Миллса, поскольку в этих моделях тоже запрещена перенормировка массы фотона. /Этот результат имеет место и в модели с лагранжианом

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_a}\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g\phi^4 ,$$

если считать параметр m не зависящим от параметра обрезания $\ell(\ell \to \infty)$/.

1.8. Полученное нами после исключения продольной и скалярной составляющих электромагнитного поля выражение гамильтониана /35/ совпадает с приведенным в §17 книги Венцеля[1]. Отметим, что данный в[1] вывод гамильтониана /35/ содержит дефект: он игнорирует присутствие в разложении /15/ последнего члена $\frac{1}{\sqrt{V}} A_{00}$. В нашем выводе этот дефект устранен.

1.9. В формализме конечного объема периодичности функция Лагранжа /19/, рассматриваемая как функция переменной A_{00} /см. /15//, не имеет экстремума:

$$\frac{\partial L(A,\ )}{\partial A_{00}} = -e\frac{1}{\sqrt{V}}\int \Psi^{x}(x,t)\Psi(x,t)\,dx < 0\,.$$

Так как $\partial L / \partial \dot{A}_{00} = 0$, то уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_{00}} = \frac{\partial L}{\partial A_{00}}$$

дает противоречие:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\int \Psi\ (x,t)\,\Psi\,(x,t)\,dx = 0\,.$$

1.9.1. От этого противоречия мы уходим следующим способом: мы считаем функцию $A_{00}(t)$ заданной функцией времени и не включаем ее в число обобщенных координат, по которым производится варьирование при выводе уравнений Эйлера. В дальнейшем преобразованием /31а/ удается устранить $A_{00}(t)$ из функции Лагранжа.

§2. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ И СКАЛЯРНОЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА

2. Для квантования рассматриваемой модели введем обычным образом объем периодичности V,

$$V:\quad -L/2 < x_i < L/2,\qquad i = 1,2,3\,. \qquad /13/$$

Тогда будет:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Psi_k(t)\,e^{i\vec{k}\vec{x}}\,, \qquad /14/$$

$$A_\mu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\neq 0} A_{\mu k}(t)\,e^{ikx} + \frac{\delta_{\mu 4}}{\sqrt{V}}A_{00}(t)\,i\,, \qquad /15/$$

где суммирование проводится по значениям k,

$$k = 2\pi(n_1, n_2, n_3)/L, \qquad /16/$$

здесь n_1, n_2, n_3 - целые числа.

Пусть также

$$J_\mu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k J_{\mu k}(t)\,e^{ikx}\,. \qquad /17/$$

2.1. В формулах /10/, /11/ следует принять:

$$\Lambda(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Lambda_k(t)\,e^{ikx}\,. \qquad /18/$$

Тогда формулы /10/ примут вид:

$$\vec{A}_k(t) \to \vec{A}'_k(t) = \vec{A}_k(t) + i\vec{k}\Lambda_k(t)\,, \qquad /10а/$$

$$A_{k0}(t) \to A'_{k0}(t) = A_{k0}(t) - \dot{\Lambda}_k(t)\,. \qquad /10б/$$

Последний член в формуле /10а/ исчезает при $k = 0$ в отличие от последнего члена формулы /10б/. Именно поэтому в /15/, не входя в противоречие с градиентной инвариантностью, можно не учитывать вклад от $A_{j0}(t)$ при $j = 1,2,3$, но необходимо учесть вклад от $A_{00}(t)$.

2.2. Подставив /15/, /17/ в/1/, получим

$$L(A,\Psi) = \int \mathfrak{L}\,d^3x = L_{ph_1}(A) + L_{ph_2}(A) + L_{11}(A,\Psi) + L_{12}(A,\Psi) +$$

$$+ L_e(\Psi)\,, \qquad /19/$$

где

$$L_{ph1}(A) = -\frac{1}{2}\sum_{k,s,j}\left[k_s^2 A_{j,k}(t)A_{j,-k}(t) - k_s A_{s,k}(t)\,k_j A_{j,-k}(t)\right], \qquad /19а/$$

$$L_{ph2}(A) = \frac{1}{2}\sum_{j,k\neq 0}\left[\dot{A}_{j,k} + ik_j A_{0,k}(t)\right]\left[\dot{A}_{j,-k}(t) - ik_j A_{0,-k}(t)\right], \qquad /19б/$$

$$L_{11}(A,\Psi) = +e\sum_{k\neq 0,j} A_{j,k}(t)\,J_{j,-k}(t)\,, \qquad /19в/$$

$$L_{12}(A,\Psi) = -e\sum_{k\neq 0} A_{0,k}(t)\,J_{0,-k}(t) - e\,A_{00}(t)J_{00}(t)\,, \qquad /19г/$$

$$L_e(\Psi) = \int \mathfrak{L}_e(\Psi)\,d^3x\,. \qquad /19д/$$

Варьируя полученное выражение по $A_{j,k}(t)$, $A_{0,k}(t)$, ψ и $\bar{\psi}$, получим уравнения Эйлера:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+k^2\right)A_{s,k}(t)+k_s\,k_j\,A_{j,k}(t)-ik_s\,\dot{A}_{0,k}(t)+e\,J_{0,k}(t)=0, \qquad /20/$$

$$k_s^2\,A_{0,k}(t)-ik_s\,\dot{A}_{s,k}(t)=e\,J_{0,k}(t), \qquad /21/$$

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)+m]\Psi=0, \qquad /22а/$$

$$\gamma_\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)\bar{\Psi}\gamma_\mu-m\bar{\Psi}=0. \qquad /22б/$$

2.3. Уравнение /21/ при $k=0$ дает противоречие, ибо правая часть его при $k=0$ положительна

$$\left(J_{00}(t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\int\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)\,d^3x>0\right),$$

а левая часть при $k=0$ исчезает.

2.3.1. /С уравнением /20/ аналогичного противоречия не возникает: из нашего выбора $A_{j0}=0$ и формул /19а/, /19в/ следует, что в /20/ $k\neq 0$ /.

2.4. Чтобы уйти от этого противоречия, мы не будем считать функцию $A_{00}(t)$ в /19г/ вариационным параметром и будем искать минимум действия только по переменным $A_{\mu,k}$, $k\neq 0$.

Вследствие этого уравнения Эйлера у нас будут отличаться от уравнений Максвелла: вместо /6/ у нас будет

$$\partial_\nu\partial_\nu\tilde{A}_\mu-\partial_\mu\partial_\nu\tilde{A}_\nu+e\left[J_\mu(x,t)-\frac{1}{\sqrt{V}}J_{\mu,0}(t)\right]=0, \qquad /6а/$$

где

$$\tilde{A}_\mu(x,t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\neq 0}A_{\mu,k}(t)\,e^{ikx}.$$

Ясно, что конкретный выбор функции $A_{0,0}(t)$ никак не влияет на физические поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{E}=-\dot{\vec{A}}-\operatorname{grad}A_0,$$

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}. \qquad /23/$$

2.5. Итак, в уравнениях /21/ следует принять $k\neq 0$. Тогда находим из /21/

$$A_{0,k}(t)=[eJ_{0,k}(t)+ik_s\,\dot{A}_{s,k}(t)]/k^2, \qquad k\neq 0. \qquad /24/$$

Подставнв этот результат в формулы /19в/, /19б/, получим

$$L_{12}=-e^2\sum_{k\neq 0}\frac{J_{0,k}(t)\,J_{0,-k}(t)}{k^2}-ie\sum_{k\neq 0}\frac{k_s\,\dot{A}_{s,k}(t)}{k^2}J_{0,-k}(t)-eA_{00}(t)J_{00}(t), \qquad /25/$$

$$L_{ph2}=\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}[\dot{A}^{tr}_{s,k}(t)+iek_s\,J_{0,k}(t)/k^2]\,[\dot{A}^{tr}_{s,-k}(t)-iek_s\,J_{0,-k}(t)/k^2]. \qquad /26/$$

Здесь

$$A^{tr}_{s,k}(t)=A_{s,k}(t)-\frac{k_s\,k_j}{k^2}A_{j,k}(t), \qquad k\neq 0, \qquad /27/$$

так что

$$A^{tr}_{s,k}(t)\,k_s=0. \qquad /28/$$

2.5.1. Поэтому формулу /26/ можно переписать в виде

$$L_{ph2}=\frac{1}{2}\sum\dot{A}^{tr}_{j,k}(t)\,\dot{A}^{tr}_{j,-k}(t)+\frac{e^2}{2}\sum_{k\neq 0}\frac{J_{0,k}(t)\,J_{0,-k}(t)}{k^2}; \qquad /29/$$

заметим также, что из /27/ и /19а/ следует

$$L_{ph1}=-\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}k^2A^{tr}_{sk}(t)\,A^{tr}_{s,-k}(t). \qquad /30/$$

2.6. Далее, пронзведем замену переменных

$$\Psi(x,t)=e^{-ie\tilde{\Lambda}(A)}\phi(x,t), \qquad /31/$$

где

$$\tilde{\Lambda}(A)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{k\neq 0}\frac{k_j\,A_{j,k}(t)}{k^2}e^{ikx}. \qquad /32/$$

Тогда получим

$$L_e(\Psi) = L_e(\phi) + e\int d^3x\, J_\mu(x)\,\partial_\mu \tilde{\Lambda}(A)$$

$$= L_e(\phi) - e\sum_{k\neq 0} J_{s,-k}(t)\, k_s A_{j,k}(t) k_j / k^2$$

$$+ ie\sum_{k\neq 0} J_{0,k}(t)\, k_j \dot{A}_{j,k}(t) / k^2 \qquad /33/$$

/величина L_e определена формулами /3/ и /19д//.

2.7. Собирая члены /30/, /29/, /25/, /19в/ и /33/, получим результирующую функцию Лагранжа:

$$L = L^{tr} + L' + L_Q + L_e(\phi) + L'', \qquad /34/$$

где

$$L^{tr} = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} [\dot{A}^{tr}_{s,k}(t)\dot{A}^{tr}_{s,-k}(t) - k^2 A^{tr}_{s,k}(t) A^{tr}_{s,-k}(t)], \qquad /34a/$$

$$L_e(\phi) = -\int dx\, \bar{\phi}\,(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\phi, \qquad /34б/$$

$$L' = e\sum_{k\neq 0} A^{tr}_{s,k}(t) J_{s,-k}(t) = ie\int dx\, \bar{\phi}\,\gamma_s A^{tr}_s \phi, \qquad /34в/$$

$$L_Q = -\frac{e^2}{2}\sum_{k\neq 0} \frac{J_{0,k}(t) J_{0,-k}(t)}{k^2}, \qquad /34г/$$

$$L'' = -e A_{0,0}(t) J_{0,0}(t). \qquad /34д/$$

2.7.1. Произведем еще замену переменной:

$$\phi(x,t) = \eta(x,t)\exp[-ie\int^t d\tau \frac{A_{00}(\tau)}{\sqrt{V}}]. \qquad /31a/$$

Тогда получим, очевидно,

$$L_e(\phi) = L_e(\eta) - L''. \qquad /34e/$$

2.7.2. Таким образом, имеем

$$L = L^{tr} + L_e(\eta) + L' + L_Q. \qquad /34ж/$$

Эта функция Лагранжа является неособенной в том смысле, что ни один из определенных ею канонически сопряженных импульсов не обращается в нуль.

2.8. Поэтому гамильтониан для функции Лагранжа /34ж/ находится по каноническому рецепту:

$$H = H^{tr} + H_e(\eta) - L' - L_Q, \qquad /35/$$

где

$$H^{tr} = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} [\pi^{tr}_{sk}(t)\pi^{tr}_{s,-k}(t) + k^2 A^{tr}_{s,k}(t) A^{tr}_{s,-k}(t)], \qquad /35a/$$

$$H_e(\eta) = \int dx\, \eta^*(x)(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)\eta(x); \qquad /35б/$$

здесь $\pi^{tr}_{s,k}$ - импульс, канонически сопряженный $A^{tr}_{s,k}$,

$$\pi^{tr}_{s,k} = \dot{A}^{tr}_{s,-k}, \qquad /35в/$$

$$\beta = \gamma_4, \quad \vec{\alpha} = i\gamma_4\vec{\gamma}.$$

2.8.1. Подчеркнем, что функции $\pi^{tr}_{s,k}$, $A^{tr}_{s,k}$, $k\neq 0$, $J_{s,k}(t)$, η, η^* в формулах /35/, /34/ остаются неизменными при градиентном преобразовании /10/, /11/ /см. /31/, /31a//.

2.8.2. Поэтому гамильтониан /35/ является калибровочно-инвариантным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Венцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. Гостехиздат, М., 1947.*
2. *Zastavenko L.G. JINR, E2-10819, Dubna, 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел 27 декабря 1978 года.