СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 12026

С.Манов

УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1978

P2 - 12026

С.Манов*

УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

* ИЯИЯЭ БАН, София.

Манов С.С. P2 - 12026

Уравнения девиации и производные Ли в римановых пространствах

Исследована связь между уравнениями девиации и производными Ли в римановых пространствах V_n с целью получения общей формы уравнений девиации и рассмотрения ее частных случаев, предложенных различными авторами. С использованием формализма производных Ли от геометрических объектов, характеризующих некоторую базисную траекторию, доказаны утверждения о возможности найти общее условие для вектора девиации ξ^i и о связи параметров базисной кривой и соответствующей ей траектории. Исследованы условия, при наложении которых получаются различные уравнения девиации негеодезических траекторий и геодезических траекторий в пространствах V_n, допускающих группы симметрии.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Manov S.S. P2 - 12026

The Deviation Equation and Lie Derivatives in Riemannian Spaces

The connection between Lie derivatives and the deviation equations has been investigated in Riemannian spaces V_n. On this basis the deviation equations of the geodesics have been obtained, in space with symmetries, as well as deviation equations of non-geodesic trajectories, through imposing certain conditions on the Lie derivatives with respect to the tangential vector of the basic trajectory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Исследования основных структур и попытки экспериментального подтверждения теории гравитации повысили интерес к проблемам движения массивных тел и пробных частиц в гравитационном поле. Рассматривая возможности а/ обнаружения гравитационных волн, б/ описания деформации и приливных сил в массивных телах и движения пробных частиц во внешних сильных гравитационных полях, в/ обсуждения проблем энергии-импульса гравитационного поля, множество авторов обратилось к предложенным и использованным в разных физических ситуациях уравнениям девиации траекторий частиц во внешнем гравитационном поле.

Уравнение девиации геодезических, предложенное Сингом и Шилдом /14,15/ на основе рассмотрения двухпараметрических семейств кривых, в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j \qquad /O.1/$$

было использовано Фишбоном /3/ и Машхуном /7/ для описания приливных явлений в сильных гравитационных полях. Здесь

$$u^i = \frac{dx^i}{ds},\quad u^i u_i = e,\ (e^2 = 1,0),\quad \frac{Du^i}{ds} = u^i{}_{;j}\, u^j = F^i = 0,$$

$$\xi_n R^n_{ik\ell} = \xi_{i;k;\ell} - \xi_{i;k;\ell}\,, \qquad /O.2/$$

D/ds - ковариантная производная по аффинному параметру s, $;k$ обозначает ковариантную производную по x^k; $R^i_{k\ell j}$ - тензор Римана в пространстве V_n.

Мицкевич [10] и Фуке [4] предложили лагранжев формализм для получения уравнения девиации геодезических. Существуют и другие методы [1,9,14] для получения этого уравнения. Его обобщение в случае негеодезических траекторий в виде [15,16]

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + F^i_{;j}\, \xi^j \qquad /О.3/$$

было использовано Вебером [16] как теоретическая основа для экспериментального обнаружения существования гравитационных волн.

Мицкевич и Епихин [2] предложили уравнение девиации в виде

$$\frac{D}{ds}(u^i + V^i) = R^i_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j, \quad V^i = \frac{D\xi^i}{ds}. \qquad /О.4/$$

Они интерпретировали это уравнение как уравнение девиации траектории "скалярной" частицы с точки зрения заданной мировой линии наблюдателя.

Машхун [7 (1977)] рассмотрел уравнения девиации, используя привилегированную систему отсчета, дефинированную с помощью координат Ферми. Он применил эти уравнения для описания радиационных процессов при приливных явлениях в сильных гравитационных полях. Разлагая метрический тензор в ряд для точек вблизи базисной кривой, в которых проведена соседняя кривая, Машхун [7 (1975)] получил в первом порядке приближения условия для вектора ξ^i

$$\gamma^i_j \frac{D\xi^j}{ds} = u^i_{;j}\xi^j, \quad \gamma_{ij} = g_{ij} - e u_i u_j, \quad \gamma^i_j = g^{i\ell}\gamma_{\ell j}, \qquad /О.5/$$

ведущие к уравнениям девиации в виде

$$\gamma^i_j \frac{D^2\xi^j}{ds^2} = R^i_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + F^i_{;j}\xi^j + e(2F^i u_j + u^i F_j)\frac{D\xi^j}{ds}. \qquad /О.6/$$

Под влиянием критики Можена [8] уравнения девиации, использованного Вебером, были предложены уравнения девиации на основе понятий механики непрерывных сред в виде

$$\frac{D^2\xi^i_{(n)}}{ds^2} = k^i_{j(n)}\xi^j_{(n)} + d^i_{j(n)}\frac{D}{ds}\xi^j_{(n)}, \quad n = \pm 1, \qquad /О.7/$$

$$k^i_{j(n)} = \frac{D}{ds} d^i_{j(n)}, \quad d^i_{j(n)} = E^i_j - n S^i_j, \qquad /О.8/$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i} - eF_i u_j - eF_j u_i),$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} - u_{j;i} - eF_i u_j + eF_j u_i). \qquad /О.9/$$

E_{ij} и S_{ij} – соответственно тензор скорости деформации и тензор скорости вращения [15].

Все эти уравнения рассматривались для траекторий с малым параметром удаления, т.е. когда их точки находятся вблизи одна от другой в заданной области $\bar{V}_n$.

Существуют и другие обобщения уравнений девиации /см., например, цитированную работу Машхуна [7], Бажанского [1]/, в которых рассматривались траектории с произвольным параметром удаления /уравнения девиации высшего порядка/.

Многообразие форм уравнений девиации ставит вопрос об их рассмотрении на основе общего формализма [11]. С его помощью можно исследовать связи между предложенными различными авторами уравнениями девиации и находить новые возможности, связанные с определенными физическими ситуациями. Для этой цели используется связь между уравнениями девиации и производными Ли соответствующих геометрических объектов в V_n.

Цель настоящей работы: 1/ рассмотреть связь между уравнениями девиации и производными Ли в пространствах V_n и на этой основе найти общую форму этих уравнений; 2/ с помощью дополнительных условий для производных Ли получить частные случаи уравнения девиации, которые могут найти приложение в физических задачах.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ ЛИ И УРАВНЕНИЯМИ ДЕВИАЦИИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Производные Ли и уравнение траектории для одной частицы в римановом пространстве V_n

Уравнение траектории для одной частицы в гравитационном поле задано уравнением геодезических в V_n, $(n = 4)$,

$$\frac{Du^i}{ds} = u^i{}_{;j}\, u^j = F^i = 0,\quad u^i = \frac{dx^i}{ds};\ u^i u_i = e,\ e^2 = 1{,}0\ , \qquad /1.1/$$

в отсутствие негравитационных сил и уравнением

$$\frac{Du^i}{ds} = u^i{}_{;j} u^j = F^i,\quad F^i = F^i(x^k) \neq 0, \qquad /1.2/$$

когда в V_n существуют негравитационные силовые поля F^i, u^i - тангенциальный вектор к кривой $x^k(s)$, который интерпретируют в V_4 как 4-мерную скорость частицы, чья траектория определена одним из заданных уравнений.

Если рассматривается производная Ли от вектора F^i по направлению вектора ξ^i /17,с.9–18/ и используются коммутационные соотношения между ковариантной производной и производной Ли в V_n, можно легко доказать следующее утверждение:

Утверждение 1. Если $F^i = u^i{}_{;j} u^j$, ($u^i = \frac{dx^i}{ds}$, $u^i u_i = e$, $e^2 = 1{,}0$), то для каждого вектора ξ^i выполнено условие

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \xi^i{}_{;j} F^j + u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{\,i}_{k\ell}\right\}, \qquad /1.3/$$

где $\underset{\xi}{\pounds}$ является производной Ли по направлению вектора ξ^i. Это условие мы назовем "обобщенным уравнением девиации" /введенное наименование требует дополнительного уточнения/.

Доказательство производится непосредственным вычислением.

Условие /1.3/ легко можно получить с помощью проекции производной Ли от символов Кристоффеля /17,с.8/

$$\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{\,i}_{k\ell}\right\} = \xi^i{}_{;k;\ell} - R^i{}_{k\ell j}\xi^j, \qquad /1.4/$$

где

$$\left\{{}^{\,i}_{k\ell}\right\} = \left\{{}^{\,i}_{\ell k}\right\} = \frac{1}{2} g^{in}\left(g_{\ell n,k} + g_{kn,\ell} - g_{k\ell,n}\right) \qquad /1.5/$$

на u^k, u^ℓ и после необходимых преобразований /см. также доп. 1/ "обобщенное уравнение девиации" можно записать с помощью векторов F^i и u^i в несколько отличающихся друг от друга эквивалентных формах:

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \xi^i{}_{;j} F^j + \underset{\xi}{\pounds} F^i - \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) - u^i{}_{;j} \underset{\xi}{\pounds} u^j, \qquad /1.6/$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + F^i{}_{;j}\xi^j - \frac{D}{ds}\left(u^i{}_{;k}\xi^k - \frac{D}{ds}\xi^i\right) -$$

$$- u^i{}_{;j}\left(u^j{}_{;k}\xi^k - \frac{D}{ds}\xi^j\right), \qquad /1.7/$$

Здесь введены и выполняются следующие обозначения и отношения:

$$F^i = \frac{Du^i}{ds} = u^i_{;j}u^j , \quad F^i u_i = 0, \quad V^i = \frac{D\xi^i}{ds}, \qquad /1.8/$$

$$\frac{D}{ds}(\xi^i_{;k}) = R^i_{k\ell j}\, u^\ell \xi^j + u^\ell \mathop{£}_{\xi}\{^{\,i}_{k\ell}\}, \qquad /1.9/$$

$$\frac{D}{ds}(V^j u_j) = V^j F_j + \xi^i_{;k} u_i F^k + u_i u^k u^\ell \mathop{£}_{\xi}\{^{\,i}_{k\ell}\}, \qquad /1.10/$$

$$\mathop{£}_{\xi} F^i = \mathop{£}_{\xi}(u^i_{;j}\, u^j) = u^j \mathop{£}_{\xi}(u^i_{;j}) + u^i_{;j} \mathop{£}_{\xi} u^j =$$

$$= (\mathop{£}_{\xi} u^i)_{;j}\, u^j + u^i_{;j} \mathop{£}_{\xi} u^j + u^k u^\ell \mathop{£}_{\xi}\{^{\,i}_{k\ell}\}, \qquad /1.11/$$

$$u^k u^\ell \mathop{£}_{\xi}\{^{\,i}_{k\ell}\} = \mathop{£}_{\xi} F^i - \frac{D}{ds}(\mathop{£}_{\xi} u^i) - u^i_{;j} \mathop{£}_{\xi} u^j , \qquad /1.12/$$

$$u_i u^k u^\ell \mathop{£}_{\xi}\{^{\,i}_{k\ell}\} = -[\frac{Du^i}{ds} \mathop{£}_{\xi} u_i + u_i \frac{D}{ds}(\mathop{£}_{\xi} u^i)], \qquad /1.13/$$

$$u_i \mathop{£}_{\xi} F^i = -F^i \mathop{£}_{\xi} u_i = -F^i u^j \mathop{£}_{\xi} g_{ij} - F_j \mathop{£}_{\xi} u^j =$$

$$= -F_i \mathop{£}_{\xi} u^i - F^i u^j (\xi_{i;j} + \xi_{j;i}), \qquad /1.14/$$

$$\mathop{£}_{\xi} F^i = F^i_{;k}\xi^k - F^k \xi^i_{;k}, \quad \mathop{£}_{\xi} u^i = u^i_{;k}\xi^k - \frac{D\xi^i}{ds}, \qquad /1.15/$$

$$\mathop{£}_{\xi} u^i = -u^i \frac{\mathop{£}_{\xi} ds}{ds}, \quad u_i \mathop{£}_{\xi} u^i = -e \frac{\mathop{£}_{\xi} ds}{ds}, \quad \mathop{£}_{\xi} dx^i = 0, \qquad /1.16/$$

$$R^i_{k\ell j} u^k u^\ell = \frac{D}{ds}(u^i_{;j}) + u^i_{;k} u^k_{;j} - F^i_{;j}, \qquad /1.17/$$

$$\frac{D}{ds}(V^i u_i) = F^i V_i + F^i_{;j} u_i \xi^j - u_i \frac{D}{ds}(\mathop{£}_{\xi} u^i), \qquad /1.18/$$

Если $V^i = \frac{D\xi^i}{ds}$ задано в явном виде, тогда этому "первому интегралу" уравнений девиации будет соответствовать определенное уравнение для $D^2\xi^i/ds^2$. Вид условия для V^i можно определить заданием производной Ли от u^i по направлению вектора ξ^i с помощью соотношений:

$$V^i = \frac{D\xi^i}{ds} = u^i_{;k}\xi^k - \mathop{£}_{\xi} u^i, \quad u^i V_i = -u_i \mathop{£}_{\xi} u^i, \qquad /1.19/$$

$$V_i = u^j \mathop{£}_{\xi} g_{ij} + u_{j;i}\xi^j - (\xi_j u^j)_{;i} . \qquad /1.20/$$

1.2. Производные Ли от величин, характеризующих некоторую траекторию и соответствующую ей соседнюю траекторию

Рассмотрим вопрос о связи условия /1.3/ с уравнением девиации двух траекторий в V_n. Для этой цели необходимо рассмотреть связь между производными Ли от величин F^i и u^i из уравнений для одной траектории и соответствующими величинами $\bar{F}^i$ и v^i для другой траектории в V_n.

При рассмотрении точечной трансформации в виде

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i, \quad \xi^i = \xi^i(x^k), \qquad /1.21/$$

где $\xi^i = \bar{\xi}^i\, dt$ - инфинитезимальный вектор / dt - инфинитезимальный параметр/ производная Ли от вектора F^i по направлению вектора ξ^i определяет деформированный вектор[17]

$$\bar{F}^i = F^i + \underset{\xi}{\pounds} F^i , \qquad /1.22/$$

соответствующий /по конструкции/ вектору в точке $\bar{x}^k$. Вектор v^i можно представить в виде

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} u^i \qquad /1.23/$$

и рассматривать как тангенциальный вектор кривой $x^k(\tau)$, где параметры двух траекторий $x^k(s)$ и $x^k(\tau)$ связаны соотношением

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \alpha(x^k) \neq 0. \qquad /1.23а/$$

Если $\bar{F}^i$ описывает изменение вектора v^i по кривой $x^k(\tau)$, т.е. если выполнено условие

$$\bar{F}^i = \frac{\bar{D} v^i}{d\tau} = \frac{dv^i}{d\tau} + v^k v^\ell \overline{\{{}^{i}_{k\ell}\}}, \qquad /1.24/$$

где

$$\overline{\{{}^{i}_{k\ell}\}} = \{{}^{i}_{k\ell}\} + \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{i}_{k\ell}\}, \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds}, \qquad /1.24а/$$

то можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Необходимое и достаточное условие возможности записать вектор $\bar{F}^i = F^i + \underset{\xi}{\pounds} F^i$ в виде /1.24/, где выполнены /1.23, 1.24а/, есть:

$$\underset{\xi}{\pounds} F^i = -F^i + \frac{1}{\alpha^2}[F^i - u^i \frac{D}{ds}\log\alpha + u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{i}_{k\ell}\}]. \qquad /1.25/$$

Это эквивалентно условиям для $\bar{F}^i$:

$$\bar{F}^i = \frac{1}{\alpha^2}[F^i - u^i \frac{D}{ds}\log\alpha + u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{i}_{k\ell}\}]. \qquad /1.26/$$

При доказательстве необходимости нужно использовать формулы /1.2/, /1.23/ и /1,24а/ для F^i, V^i и $\overline{\{{}^{i}_{k\ell}\}}$. Достаточность следует из формулы /1.22/ для $\underset{\xi}{\pounds} F^i$ и соотношений /1.23/ и /1.24а/.

Таким образом, вектор $\bar{F}^i = \bar{D} v^i / d\tau$ определен с помощью величин, характеризующих базисную кривую $x^k(s)$, и функции α, дающей связь между базисной кривой и кривой $x^k(\tau)$ с тангенциальным вектором v^i, выполняющим /1.24/. Существенно выполняются следующие из /1.25/, /1.10/, /1.8/, /1.6/, /1.7/ и /1.3/ условия:

$$u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{i}_{k\ell}\} = u^i \frac{D}{ds}\log\alpha + \underset{\xi}{\pounds} F^i - (1-\alpha^2)(F^i + \underset{\xi}{\pounds} F^i), \qquad /1.27/$$

$$\frac{D}{ds}(u^i_{;k}\xi^k - \frac{D\xi^i}{ds}) + u^i_{;j}(u^j_{;k}\xi^k - \frac{D\xi^j}{ds}) =$$

$$= (1-\alpha^2)(F^i + \underset{\xi}{\pounds} F^i) - u^i \frac{D}{ds}\log\alpha , \qquad /1.28/$$

$$\underset{\xi}{\pounds} F^i = -F^i + \frac{1}{1-\alpha^2}[\frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) + u^i_{;j}\underset{\xi}{\pounds} u^j + u^i \frac{D}{ds}\log\alpha], \qquad /1.29/$$

$$e\frac{D}{ds}\log\alpha - (1-\alpha^2)u_i \underset{\xi}{\pounds} F^i + u_i \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) = 0, \qquad /1.30/$$

$$\frac{D}{ds}(V^i u_i) = V^i F_i + u_i F^i_{;j}\xi^j - (1-\alpha^2)u_i \underset{\xi}{\pounds} F^i + e\frac{D}{ds}\log\alpha. \qquad /1.31/$$

Вектор ξ^i определяет перенос между кривой с уравнением $\frac{Du^i}{ds} = F^i$ /базисной траектории/ и кривой с уравнением $\bar{D}v^i/d\tau = \bar{F}^i$/наблюдаемой траектории/. Он определяется как вектор девиации. Его изменение, а вместе с этим и относительное ускорение между двумя траекториями, описывается условием /1.3/, названным по этой причине "обобщенным уравнением девиации". Последнее уравнение может быть записано в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + F^i{}_{;j}\, \xi^j - (1-\alpha^2)(F^i + \pounds_{\xi} F^i) + \frac{1}{\alpha}\alpha_{;k}\, u^k u^i . \qquad /1.32/$$

Выражение /1.3O/ можно рассматривать как уравнение для функции α, если остальные величины известны как функции координат x^k. Решения уравнения /1.3O/ для α можно получить в виде

$e = 0$:

$$\alpha = \left[1 - \frac{u_i \frac{D}{ds}(\pounds_{\xi} u^i)}{u_i \pounds_{\xi} F^i}\right]^{1/2} = \left[1 + \frac{u_i \frac{D}{ds}(\pounds_{\xi} u^i)}{F_i \pounds_{\xi} u^i + F^i u^j \pounds_{\xi} g_{ij}}\right]^{1/2}, \qquad /1.33/$$

$e \neq 0$ $(e^2 = 1)$:

$$\alpha = \{ C_0 + \frac{2}{e}\int_s dx_i \pounds_{\xi} F^i \cdot \exp(\frac{2}{e}\int_s dx_i [\pounds_{\xi} F^i - (\pounds_{\xi} u^i)_{;k} u^k])\}^{-1/2} \times$$

$$\times \exp(\frac{1}{e}\int_s dx_i [\pounds_{\xi} F^i - (\pounds_{\xi} u^i)_{;k} u^k]), \quad C_0 = \text{const}.,$$

$$\alpha = \{C_0 + \frac{2}{e}\int_s dx_i \pounds_{\xi} F^i \exp(-\frac{2}{e}\int_s [u^i{}_{;k} \pounds_{\xi} u_i + u_i (\pounds_{\xi} u^i)_{;k}] dx^k\}^{-1/2} \times$$

$$\times \exp(-\frac{1}{e}\int_s [u^i{}_{;k} \pounds_{\xi} u^i + u_i (\pounds_{\xi} u^i)_{;k}] dx^k). \qquad /1.34/$$

2. *УРАВНЕНИЯ ДЕВИАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИ В* V_n

2.1. *Уравнения девиации с* $F^i = Du^i/ds \neq 0$

Частные случаи уравнения девиации, предложенные различными авторами, можно получить из "обобщенного уравнения девиации" /1.3/ наложением дополнительных условий на производные Ли по направлению вектора ξ^i от F^i и u^i .

1. $\pounds_{\xi} u^i = 0$. При наложении этого условия на $\pounds_{\xi} u^i$ из /1.3/ следует уравнение девиации, предложенное Сингом и Шилдом и использованное Вебером/16/ в виде /О.3/

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + F^i{}_{;k}\, \xi^k ,$$

где выполняются следующие отношения для ξ^i и α:

$$\frac{D\xi^i}{ds} = u^i{}_{;j}\, \xi^j , \quad u_i V^i = 0, \quad \pounds_{\xi} F^i = u^k u^\ell \pounds_{\xi} \{ {}^{\,i}_{k\ell} \}, \qquad /2.1/$$

$$\alpha = \text{const} . \qquad /2.2/$$

При выполнении условия $\pounds_{\xi} u^i = 0$ из /1.14/, /1.16/ и /1.3O/ следует, что $\alpha = \text{const}$ и вместе с тем выполняется условие $\pounds_{\xi} g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0$ Отсюда можно заключить, что уравнение, использованное Вебером, получено для случая, когда ξ^i -вектор Киллинга. Следовательно, уравнение девиации, предложенное Сингом и Шилдом, выполняется в пространствах V_n, допускающих группы движения $\pounds_{\xi} g_{ij} = 0$. Необходимым и достаточным условием для существования уравнения /О.3/ в V_n является условие

$$\frac{D}{ds}\left(u^i{}_{;k}\xi^k - \frac{D\xi^i}{ds}\right) = -u^i{}_{;j}\left(u^j{}_{;k}\xi^k - \frac{D\xi^j}{ds}\right), \qquad /2.3/$$

которое удовлетворяется /тождественно/ условием $\underset{\xi}{\pounds} u^i = 0$.

2. $\underset{\xi}{\pounds} u^i = \psi u^i$, $\psi = e u_k V^k$. При наложении этого условия, эквивалентного условию Машхуна[7], получается соответствующее уравнение девиации /0.6/. После подстановки явной формы для $\underset{\xi}{\pounds} u^i$ в выражение для функции α можно получить соотношение для параметров базисной и соответствующей ей кривой.

3. $\underset{\xi}{\pounds} u^i = \phi F^i$, $\phi = e u_j \xi^j$. При наложении этого условия уравнение девиации записывается в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \left[F^i{}_{;j}\xi^j - \frac{D}{ds}(\phi F^i) - \phi u^i{}_{;j} F^j\right] \qquad /2.4/$$

или в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \left[F^i{}_{;j} - eF^iF_j - eu_j(F^k u^i{}_{;k} + F^i{}_{;k}u^k)\right]\xi^j. \qquad /2.5/$$

При этом выполняются следующие условия:

$$\frac{D\xi^i}{ds} = (u^i{}_{;j} - eF^i u_j)\xi^j, \quad \underset{\xi}{\pounds} u^i = -\frac{D}{ds}\xi^i + u^i{}_{;k}\xi^k, \qquad /2.6/$$

$$\underset{\xi}{\pounds} F^i = -F^i + \frac{1}{1-\alpha^2}\left[\frac{D}{ds}(\phi F^i) + u^i\frac{D}{ds}\log\alpha + \phi u^i{}_{;j}F^j\right], \qquad /2.7/$$

$$F^iF_i = -\frac{1}{\phi}\left[(1-\alpha^2)u_i\, \underset{\xi}{\pounds} F^i - e\frac{D}{ds}\log\alpha\right]. \qquad /2.8/$$

Физическую интерпретацию этого случая можно найти после введения ортогональной u^i -метрики γ_{ij} [12]:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - eu_iu_j, \qquad /2.9/$$

с помощью которой условие 3, записанное в форме /2.6/, можно выразить в виде

$$\frac{D\xi^i}{ds} = \gamma^i{}_k\gamma^\ell{}_j(\epsilon^k{}_\ell + s^k{}_\ell)\xi^j = (E^i{}_j + S^i{}_j)\xi^j, \qquad /2.10/$$

где

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}), \quad s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} - u_{j;i}), \qquad /2.11/$$

$$E_{ij} = \gamma^k{}_i\gamma^\ell{}_j\epsilon_{k\ell}, \quad S_{ij} = \gamma^k{}_i\gamma^\ell{}_j s_{k\ell}. \qquad /2.12/$$

E_{ij} и S_{ij} соответствуют тензору скорости деформации и тензору скорости вращения /см. /0.3//. Уравнение /2.10/ можно интерпретировать как условие изменения вектора ξ^i под влиянием тензора скорости деформации и тензора скорости вращения[6].

4. $\underset{\xi}{\pounds} u^i = e(F_j\xi^j)u^i + (u^i{}_{;j} - u_j{}^{;i})\xi^j$. Уравнение девиации, соответствующее этому условию, получается в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j}u^k u^\ell\xi^j + [F^i{}_{;j} + g^{ik}(F_{j;k} - F_{k;j} - eF_kF_j) -$$

$$- eu^i(F^k u_{j;k} + F_{j;k}u^k)]\xi^j, \qquad /2.13/$$

где

$$\frac{D\xi^i}{ds} = (u_j{}^{;i} - eF_j u^i)\xi^j = \gamma^i{}_k\gamma^\ell{}_j(\epsilon^k{}_\ell - s^k{}_\ell)\xi^j = (E^i{}_j - s^i{}_j)\xi^j. \qquad /2.14/$$

Случай 4 будет эквивалентным случаю 3, если выполняется дополнительное условие:

$$\xi^j = \phi u^j, \quad (g^j_k - e u^j u_k)\xi^k = \gamma^j{}_k \xi^k = \eta^j = 0, \qquad /2.15/$$

т.е. если ξ^i -коллинеарный к u^i вектор.

5. $\underset{\xi}{\pounds} F^i = -F^i$ При наложении этого условия уравнение девиации выполняется в виде

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + F^i{}_{;j}\xi^j + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{ds} u^i, \qquad /2.16/$$

где

$$e\frac{D}{ds}\log\alpha = -u_i \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i), \quad F_i \underset{\xi}{\pounds} u^i = F^i u^j \underset{\xi}{\pounds} g_{ij}, \qquad /2.17/$$

$$\alpha = a_0 \exp(-\frac{1}{e}\int_s u_i (\underset{\xi}{\pounds} u^i)_{;k} dx^k), \quad a_0 = \text{const.}, \; e^2 = 1. \qquad /2.18/$$

Решение для функции α показывает в явном виде связь между параметрами базисной кривой и соответствующей ей геодезической /см. /1.22// и производной Ли от вектора u^i по направлению вектора ξ^i.

6. $\underset{\xi}{\pounds} F^i = -F^i - \xi^i{}_{;k}F^k + \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) + u^i{}_{;j}\underset{\xi}{\pounds} u^j$ или $u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{\,i}_{k\ell}\} = -(F^i + \xi^i{}_{;k}F^k)$. При наложении этого условия уравнение девиации получается в предложенной Мицкевичем и Епихиным форме /О.4/, где выполнены следующие соотношения:

$$\frac{D}{ds}(V^i u_i) = V^i F_i, \qquad /2.19/$$

$$e\frac{D}{ds}\log\alpha + \alpha^2[u_i \frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) - \xi^i{}_{;k} u_i F^k] + \xi^i{}_{;k} u_i F^k = 0. \qquad /2.20/$$

7. $\xi^i = u^i$. В этом случае уравнение девиации описывает изменение вектора F^i по продолжению базисной кривой

$$\frac{D^2 u^i}{ds^2} = \frac{DF^i}{ds} = \underset{u}{\pounds} F^i + u^i{}_{;k}F^k, \qquad /2.21/$$

где

$$\underset{u}{\pounds} F^i = u^k u^\ell \underset{u}{\pounds}\{{}^{\,i}_{k\ell}\}, \quad F^i F_i = -u_i \underset{u}{\pounds} F^i = -u_i u^k u^\ell \underset{u}{\pounds}\{{}^{\,i}_{k\ell}\}. \qquad /2.22/$$

По аналогии с 1.-7. новые формы уравнения девиации могут быть получены при наложении подходящих условий, базирующихся на математических или физических ситуациях.

2.2. Уравнения девиации для геодезических в пространствах V_n, допускающих симметрии

Если базисная траектория является геодезической, т.е. если $F^i = 0$, то уравнение девиации /1.3/ имеет форму

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds}\{{}^{\,i}_{k\ell}\} =$$
$$= R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + i u^i \frac{D}{ds}\log\alpha \qquad /2.23/$$

или может быть записано в виде

$$e = 0: \quad \frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j, \qquad /2.23а/$$

где

$$u_i V^i = \frac{D}{ds}(u_i \xi^i) = \text{const.}, \qquad /2.24/$$

$e = 1$:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \eta^j, \quad \eta^i = \gamma^i{}_j \xi^j, \qquad /2.23б/$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \frac{1}{e} u^i \frac{D}{ds}(u_j V^j) =$$

$$= R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j + \frac{1}{e} u^i \frac{D^2}{ds^2}(u_j \xi^j), \qquad /2.23в/$$

где

$$u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\} = -[\frac{D}{ds}(\underset{\xi}{\pounds} u^i) + u^i{}_{;j} \underset{\xi}{\pounds} u^j], \qquad /2.25/$$

$$a = a_0 \exp(\frac{1}{e} u_i V^i) = a_0 \exp(-\frac{1}{e} u_i \underset{\xi}{\pounds} u^i) = a_0 \exp[\frac{1}{e}\frac{D}{ds}(u_i \xi^i)] =$$

$$= A_0 \exp(\frac{1}{e} \int_s dx_i\, u^k u^\ell \underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\}), \quad a_0, A_0 = \text{const}. \quad /2.26/$$

Одновременно выполнены следующие соотношения

$$R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell = -\frac{D}{ds}(u^i{}_{;j}) + u^i{}_{;k} u^k{}_{;j}, \quad u_i \underset{\xi}{\pounds} u^i = -\frac{D}{ds}(u_i \xi^i), \qquad /2.27/$$

$$(\underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\} - \frac{1}{a} a_{;k}\, g^i_\ell) u^k u^\ell = 0. \qquad /2.28/$$

Если условие /2.28/ выполняется для каждого вектора u^k $(F^i = 0)$ из конгруенции геодезических, тогда из условия /2.28/ после необходимой симметризации следует[13]

$$\underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\} = \frac{1}{2a}(a_{;k} g^i_\ell + a_{;\ell} g^i_k), \qquad /2.29/$$

откуда получается условие для a

$$a = C_0 \exp(\frac{2}{n+1} \xi^\ell{}_{;\ell}), \quad C_0 = \text{const.}, \; n = \dim V_n. \quad /2.30/$$

Из /2.23/ и /2.25/ получается соотношение

$$u_i \frac{D\xi^i}{ds} = \frac{2e}{n+1} \xi^\ell{}_{;\ell} + \text{const}. \qquad /2.31/$$

Если пространство V_n допускает симметрии[5], тогда уравнение девиации принимает форму, соответствующую условию симметрии, наложенному на ξ^i, а именно:

1. **Движения:** $\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0$, $\underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\} = 0$,

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j, \quad a = \text{const.}, \qquad /2.32/$$

где

$$\frac{D\xi^i}{ds} = V^i = u_j{}^{;i} \xi^j, \quad u_j \xi^j = \text{const.}, \qquad /2.33/$$

2. **Гомотетические движения:** $\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 2\sigma_0 g_{ij}$,

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j, \quad a = \text{const.}, \; \sigma_{0;k} = 0, \; \sigma_0 = \frac{1}{n} \xi^\ell{}_{;\ell}, \qquad /2.34/$$

где

$$V^i = 2\sigma_0 u^i - \xi^{k;i} u_k, \quad u_i V^i = \frac{D}{ds}(u_i \xi^i) = e\sigma_0. \quad /2.35/$$

3. **Аффинные коллинеации:** $(\underset{\xi}{\pounds} g_{ij})_{;k} = (\xi_{i;j} + \xi_{j;i})_{;k} = 0$,

$$\underset{\xi}{\pounds} \{{}^{\,i}_{k\ell}\} = 0, \quad \frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^i{}_{k\ell j} u^k u^\ell \xi^j, \quad a = \text{const.},$$

$$\frac{D}{ds}(V^i + \xi^{k;i} u_k) = 0, \quad \frac{D}{ds}(V_i u^i) = 0. \qquad /2.36/$$

4. **Специальные проективные коллинеации:** $\epsilon_{;k;\ell} = 0$,

$$\epsilon = \xi^\ell{}_{;\ell}, \quad \frac{D}{ds}\epsilon = c_0 = \text{const.}, \qquad /2.37/$$

$$\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\} = \frac{1}{n+1}\left(\epsilon_{;k}\, g^{i}_{\ell} + \epsilon_{;\ell}\, g^{i}_{k}\right), \qquad /2.38/$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^{i}{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + \frac{2c_0}{n+1}\, u^i , \qquad /2.39/$$

$$\alpha = A_0 \exp\left(-\frac{2c_0 s}{n+1}\right), \qquad /2.40/$$

где

$$\frac{D}{ds}(u_i V^i) = -\frac{2e}{n+1}\, c_0 , \quad A_0 = \text{const.} \qquad /2.41/$$

5. **Проективные коллинеации:** $\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\} = \frac{1}{n+1}\left(\epsilon_{;k}\, g^{i}_{\ell} + \epsilon_{;\ell}\, g^{j}_{k}\right)$,

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^{i}{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \eta^j , \quad \eta^j = \gamma^j{}_k\, \xi^k$$

где

$$\alpha = B_0 \exp\left(\frac{2\epsilon}{n+1}\right), \quad B_0 = \text{const.}, \quad u_i V^i = -u_i \underset{\xi}{\pounds} u^i . \qquad /2.42/$$

6. **Специальные конформные движения:** $\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = 2\sigma g_{ij}, \sigma_{;j;k} = 0$,

$$\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\} = \frac{1}{n}\left(g^{i}_{k}\,\epsilon_{;\ell} + g^{i}_{\ell}\,\epsilon_{;k} - g_{k\ell}\, g^{in}\,\epsilon_{;n}\right), \quad \sigma = \frac{1}{n}\epsilon , \qquad /2.43/$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^{i}{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + g_0 u^i , \quad g_0 = \text{const.}, \qquad /2.44/$$

где

$$\alpha = a_0 \exp\left(\frac{1}{n}\epsilon\right), \quad a_0 = \text{const.}, \quad V^i = 2\sigma u^i - \xi^{j;i} u_j ,$$

$$\frac{D}{ds}(\xi_j u^j) = e \cdot \sigma \qquad /2.45/$$

7. **Конформные движения:** $\underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = 2\sigma g_{ij}$,

$$\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\} = \frac{1}{n}\left(g^{i}_{k}\,\epsilon_{;\ell} + g^{i}_{\ell}\,\epsilon_{;k} - g_{k\ell}\,\epsilon^{;i}\right), \qquad /2.46/$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^{i}{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + u^i \frac{D}{ds}\sigma , \qquad /2.47/$$

где

$$\alpha = a_0 \exp\sigma , \quad a_0 = \text{const.}, \quad u_j V^j = e\sigma . \qquad /2.48/$$

8. **Конформные коллинеации:**

$$\underset{\xi}{\pounds}\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\} = \frac{1}{n}\left(g^{i}_{k}\,\epsilon_{;\ell} + g^{i}_{\ell}\,\epsilon_{;k} - g_{k\ell}\,\epsilon^{;i}\right),$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = R^{i}{}_{k\ell j}\, u^k u^\ell \xi^j + u^i \frac{D}{ds}\sigma ,$$

где

$$\alpha = a_0 \exp\sigma , \quad a_0 = \text{const.}, \quad u_j V^j = e\sigma + h_0 , \quad h_0 = \text{const.}$$

Условия для $u^j(D\xi_j/ds)$ находятся в тесной связи с первыми интегралами геодезических, рассмотренными Катцином и Ловином[5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена связь между уравнениями девиации и производными Ли в римановом пространстве V_n. Общая форма уравнения девиации получена с помощью производной Ли от символов Кристоффеля по направлению векторного поля ξ^i. Различные формы этого "обобщенного" уравнения девиации, записанные с помощью производных Ли от векторов F^i и u^i функции α /связывающей параметры базисной и соответствующей ей кривой/, использованы для получения в явной форме, при наложении различных дополнительных условий на производные Ли от u^i, F^i и $\left\{{}^{i}_{k\ell}\right\}$, уравнения девиации в случаях, когда

$F^i \neq 0$, когда $F^i = 0$ и пространство V_n допускает симметрии. Формализм, который использован для получения уравнений девиации, наводит на мысль, что наряду с классическими формами уравнений девиации для $F^i = 0$ и $F^i \neq 0$, предложенными Сингом и Шилдом, и уравнениями, предложенными другими авторами, существуют другие формы уравнений девиации для геодезических и негеодезических траекторий, когда пространство V_n допускает группы симметрии или когда наложены дополнительные условия на производные Ли от геометрических величин, характеризующих связности и базисную кривую.

Дополнение 1.

Если рассматриваем тождество

$$\underset{v}{\pounds}\mathfrak{L} - (\mathfrak{L} v^i)_{,i} = 0, \qquad v^i{}_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k},$$

для лагранжевой плотности $\mathfrak{L}$ /10/

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\, u^k u^\ell \xi_{k;\ell}, \qquad g = |g_{ik}| < 0,$$

где $\underset{v}{\pounds}$ - производная Ли по направлению вектора V^i, то мы получаем вышеупомянутое тождество в виде

$$\underset{v}{\pounds}\mathfrak{L} - (\mathfrak{L} v^i)_{,i} \equiv \sqrt{-g}(\xi^i{}_{;k;\ell} - R^i{}_{k\ell j}\xi^j - \underset{\xi}{\pounds}\{^{\,i}_{k\ell}\})u^k u^\ell v_i \equiv 0.$$

Для каждого вектора $V^i \neq 0$ следует тождество

$$(\xi^i{}_{;k;\ell} - R^i{}_{k\ell j}\xi^j - \underset{\xi}{\pounds}\{^{\,i}_{k\ell}\})u^k u^\ell = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bazanski S.L. Ann. de 1 Inst.Henri Poincare. Sec.A, 1977, 27 (2), p. 115; 1977, 27 (2), p. 145; Scripte Fac.Sci.Nat.Ujep. Brunensie, Physica, 1975, 5(3-4), p. 265.*

2. *Епихин Е.Н., Мицкевич Н.В. Изв. Вузов, физика, 1976, 9, с. 113; Изв. Вузов, физика, 1975, 7, с. 135.*
3. *Fishbone L.C. Astrophys. J., 1972, 175 (2), L155; 1973, 185(1), p. 43; 1975, 195(1), p. 499.*
4. *Fuchs H., Exp.Technik d. Physik, 1974, 3, p. 185.*
5. *Katzin G,H., Lovine J. Coll.Math. 1972, 26, p. 21.*
6. *Manoff S., Exp.Technik d.Physik, 1976; 5, p. 425; 8th Int.Conf. of GRG, August 7-12, Waterloo, Canada 1977, p. 241; 4th Natl.Conf. of J.Phys., 5-7 April, Sofia 1978, p. 25-26.*
7. *Mashhoon B. Astrophys. J., 1975, 197, p. 705; Preprint, Univ. of Maryland, 1976; Astrophys. J., 1977, 216, p. 591.*
8. *Maugin G.A., GRG, 1973, 4, p. 241; 1974, 5, p. 13.*
9. *Мизнер Ч.В., Торн К.С., Уилер Дж.А. Гравитация. "Мир", М., 1977, т. 1, с. 63-66, 70-71.*
10. *Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. "Наука", М., 1969, с. 77-82.*
11. *Novello M. Damiao Soares I., Salim J.M. GRG, 1977, 8(2), p. 95.*
12. *Newman E.T., Janis A.I. Phys.Rev. 1959, 116, p.1610.*
13. *Рашевский П.Х. Риманова геометрия и тензорный анализ. "Наука", М., 1967, с. 415-425.*
14. *Schmutzer E. Relativistische Physik, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzing 1968, p. 452.*
15. *Синг Дж.Л. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963, с. 152.*
16. *Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. "Наука", М., 1963, с. 159.*
17. *Yano K. The theory of Lie derivatives and its application, North-Holl., Publ.Comp., Amsterdam,1957.*

Рукопись поступила в издательский отдел 16 ноября 1978 года.